Termodynamicky kompatibilní viskoelastické modely rychlostního typu

Karel Tůma

„Jednoocí slepým“

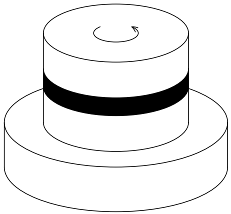
14. května 2012

podpora GAUK-152010, GACR 201/09/0917

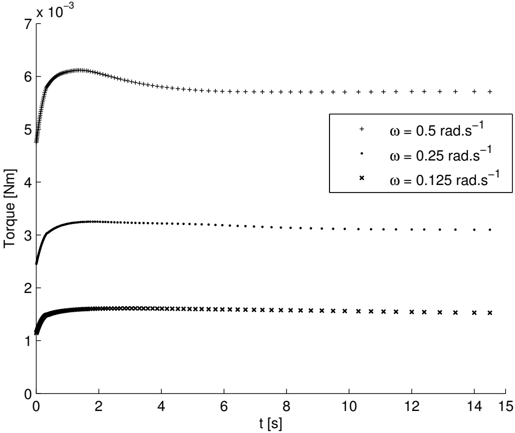
- Potřebujeme viskoelastické modely rychlostního typu pro zachycení testu napěťové relaxace a creep testu.
- Studujeme materiály, které se částečně chovají *částečně elasticky a částečně vazce*.

Experiment s asfaltem

- Čistý asfalt
- A. Narayan, J.M. Krishnan, IIT Madras
- Výška 1 mm, poloměr 4 mm, úhlová rychlost $\omega = H_0\omega_0$
- Měří se potřebný moment síly.

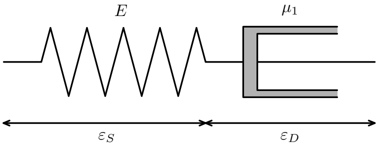


Máme data pro teplotu $\theta = 35°\mathrm{C}$ a pro tři různé úhlové rychlosti ω_0: 0,125 rad.s^{-1}, 0,25 rad.s^{-1} a 0,5 rad.s^{-1}.



Viskoelastické modely z mechanických analogů

Maxwellův model



Celková deformace $\varepsilon_M = \varepsilon_S + \varepsilon_D$

Napětí je shodné v obou prvcích a rovno σ_M

Z definice vztahů pro tlumič a pružinu

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_M &= \dot{\varepsilon}_S + \dot{\varepsilon}_D \\ &= \frac{1}{E}\dot{\sigma}_M + \frac{1}{\mu_1}\sigma_M\end{aligned}$$

Jak rozšířit do více dimenzí? Jednoduchý pokus, volme za $\dot{\varepsilon} = \mathbf{D}$, místo napětí část tenzoru napětí

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$$

$$2\mathbf{D} = \frac{1}{E}\dot{\mathbf{S}} + \frac{1}{\mu_1}\mathbf{S}$$

Bohužel $\dot{\mathbf{S}}$ není objektivní derivace.
Ať je tenzor $\mathbf{A}$ objektivní, tj.

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \text{při trafo souřadnic} \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{c}(t).$$

Pak derivace $\dfrac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}$ je objektivní, když

$$\frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta t} = \mathbf{Q}\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$

Příklad objektivní derivace (Gordon-Schowalter)

$$\left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right)_a = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{W}) + a(\mathbf{D}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{D}) \quad a \in [-1, 1]$$

a	1	-1	0
	Dolní konvektivní (Oldroyd-A)	Horní konvektivní (Oldroyd-B)	Korotační (Jaumann)

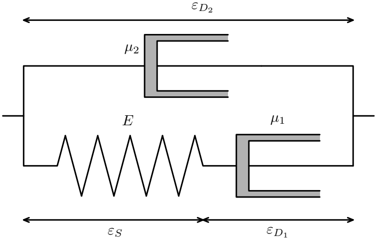
Horní konvektivní Oldroydova derivace

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} =: \overset{\triangledown}{\mathbf{A}}$$

Pak tedy vypadá Maxwellův model takto

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \mathbf{S} \\ \frac{1}{\mu_1}\mathbf{S} + \frac{1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{S}} &= 2\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Oldroydův model



Více tekutinový model

Již víme

$$\dot{\varepsilon}_M = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_M + \frac{1}{\mu_1}\sigma_M,$$

navíc platí $\varepsilon_M = \varepsilon_{D_2} =: \varepsilon, \sigma = \sigma_M + \sigma_{D_2}$. Tedy

$$\frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\mu_1}\sigma = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_{D_2} + \frac{1}{\mu_1}\sigma_{D_2} + \dot{\varepsilon}_M =$$

$$= \frac{\mu_2}{E}\ddot{\varepsilon}_{D_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\dot{\varepsilon}_{D_2} + \dot{\varepsilon}_M = \frac{\mu_2}{E}\ddot{\varepsilon} + \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\dot{\varepsilon}$$

Přenásobíme μ_1

$$\sigma + \frac{\mu_1}{E}\dot{\sigma} = \frac{\mu_1\mu_2}{E}\ddot{\varepsilon} + (\mu_1 + \mu_2)\,\dot{\varepsilon}$$

