ALE formulace TD kompatibilního modelu ve válcových souřadnicích

Karel Tůma

„Jednoocí slepým“

23. května 2012

podpora GAUK-152010, GACR 201/09/0917

Viskoelastický model rychlostního typu s čistě kvadratickou disipací

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \dot{\mathbf{v}} &= \operatorname{div} \mathbf{T}, \\
\mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + 2\mu_2 \mathbf{D} + E\mathbf{B}^d, \\
\overset{\triangledown}{\mathbf{B}} &= -\frac{2E}{\mu_1} \mathbf{B}_{k_{p(t)}} \mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}.
\end{aligned}
$$

Rozepíšeme podrobněji

$$
\begin{gathered}
(\nabla_x \mathbf{v}) : \mathbf{I} = 0, \\
\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla_x \mathbf{v} = \nabla_x \cdot \mathbf{T}, \\
\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2 \left((\nabla_x \mathbf{v}) + (\nabla_x \mathbf{v})^{\mathrm{T}} \right) + E \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}) \mathbf{I} \right), \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \mathbf{B} - (\nabla_x \mathbf{v}) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla_x \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = -\frac{2E}{\mu_1} \mathbf{B} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}) \mathbf{I} \right).
\end{gathered}
$$

jsou rovnice v Eulerovské oblasti Ω_x

Máme zobrazení

$$\hat{\varphi} : \chi \in \Omega_\chi \to x \in \Omega_x, \text{ dále budeme mít } x = \chi + \mathbf{u}(\chi)$$

zobrazující z ALE oblasti Ω_χ, kde žije pevná síť.
Deformační gradient a jeho determinant

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \chi}, \quad \hat{\mathbf{J}} = \det \hat{\mathbf{F}}.$$

Cílem je mít rovnice v neznámé χ, tj. i derivace. Dle přednášky Ondry Součka transformujeme gradient rychlosti

$$\nabla_x \mathbf{v} = (\nabla_\chi \mathbf{v}) \hat{\mathbf{F}}^{-1}.$$

Dále standardně transformujeme bilanci hybnosti a konvektivní člen v transportní rovnici pro **B** pomocí vztahu

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \hat{\mathbf{F}}^{-1} \left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot \nabla_\chi \alpha.$$

Rovnice v Ω_χ

$$\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right) : \mathbf{I} = 0\,,$$

$$\hat{\mathbf{J}}\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{\mathbf{J}}\rho(\nabla_\chi \mathbf{v})\left(\hat{\mathbf{F}}^{-1}\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right) = \nabla_\chi \cdot \left(\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{F}}^{-T}\right),$$

$$\hat{\mathbf{T}} = -p\mathbf{I} + \mu_2((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1} + \hat{\mathbf{F}}^{-\mathrm{T}}(\nabla_\chi \mathbf{v})^{\mathrm{T}}) + E\mathbf{B}^d\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\hat{\mathbf{F}}^{-1}\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right)\nabla_\chi \mathbf{B} - (\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{F}}^{-\mathrm{T}}(\nabla_\chi \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = -\frac{2E}{\mu_1}\mathbf{B}\mathbf{B}^d\,,$$

kde

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \nabla_\chi \mathbf{u}$$

a $\mathbf{u}$ splňuje uvnitř oblasti Ω_χ

$$-\nabla_\chi \cdot \nabla_\chi \mathbf{u} = 0.$$

Na hranici vyžadujeme, aby byly body materiálové, tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}.$$

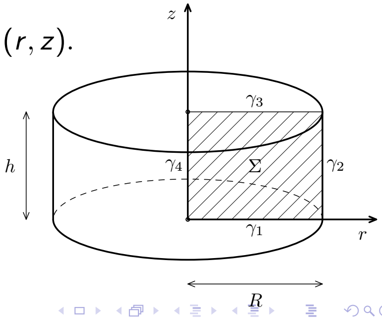
Převod do válcové symetrie

Uvažujeme válcovou symetrii se souřadnicemi (r, φ, z) žijící v Ω_χ! Veličiny nezávisí na úhlu φ, navíc neumožňujeme rotační změny, tedy neznámé jsou ve tvaru

$$p = p(r,z), \quad \mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)(r,z), \quad \mathbf{v} = (v_r, 0, v_z)(r,z),$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{rr}, 0, B_{rz} \\ 0, B_{\varphi\varphi}, 0 \\ B_{rz}, 0, B_{zz} \end{pmatrix}(r,z).$$