„Převedeme do 3D“ s použitím Oldroydovy derivace $\overset{\triangledown}{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} + \frac{\mu_1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{S}} = (\mu_1 + \mu_2)\mathbf{D} + \frac{\mu_1\mu_2}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{D}}$$

přepíšeme do tvaru podobného Stokesovému vztahu

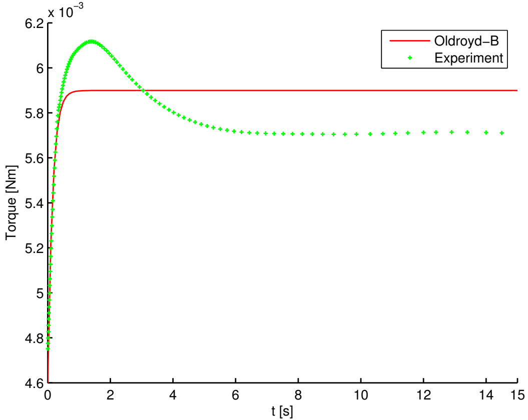
$$\mathbf{S} = \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$

a dosadíme

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = 2\frac{\mu_1}{E}\mathbf{D}$$

Pokusíme-li se použít (lineární) Oldroyd-B model (tři parametry) pro nafitování tohoto experimentu, dostaneme



Přehled viskoelastických modelů (které znám)

Maxwellův model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{A}$$
$$\frac{1}{\mu}\mathbf{A} + \frac{1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = 2\mathbf{D}.$$

Oldroyd-B model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \frac{2\mu_1}{E}\mathbf{D}.$$

Johnson-Segalman model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{E}\left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}\right)_a = \frac{2\mu_1}{E}\mathbf{D} \quad a \in [-1, 1].$$

Gieseků v model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} + \alpha\mathbf{A}^2 = \frac{2\mu_1}{E}\mathbf{D}.$$

Phan-Thien-Tanner model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} + \alpha(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\mathbf{A} = \frac{2\mu_1}{E}\mathbf{D}.$$

Phan-Thien exponenciální model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}$$

$$\frac{\mu_1}{E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} + \exp\left(\alpha(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\right)\mathbf{A} = \frac{2\mu_1}{E}\mathbf{D}.$$

Burgersův model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{D} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \lambda_1 \overset{\triangledown}{\mathbf{A}} + \lambda_2 \overset{\triangledown\triangledown}{\mathbf{A}} = \mu_1 \mathbf{D}.$$

TD kompatibilní model (2000)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{D} + E\mathbf{B}^d$$

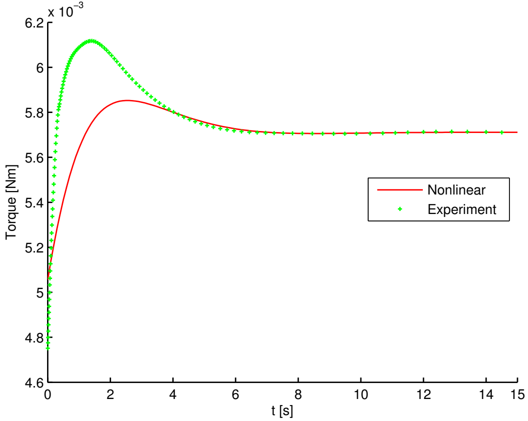
$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}} = -\frac{2E}{\mu_1}\left(\mathbf{B} - \frac{3}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)}\mathbf{I}\right).$$

TD kompatibilní model (2012)

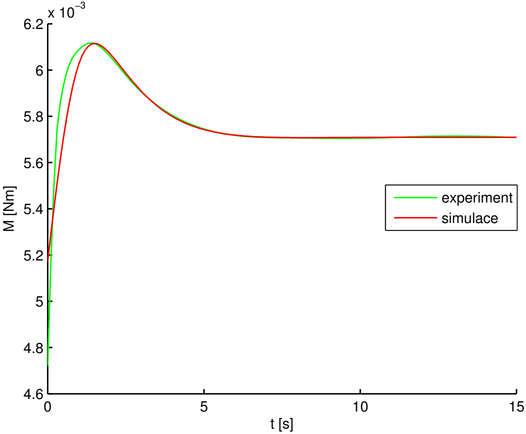
$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{D} + E\mathbf{B}^d$$

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}} = -\frac{2E}{\mu_1}\mathbf{B}\mathbf{B}^d.$$

Fitování experimentu pomocí TD kompatibilního modelu (2000) (tři parametry)



Fitování experimentu pomocí TD kompatibilního modelu (2012) (tři parametry)



Termodynamicky kompatibilní viskoelastický model (Rajagopal, Srinivasa 2000)

Model musí ihned od začátku splňovat i druhý zákon termodynamiky.
Odvození založeno na dvou pojmech:

- princip maximalizace rychlosti produkce entropie
- přirozená konfigurace

Princip rychlosti produkce entropie, nestlačitelná Newtonská tekutina

Entropie η termodynamická veličina, funkcí stavových veličin – vnitřní energie e, hustoty ρ... V jistém smyslu rostoucí. Platí

$$\frac{\partial \eta}{\partial e} > 0, \text{ označme teplotu } \theta := \frac{\partial e}{\partial \eta}.$$

Bilance hmoty

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, (\dot{\rho} = 0)$$

Bilance pro vnitřní energii

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

Invertujeme a víme $e = e(\eta, \rho)$

$$\rho \dot{e} = \rho \frac{\partial e}{\partial \eta} \dot{\eta} + \rho \frac{\partial e}{\partial \rho} \dot{\rho} = \rho \theta \dot{\eta}$$

Srovnáme

$$\rho\theta\dot{\eta} + \operatorname{div}\mathbf{q} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}$$

a dostáváme bilanci entropie

$$\rho\dot{\eta} + \underbrace{\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)}_{\text{tok entropie}} = \underbrace{\frac{1}{\theta}\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}\cdot\nabla\theta}{\theta}\right)}_{\text{produkce entropie }\xi}$$

Druhý zákon termodynamiky je ekvivalentní $\xi \geq 0$. Dále uvažujeme konstantní teplotu $\theta =$konst., pak $\xi = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}$.

Namísto volby konstitutivního vztahu pro celý tenzor napětí $\mathbf{T}$, volíme konstitutivní vztah jen pro rychlost produkce entropie ξ.

Pro Newtonskou tekutinu volíme

$$\tilde{\xi} = 2\mu|\mathbf{D}|^2$$

Mnoho možností, jak zvolit $\xi = \tilde{\xi}$,
použijeme *princip maximalizace rychlosti produkce entropie*:

Maximalizujeme $\tilde{\xi}$ přes všechny $\mathbf{D}$, aby bylo splněno $\xi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$,
navíc požadujeme nestlačitelnost $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$.

Použijeme Lagrangeovy multiplikátory a definujeme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{D}) = \tilde{\xi} + \lambda_1(\tilde{\xi} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) + \lambda_2 \operatorname{tr} \mathbf{D}.$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{I}.$$

Dosadíme za derivaci $\partial\tilde{\xi}/\partial\mathbf{D}$

$$4\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu\mathbf{D} = \mathbf{T} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I},$$

skalárně vynásobíme s $\mathbf{D}$ a eliminujeme λ_1

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\left(\mathbf{T} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{D}}{2\mu|\mathbf{D}|^2} = \frac{\xi}{\tilde{\xi}} = 1$$

a získáme

$$2\mu\mathbf{D} = \mathbf{T} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}.$$

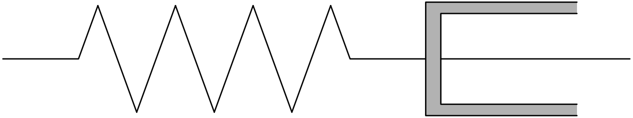
Vezmeme stopu této rovnice a eliminujeme λ_2/λ_1

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$

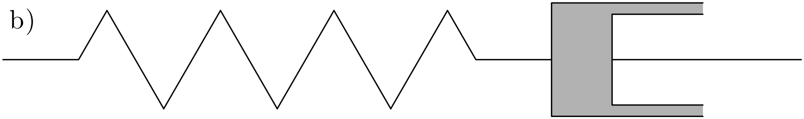
Podobně budeme postupovat i při odvozování viskoelastického modelu, nejprve potřebujeme vědět, co je přirozená konfigurace.

Přirozená konfigurace

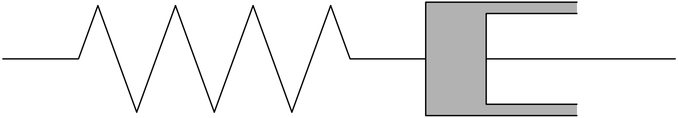
a)

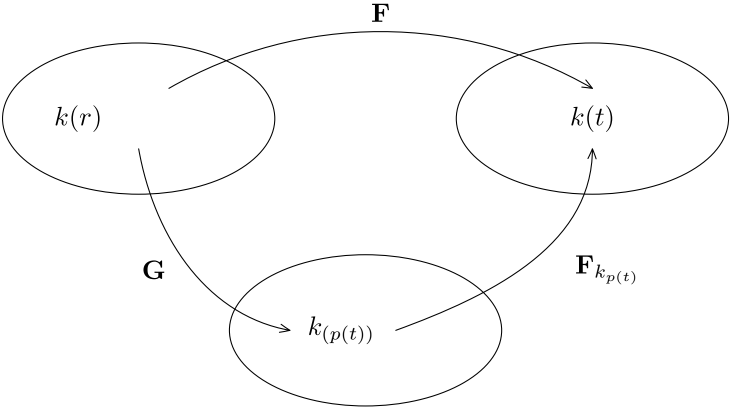


b)



c)





$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{L}_{k_{p(t)}} = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}, \mathbf{D}_{k_{p(t)}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_{k_{p(t)}} + \mathbf{L}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{F}_{k_{p(t)}} = \mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}, \mathbf{B}_{k_{p(t)}} = \mathbf{F}_{k_{p(t)}}\mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}}, \mathbf{C}_{k_{p(t)}} = \mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_{k_{p(t)}}$$