Výpočet provádíme je na řezu válce Σ



Nyní užitím úhlové nezávislosti převedeme slabou formulaci v oblasti válce Ω_χ do oblasti řezu válce Σ. K tomu použijeme válcové souřadnice, jejich« Jakobián je roven r

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\Omega \mathrm{tr}\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right) q_1 \,\mathrm{d}x = \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{tr}\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right)(r,z) q_1 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \\
= \int_0^h \int_0^R r \,\mathrm{tr}\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right)(r,z) \left(\int_0^{2\pi} q_1 \,\mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = \\
= \int_\Sigma r \,\mathrm{tr}\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right) \widehat{q}_1 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Tímto jsme zadefinovali novou testovací funkci

$$
\widehat{q}_1(r,z) = \int_0^{2\pi} q_1(r,\varphi,z) \,\mathrm{d}\varphi.
$$

Úplně stejně postupujeme u dalších rovnic (např. bilance hybnosti)

$$\int_\Sigma r\left(\hat{\mathbf{J}}\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\hat{\mathbf{J}}\rho(\nabla_\chi\mathbf{v})\left(\hat{\mathbf{F}}^{-1}\left(\mathbf{v}-\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)\right)\right)\cdot\widehat{\mathbf{w}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = -\int_\Sigma r\left(\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{F}}^{-T}\right):\nabla_\chi\widehat{\mathbf{w}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

Nyní ve slabé formulaci dosadíme za gradienty vektorů ve válcových souřadnicích

$$\nabla_\chi\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r},0,\frac{\partial v_r}{\partial z}\\ 0,\frac{v_r}{r},0\\ \frac{\partial v_z}{\partial r},0,\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix},\quad \nabla_\chi\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_r}{\partial r},0,\frac{\partial u_r}{\partial z}\\ 0,\frac{u_r}{r},0\\ \frac{\partial u_z}{\partial r},0,\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix},$$

a vypočítáme, čemu je rovno $\hat{\mathbf{F}}$, jeho determinant $\mathbf{J}$ a inverze $\hat{\mathbf{F}}^{-1}$.

Problém na ose $r = 0$

Na ose válce $r = 0$ máme okrajové podmínky $v_r = 0$ a $\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$, přesto je pro $r = 0$ problém ve členu (jinde lze vypočítat limitu)

$$\left(r\left(\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{F}}^{-T}\right) : \nabla_\chi \widehat{\mathbf{w}}\right) = \overbrace{r\frac{w_r}{r}\hat{T}_{22}\underbrace{\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{F}}^{-1}_{22}}_{\text{OK}}}^{\text{zq složek [2,2]}} + \dots,$$

konkrétně v části, kde je gradient rychlosti

$$\hat{T}_{22} = -p + \underbrace{\mu_2((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1} + \hat{\mathbf{F}}^{-\mathrm{T}}(\nabla_\chi \mathbf{v})^{\mathrm{T}})[2,2]}_{\hat{F}^{-1}_{22}\frac{v_r}{r}} + E\mathbf{B}^d_{22}.$$

Řešení (Ondra Souček): Pro $r = 0$ přečteme z bilance hmoty:

$$\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right)[22] = -\left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right)[11] - \left((\nabla_\chi \mathbf{v})\hat{\mathbf{F}}^{-1}\right)[33].$$

Benchmark, srovnání s čistou pružností

Cílem je srovnat výsledek ustáleného problému s čistou pružností, kde je snadné vypočítat stacionární problém v Lagrangeovské formulaci v Comsolu.
Data jsou následující: Válec má výšku 1 m, poloměr 1 m, hustotu 1000 kg/m^3, modul pružnosti 500 Pa. Nahoře v oblasti $0 \leq r \leq 0{,}5$ m působíme konstantní silou 200 N.

Pro ALE problém volíme $E = 500$ Pa, $\mu_1 = \infty$ Pa s a $\mu_2 = 10$ Pa s a tím redukujeme problém na nelineární Kelvin-Voigt.