Odvození viskoelastického modelu

Energie elastické vazby schovaná v přirozené konfiguraci, vnitřní energie pro neo-Hookeův materiál

$$e(\eta, \rho, \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}) = e_0(\eta, \rho) + \frac{E}{2\rho}(\operatorname{tr} \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} - 3).$$

Odvoďme bilanci entropie, jako dříve použijeme bilanci pro vnitřní energii pro nestlačitelný materiál

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

a derivujme

$$\rho \dot{e} = \rho \frac{\partial e}{\partial \eta} \dot{\eta} + \rho \frac{\partial e}{\partial \rho} \dot{\rho} + \rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}} \dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = \rho \theta \dot{\eta} + \frac{E}{2} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}}$$

Dostáváme bilanci entropie

$$\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\underbrace{\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}\cdot\nabla\theta}{\theta} - \frac{E}{2}\operatorname{tr}\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}}\right)}_{\xi}$$

Třeba spočítat derivaci $\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}$

$$\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = \overline{\mathbf{F}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{\kappa_{p(t)}}}^{\cdot} = \dot{\mathbf{F}}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{\kappa_{p(t)}} + \mathbf{F}_{\kappa_{p(t)}}\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}_{\kappa_{p(t)}}$$

a platí

$$\dot{\mathbf{F}}_{\kappa_{p(t)}} = \overline{\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}}^{\cdot} = \underbrace{\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{L}}\underbrace{\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}}_{\mathbf{F}_{\kappa_{p(t)}}} - \underbrace{\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}}_{\mathbf{F}_{\kappa_{p(t)}}}\underbrace{\dot{\mathbf{G}}\mathbf{G}^{-1}}_{\mathbf{L}_{\kappa_{p(t)}}}$$

a tedy

$$\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = \mathbf{L}\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} + \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{F}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{\kappa_{p(t)}}.$$

Pak rychlost produkce entropie splňuje (při konst. teplotě)

$$\xi = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \frac{E}{2}\operatorname{tr}\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = \left(\mathbf{T} - E\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\right)\cdot\mathbf{D} + E\mathbf{C}_{\kappa_{p(t)}}\cdot\mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}$$

Volíme různé konstitutivní vztahy pro rychlost produkce entropie $\tilde{\xi}$, článek Rajagopal, Srinivasa 2000 a Rajagopal, Málek 2005:

$$\tilde{\xi} = \mu_2 |\mathbf{D}|^2 + \mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{C}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{k_{p(t)}}$$

a použijeme *princip maximalizace rychlosti produkce entropie*:

Maximalizujeme $\tilde{\xi}$ přes všechny $\mathbf{D}, \mathbf{D}_{k_{p(t)}}$, aby byla splněna vazba pro ξ, navíc požadujeme nestlačitelnost proudění $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$ a nestlačitelnost elastické vazby $\operatorname{tr} \mathbf{D}_{k_{p(t)}} = 0$.

Použijeme Lagrangeovy multiplikátory a definujeme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{D}, \mathbf{D}_{k_{p(t)}}) = \tilde{\xi} + \lambda_1 \left(\tilde{\xi} - \left(\mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} \right) \cdot \mathbf{D} - E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \right) + \lambda_2 \operatorname{tr} \mathbf{D} + \lambda_3 \operatorname{tr} \mathbf{D}_{k_{p(t)}}.$$

Maximalizujeme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

Dosadíme za derivace $\tilde{\xi}$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu_2\mathbf{D} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{1}$$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu_1\mathbf{D}_{k_{p(t)}}\mathbf{C}_{k_{p(t)}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}. \tag{2}$$

Eliminujeme $(1+\lambda_1)/\lambda_1$ tak, že provedeme $(7)\cdot\mathbf{D}+(8)\cdot\mathbf{D}_{k_{p(t)}}$:

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\left(\mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{D} + \left(E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{D}_{k_{p(t)}}}{\mu_2\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} + \mu_1\mathbf{D}_{k_{p(t)}}\mathbf{C}_{k_{p(t)}}\cdot\mathbf{D}_{k_{p(t)}}}$$

$$= \frac{\left(\mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}}\right)\cdot\mathbf{D} + E\mathbf{C}_{k_{p(t)}}\cdot\mathbf{D}_{k_{p(t)}}}{\mu_2\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} + \mu_1\mathbf{D}_{k_{p(t)}}\mathbf{C}_{k_{p(t)}}\cdot\mathbf{D}_{k_{p(t)}}} = \frac{\xi}{\tilde{\xi}} = 1$$

$$\mu_2 \mathbf{D} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{3}$$

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{C}_{k_{p(t)}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{4}$$

Z (3) dostaneme vztah pro tenzor napětí (vezmeme stopu rovnice)

$$\mathbf{T} = \underbrace{-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})}_{p}\mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{D} + E\underbrace{\left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}}$$

Pro eliminaci λ_3/λ_1 v (4) postupujeme dvěma způsoby:

1. článek Rajagopal, Srinivasa 2000
2. článek Málek, Rajagopal 2005

RS2000, eliminace 1: Násobíme

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{C}_{k_{p(t)}} = E \mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \mathbf{I}$$

zprava $\mathbf{C}_{k_{p(t)}}^{-1}$ a bereme stopu

$$0 = 3E + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \operatorname{tr}\left(\mathbf{C}_{k_{p(t)}}^{-1}\right).$$

Tedy

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = -\frac{3E}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{C}_{k_{p(t)}}^{-1}\right)} = -\frac{3E}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}}^{-1}\right)}.$$

Dostáváme

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{C}_{k_{p(t)}} = E \left(\mathbf{C}_{k_{p(t)}} - \frac{3}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}}^{-1}\right)} \mathbf{I} \right)$$

Rozepíšeme $\mathbf{C}_{k_{p(t)}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}}$

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}} = E \left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}} - \frac{3}{\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{k_{p(t)}}\right)} \mathbf{I} \right)$$

Násobíme zleva $\mathbf{F}_{k_{p(t)}}$ a zprava $\mathbf{F}^{-1}_{k_{p(t)}}$ a získáme

$$\mu_1 \mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} = E \left(\mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} - \frac{3}{\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{k_{p(t)}}\right)} \mathbf{I} \right)$$

víme, že $\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = -2 \mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}}$, dosadíme

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = -\frac{2E}{\mu_1} \left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{3}{\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{k_{p(t)}}\right)} \mathbf{I} \right).$$

MR2005, eliminace 2: Vezmeme stopu

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{C}_{k_{p(t)}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

a eliminujeme λ_3/λ_1, dostáváme

$$\mu_1 \left(\mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{C}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\mathbf{D}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{C}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} \right) = E \left(\mathbf{C}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{C}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} \right)$$

Opět násobme tuto rovnici zleva $\mathbf{F}_{k_{p(t)}}$ a zprava $\mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{-1}$

$$\mu_1 \left(\mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}(\mathbf{D}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{C}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} \right) = E \left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} \right)$$

Nyní je třeba si všimnout toho, jak vypadá horní konvektivní Oldroydova derivace deviatorické části $\mathbf{B}_{k_{p(t)}}$.

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}{}^{d}_{k_{p(t)}} = \overset{\triangledown}{\overline{\left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I}\right)}} = \overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\dot{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\overset{\triangledown}{\mathbf{I}} =$$

$$= -2\mathbf{F}_{k_{p(t)}}\mathbf{D}_{k_{p(t)}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{L}\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} +$$

$$+ \frac{2}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}}\mathbf{F}_{k_{p(t)}}\mathbf{D}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} + \frac{2}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{D} =$$

$$= -2\mathbf{F}_{k_{p(t)}}\mathbf{D}_{k_{p(t)}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} - \frac{2}{3}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} + \frac{2}{3}(\mathbf{C}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{k_{p(t)}})\mathbf{I} + \frac{2}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{D}.$$

a dosaďme výsledek do

$$\mu_1\left(\mathbf{F}_{k_{p(t)}}\mathbf{D}_{k_{p(t)}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\mathbf{D}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{C}_{k_{p(t)}})\mathbf{I}\right) = E\left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I}\right),$$

máme

$$\mu_1\left(-\frac{1}{2}\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}{}^{d}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}^{d}_{k_{p(t)}}\right)\mathbf{I} + \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{D}\right) = E\mathbf{B}^{d}_{k_{p(t)}}.$$

Dostali jsme rovnici pro $\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}$

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{2} \overset{\triangledown}{\mathbf{B}}{}^d_{\kappa_{p(t)}} - \frac{1}{3} \left(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^d_{\kappa_{p(t)}} \right) \mathbf{I} + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}) \mathbf{D} \right) = E \mathbf{B}^d_{\kappa_{p(t)}}.$$

Stopa této rovnice je rovna nule, ve třech rozměrech máme tedy pět rovnic!

Ovšem potřebujeme mít šest rovnic pro šest neznámých $\mathbf{B}^d_{\kappa_{p(t)}}$ a $\operatorname{tr} \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}$.

Přidáme šestou rovnici – rovnici nestlačitelnosti elastické odezvy

$$1 = \det(\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}) = \det \left(\mathbf{B}^d_{\kappa_{p(t)}} + \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}) \mathbf{I} \right).$$

Shrňme, dva odvozené modely, Cauchyho tenzor napětí je ve tvaru

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}$$

a $\mathbf{B}_{k_{p(t)}}$ splňuje diferenciální rovnici

verze RS2000

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = -\frac{2E}{\mu_1}\left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{3}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{k_{p(t)}}\right)}\mathbf{I}\right) \tag{5}$$

verze MR2005

$$\mu_1\left(-\frac{1}{2}\overset{\triangledown}{\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}} - \frac{1}{3}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}\right)\mathbf{I} + \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{D}\right) = E\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}},$$

$$\det\left(\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}} + \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{k_{p(t)}})\mathbf{I}\right) = 1. \tag{6}$$

- Algebraickými manipulacemi lze ukázat, že oba modely jsou si ekvivalentní.
- Ukážeme jen, že model verze RS2000 automaticky splňuje $\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}(x,t) = 1$, pokud platí počáteční podmínka $\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}(x, t=0) = 1$.

$$\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} - (\nabla \mathbf{v})\,\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} - \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\,(\nabla \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = -\frac{2E}{\mu_1}\left(\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} - \frac{3}{\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{\kappa_{p(t)}}\right)}\mathbf{I}\right)$$

Počítejme

$$\overline{\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}}^{\,\cdot} = (\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\,\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{B}^{-1}_{\kappa_{p(t)}}\right) = 2(\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}$$
$$- \frac{2E}{\mu_1}(\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\left(\mathrm{tr}\,(\mathbf{I}) - 3\frac{\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{\kappa_{p(t)}}\right)}{\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{\kappa_{p(t)}}\right)}\right) = 0$$

Linerizace modelu

Ukažme, že linearizací (5)

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = -\frac{2E}{\mu_1}\left(\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} - \frac{3}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}_{\kappa_{p(t)}}\right)}\mathbf{I}\right)$$

získáme Oldroyd-B model. Uvažujme $\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}$ ve tvaru

$$\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} = \mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad \|\mathbf{A}\| = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Dosaďme do nestlačitelnosti elastické odezvy a proveďme Taylorův rozvoj determinantu

$$1 = \det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} = \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 1 + \operatorname{tr}\mathbf{A} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \operatorname{tr}\mathbf{A} = O(\varepsilon^2).$$

Dále proveďme Taylorův rozvoj $\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}^{-1}$

$$\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{A} + O(\varepsilon^2),$$

z čehož plyne

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}^{-1}\right) = 3 + O(\varepsilon^2).$$

Dosazením do (5) získáváme

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{I}} + \overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = -\frac{2E}{\mu_1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A} - \underbrace{\frac{3}{3 + O(\varepsilon^2)}}_{1 - O(\varepsilon^2)}\mathbf{I}\right)$$

Protože $\overset{\triangledown}{\mathbf{I}} = -2\mathbf{D}$, získáváme Oldroyd-B model

$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{2E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \frac{\mu_1}{E}\mathbf{D} + O(\varepsilon^2)\mathbf{I}.$$

Model s čistě kvadratickou disipací

Odvoďme model, kde rychlost produkce entropie je dána konstitutivním vztahem

$$\tilde{\xi} = \mu_2 |\mathbf{D}|^2 + \mu_1 |\mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}|^2$$

a opět použijeme *princip maximalizace rychlosti produkce entropie* za podmínek nestlačitelností $\operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{tr}\mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}} = 0$ a splnění vazby pro ξ (pro elastickou část opět používáme neo-Hookeův zákon)

$$\xi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{E}{2} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = \left(\mathbf{T} - E\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\right) \cdot \mathbf{D} + E\mathbf{C}_{\kappa_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}$$

Použijeme Lagrangeovy multiplikátory a definujeme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{D}, \mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}) = \tilde{\xi} + \lambda_1 \left(\tilde{\xi} - \left(\mathbf{T} - E\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\right) \cdot \mathbf{D} - E\mathbf{C}_{\kappa_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}\right) + \lambda_2 \operatorname{tr}\mathbf{D} + \lambda_3 \operatorname{tr}\mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}}.$$

Maximalizujeme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

Dosadíme za derivace $\tilde{\xi}$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu_2\mathbf{D} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{7}$$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu_1\mathbf{D}_{k_{p(t)}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}. \tag{8}$$

Maximalizujeme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

Dosadíme za derivace $\tilde{\xi}$ a eliminujeme $(1+\lambda_1)/\lambda_1$

$$\mu_2 \mathbf{D} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{7}$$

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} = E\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}. \tag{8}$$

$$\mu_2 \mathbf{D} = \mathbf{T} - E\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{9}$$

$$\mu_1 \mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}} = E\mathbf{C}_{\kappa_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I} \tag{10}$$

Z (9) dostaneme vztah pro tenzor napětí (vezmeme stopu rovnice)

$$\mathbf{T} = -\underbrace{\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T})}_{p}\mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{D} + E\underbrace{\left(\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{B}^d_{\kappa_{p(t)}}}.$$

Z (10) vezmeme stopu a eliminujeme λ_3/λ_1

$$\mu_1 \mathbf{D}_{\kappa_{p(t)}} = E\left(\mathbf{C}_{\kappa_{p(t)}} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{C}_{\kappa_{p(t)}})\mathbf{I}\right)$$

Rozepíšeme $\mathbf{C}_{k_{p(t)}} = \mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}}$ a nahradíme $\operatorname{tr} \mathbf{B}_{k_{p(t)}} = \operatorname{tr} \mathbf{C}_{k_{p(t)}}$

$$\mu_1 \mathbf{D}_{k_{p(t)}} = E \left(\mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{k_{p(t)}}) \mathbf{I} \right) .$$

Vynásobíme zleva $\mathbf{F}_{k_{p(t)}}$ a zprava $\mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}}$ a dostáváme

$$\mu_1 \underbrace{\mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{D}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}}}_{-\frac{1}{2} \overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}}} = E \Bigg(\underbrace{\mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}} \mathbf{F}_{k_{p(t)}}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{B}_{k_{p(t)}}^2} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{k_{p(t)}}) \mathbf{B}_{k_{p(t)}} \Bigg) .$$

Získáváme model

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = - \frac{2E}{\mu_1} \mathbf{B}_{k_{p(t)}} \left(\mathbf{B}_{k_{p(t)}} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{B}_{k_{p(t)}}) \mathbf{I} \right) .$$

Získali jsme model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}},$$
$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = -\frac{2E}{\mu_1}\mathbf{B}_{k_{p(t)}}\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}.$$

- elegantnější, snadněji implementovatelný model
- schopný stejně kvalitně zachytit experimenty
- linearizuje se na Oldroyd-B model
- vhodnější pro matematickou analýzu

Opět lze ukázat, že $\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}(x,t) = 1$, pokud platí počáteční podmínka $\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}(x, t=0) = 1$.

$$\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} - (\nabla \mathbf{v})\,\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} - \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\,(\nabla \mathbf{v})^{\mathrm{T}} = -\frac{2E}{\mu_1}\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{B}^{d}_{\kappa_{p(t)}}.$$

Počítejme

$$\overline{\det \dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}}} = (\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\,\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{B}^{-1}_{\kappa_{p(t)}}\right) = 2(\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D} \\ - \frac{2E}{\mu_1}(\det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}})\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{d}_{\kappa_{p(t)}}\right) = 0.$$

Linerizace modelu

Ukažme, že linearizací modelu získaného z čistě kvadratické disipacce

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{\kappa_{p(t)}} = -\frac{2E}{\mu_1}\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}\mathbf{B}^d_{\kappa_{p(t)}}$$

získáme Oldroyd-B model. Uvažujme $\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}}$ ve tvaru

$$\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} = \mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad \|\mathbf{A}\| = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Dosaďme do nestlačitelnosti elastické odezvy a proveďme Taylorův rozvoj determinantu

$$1 = \det \mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} = \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 1 + \operatorname{tr}\mathbf{A} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \operatorname{tr}\mathbf{A} = O(\varepsilon^2)$$

a tedy

$$\operatorname{tr}\mathbf{B}_{\kappa_{p(t)}} = \operatorname{tr}(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 3 + O(\varepsilon^2).$$

Dosazením do

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = -\frac{2E}{\mu_1}\mathbf{B}_{k_{p(t)}}\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}}$$

získáváme

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{I}} + \overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = -\frac{2E}{\mu_1}(\mathbf{I}+\mathbf{A})\Big(\underbrace{\mathbf{I}+\mathbf{A}-\frac{1}{3}(3+O(\varepsilon^2))\mathbf{I}}_{\mathbf{A}+O(\varepsilon^2)\mathbf{I}}\Big).$$

Protože $\overset{\triangledown}{\mathbf{I}} = -2\mathbf{D}$, získáváme Oldroyd-B model

$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{2E}\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \frac{\mu_1}{E}\mathbf{D} + O(\varepsilon^2)(\mathbf{I}+\mathbf{A}).$$

Nestlačitelný viskoelastický model s teplotou (àla Karra, Rajagopal 2010)

Uvažujeme nekonstantní teplotu θ (modul pružnosti $E = E(\theta)$), pak rychlost produkce entropie splňuje vazbu

$$\xi = \left(\mathbf{T} - E(\theta)\mathbf{B}_{k_{p(t)}}\right) \cdot \mathbf{D} + E(\theta)\mathbf{C}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{k_{p(t)}} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla\theta}{\theta}. \qquad (11)$$

Dále volme konstitutivní vztah pro rychlost produkce entropie

$$\tilde{\xi} = \mu_2(\theta)|\mathbf{D}|^2 + \mu_1(\theta)|\mathbf{D}_{k_{p(t)}}|^2 + k(\theta)\frac{|\nabla\theta|^2}{\theta}.$$

Maximalizujeme $\tilde{\xi}$ při splnění (11) a vazbě $\operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{tr}\mathbf{D}_{k_{p(t)}} = 0$. Použijeme Lagrangeovy multiplikátory a definujeme Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{D}, \mathbf{D}_{k_{p(t)}}, \nabla\theta) = \tilde{\xi} + \lambda_2 \operatorname{tr}\mathbf{D} + \lambda_3 \operatorname{tr}\mathbf{D}_{k_{p(t)}} +$$
$$\lambda_1 \left(\tilde{\xi} - \left(\mathbf{T} - E(\theta)\mathbf{B}_{k_{p(t)}}\right) \cdot \mathbf{D} - E(\theta)\mathbf{C}_{k_{p(t)}} \cdot \mathbf{D}_{k_{p(t)}} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla\theta}{\theta}\right)$$

Maximalizujeme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T} - E(\theta)\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} = E(\theta)\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \nabla\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \nabla\theta} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}$$

Dosadíme za derivace $\tilde{\xi}$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu_2(\theta)\mathbf{D} = \mathbf{T} - E(\theta)\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\mu_1(\theta)\mathbf{D}_{k_{p(t)}} = E(\theta)\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$2\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}k(\theta)\frac{\nabla\theta}{\theta} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}.$$

Maximalizujeme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T} - E(\theta)\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{D}_{k_{p(t)}}} = E(\theta)\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \nabla\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \nabla\theta} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}$$

Dosadíme za derivace $\tilde{\xi}$ a eliminujeme $(1+\lambda_1)/\lambda_1$

$$\mu_2(\theta)\mathbf{D} = \mathbf{T} - E(\theta)\mathbf{B}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$\mu_1(\theta)\mathbf{D}_{k_{p(t)}} = E(\theta)\mathbf{C}_{k_{p(t)}} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{I}$$

$$k(\theta)\frac{\nabla\theta}{\theta} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}.$$

Stejně jako v minulém případě dostaneme model

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu_2(\theta)\mathbf{D} + E(\theta)\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}},$$
$$\overset{\triangledown}{\mathbf{B}}_{k_{p(t)}} = -\frac{2E(\theta)}{\mu_1(\theta)}\mathbf{B}_{k_{p(t)}}\mathbf{B}^d_{k_{p(t)}},$$
$$\mathbf{q} = -k(\theta)\nabla\theta.$$

Lze přidat stlačitelnost, není třeba požadovat $\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$. Jinou volbou $\tilde{\xi}$ lze také přidat závislost μ_2 na $|\mathbf{D}|, \operatorname{tr}\mathbf{T}$ a získat komplikovanější diferenciální rovnici pro $\mathbf{B}_{k_{p(t)}}$.

Konec!

Vlastnosti Johnson-Segalmanova modelu

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} + \frac{\mu_1}{E}\left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}\right)_a = \frac{2\mu_1}{E}\mathbf{D},$$

$$\left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}\right)_a = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{W}) + a(\mathbf{D}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{D}), \quad a \in [-1, 1],$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right).$$

Uvažujme stacionární 2D proudění, $\mathbf{v} = (u(y), 0)$, pak platí

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & u' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u' \\ u' & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{W} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u' \\ -u' & 0 \end{pmatrix}.$$

Při této volbě rychlosti $\mathbf{v}$ a v případě stacionárního řešení platí

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Dále, označíme-li $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, pak platí

$$
\begin{aligned}
\mathbf{DA} + \mathbf{AD} =& u' \begin{pmatrix} A_{12} & \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) \\ \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) & A_{12} \end{pmatrix} \\
\mathbf{WA} - \mathbf{AW} =& u' \begin{pmatrix} A_{12} & \frac{1}{2}(A_{22} - A_{11}) \\ \frac{1}{2}(A_{22} - A_{11}) & -A_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Potom lze vyjádřit objektivní derivaci

$$
\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_a = -(\mathbf{WA} - \mathbf{AW}) + a(\mathbf{DA} + \mathbf{AD}) =
$$

$$
u' \begin{pmatrix} (a-1)A_{12} & \frac{1}{2}\left(a(A_{11} + A_{22}) + (A_{11} - A_{22})\right) \\ \frac{1}{2}\left(a(A_{11} + A_{22}) + (A_{11} - A_{22})\right) & (a+1)A_{12} \end{pmatrix}.
$$

Rovnici pro **A** si napíšeme ve složkách

$$
\begin{aligned}
A_{11} + \frac{\mu_1}{E} u'(a-1) A_{12} &= 0,\\
A_{22} + \frac{\mu_1}{E} u'(a+1) A_{12} &= 0,\\
A_{12} + \frac{\mu_1}{2E} u' \left(a(A_{11} + A_{22}) + (A_{11} - A_{22}) \right) &= \frac{\mu_1}{E} u'.
\end{aligned}
$$

Řešením je

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{\frac{\mu_1}{E} u'}{1 + \left(\frac{\mu_1}{E}\right)^2 (u')^2 (1 - a^2)},\\
A_{11} - A_{22} &= 2 \frac{\mu_1}{E} u' A_{12}.
\end{aligned}
$$

Pro tenzor napětí pak platí

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu_2\mathbf{D} + E\mathbf{A}.$$

Konkrétně pro T_{12} platí

$$T_{12} = \mu_2 u' + \frac{\mu_1 u'}{1 + \left(\frac{\mu_1}{E}\right)^2 (u')^2(1 - a^2)}.$$

Zobecněná viskozita je tedy rovna

$$\tilde{\mu}(u') = \frac{T_{12}}{u'} = \mu_2 + \frac{\mu_1}{1 + \left(\frac{\mu_1}{E}\right)^2 (u')^2(1 - a^2)}.$$

Pro $a \neq \pm 1$ se chová jako shear-thinning model

$$\tilde{\mu}(|\mathbf{D}|) = \mu(1 + |\mathbf{D}|^2)^{-1}.$$

Pro $a = \pm 1$ je zobecněná viskozita konstantní

$$\tilde{\mu}(|\mathbf{D}|) = \frac{T_{12}}{u'} = \mu_1 + \mu_2.$$

Dále model splňuje nenulový rozdíl normálových napětí

$$T_{11} - T_{22} = E(A_{11} - A_{22}) = 2\mu_1 u' A_{12} = \frac{2\dfrac{(\mu_1 u')^2}{E}}{1 + \left(\dfrac{\mu_1}{E}\right)^2 (u')^2 (1 - a^2)}.$$