Buckinghamův Π-teorém

(*viz Barenblatt, Scaling, 2003*)

Formalizace rozměrové analýzy („výsledné jednotky na obou stranách musí souhlasit“).

Rozměr fyzikální veličiny

Mějme nějakou třídu jednotek, například $[(kg, m, s)]$. [1] Nechť fyzikální veličina $\boldsymbol{f}$ nabývá v těchto jednotkách hodnoty x_f. Přeškálujme jednotky nějakými reálnými čísly, například $(1/M, 1/L, 1/T)$: $(kg, m, s) -> (1/M\ kg, 1/L\ m, 1/T\ s)$. Potom $x_f \to R(M, L, T)x_f = M^\alpha L^\beta T^\gamma \times x_f$. [2] Funkce $R(M, L, T)$ se nazývá rozměrová funkce, nebo jen **rozměr $\boldsymbol{x_f}$**. Značí se také $[x_f]$.

Např. pokud je $\boldsymbol{f}$ hybnost, tak se její hodnota při škálování jednotek SI bude transformovat jako $x_f \to M^1 L^1 T^{-1} \times x_f$, tj. $[x_f] = M^1 L^1 T^{-1}$.

Kdybychom zvolili jinou třídu jednotek, třeba [(kg,m,m/s)], tak by $\boldsymbol{f}$ měla jiný rozměr. *Například pro hybnost by platilo $[x_f] = M^1 V^1$.*

Π-teorém

Nechť y je funkce $k + n$ proměnných $a_1, \dots, a_k, b_1 \dots b_n$:

$$y := f(a_1, \dots a_k, b_1, \dots b_n), \tag{1}$$

kde parametry $a_1 \dots a_k$ mají nezávislé *fyzikální* rozměry (např. $\{M, L, T\}$) a rozměry závislé veličiny y a parametrů $b_1, \dots b_n$ se dají vyjádřit jako součiny rozměrů $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$: $[y] = [a_1]^{\alpha_1}[a_2]^{\alpha_2} \dots [\alpha_k]^{\alpha_k}$, $[b_i] = [a_1]^{\beta_1^i} \dots [a_k]^{\beta_k^i}$, $\alpha_i, \beta_i^j \in R$.

Definujme si bezrozměrné veličiny

$$\Pi = \frac{y}{a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k}},$$

$$\Pi_i = \frac{b_i}{a_1^{\beta_1^i} \dots a_k^{\beta_k^i}}. \tag{2}$$

Potom $\exists$ funkce Φ $\boldsymbol{n}$ proměnných, taková, že platí:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots \Pi_n)\ . \tag{3}$$

Jinými slovy vztah *(1)* se dá přepsat jako vztah mezi $n + 1$ bezrozměrnými veličinami.

---

[1] Tj. třída, do které patří systém jednotek (kg,m,s). Dva systémy jednotek patří do stejné třídy, pokud se liší jen přeškálováním. Například $[(kg, m, s)] = [(g, cm, min)] \neq [(g, cm, cm/min)]$.

[2] Že se R dá vyjádřit jako mocninná funkce platí **pouze za jednoduchého, ale hlubokého předpokladu, že všechny systémy jednotek v dané třídě jsou si ekvivalentní**, tj. neexistuje žádná distingovaná volba jednotek.

Kombinací (1), (2) a (3) dostaneme

$$y = f(a_1, \dots a_k, b_1, \dots b_n) = a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k} \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_n) = a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k} \Phi\left(\frac{b_1}{a_1^{\beta_1^1} \dots a_k^{\beta_k^1}}, \dots, \frac{b_n}{a_1^{\beta_1^n} \dots a_k^{\beta_k^n}}\right). \qquad (4)$$

Návod na vytvoření funkční závislosti je tedy takový, že ve vztahu mezi rozměry y a a_i

$$[y] = [a_1]^{\alpha_1}[a_2]^{\alpha_2} \dots [\alpha_k]^{\alpha_k}$$

odstraníme hranaté závorky a přidáme obecnou funkci n bezrozměrných veličin Π_i.

Pokud je y bezrozměrné, tak $\alpha_i = 0 \ \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$ a vztah se zjednoduší ještě víc:

$$y = 1 \times \Phi(\Pi_1, \dots \Pi_n),$$

tj. bezrozměrné veličiny mohou záviset zase pouze na n (nezávislých) bezrozměrných kombinacích parametrů, $\Pi_1 \dots \Pi_n$.

Vztah 4) také říká, že jediná funkční závislost, kde mohou vystupovat jednotky s rozměrem, je součin mocninných funkcí. Například ve vztahu $y = e^x$ *musí x nutně být bezrozměrné.*

Heuristicky to lze chápat rozvojem e^x *do mocninné řady:* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$. Pokud by x mělo netriviální rozměr, tak by všechny členy na pravé straně měly jiné rozměry.

Příklady

Rychlost elastických vln v izotropním prostředí:

Předpokládejme závislost rychlosti vln na hustotě ρ a Laméových koeficientech μ a λ:

$$v = f(\rho, \mu, \lambda),$$

za veličiny s nezávislými rozměry můžeme zvolit třeba ρ a μ,

$$[\rho] = M/L^3, [\mu] = \frac{M \times L}{T^2 L^2}$$

V soustavě SI jsou rozměry v a λ závislé na $[\rho]$, $[\mu]$:

$$[v] = \frac{L}{T} = \left(\frac{L^3}{M} \times \frac{M \times L}{T^2 L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = [\rho]^{-\frac{1}{2}}[\mu]^{\frac{1}{2}},$$

$$[\lambda] = [\mu] = [\ \mu]^1 = [\rho]^0[\mu]^1.$$

Podle Π-teorému musí platit

$$v = \rho^{-\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\Phi\left(\frac{\lambda}{\rho^0\mu^1}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\Phi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\mu}\Phi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Tj. $\frac{v_v}{\sqrt{\mu}}$ musí ubývat s odmocninou ρ a jinak závisí jen na poměru $\frac{\lambda}{\mu}$.

Volba $\Phi(x) = \sqrt{x+2}$ dá rychlost *P-vln:* $v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$.

Volba $\Phi(x) = 1$ dá rychlost *S*-vln: $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Matematické kyvadlo

Chceme najít periodu θ, *předpokládejme* vztah

$$\theta = f(l, g, m),$$

Kde l je délka kyvadla, g je tíhové zrychlení a m je hmotnost závěsu.

Rozměry argumentů jsou $[l] = L,\ [g] = L/T^2$, $[m] = M$, všechny jsou nezávislé (v každé je nový rozměr navíc). Dimenze $[\theta] = T$ je závislá na $[l]$ a $[g]$, platí $[\theta] = [l]^{\frac{1}{2}}/[g]^{\frac{1}{2}} = [l]^{\frac{1}{2}}[g]^{-\frac{1}{2}}$.

Podle Π-teorému tedy musí platit

$$\theta = l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} \Phi(),$$

kde prázdná závorka naznačuje, že Φ je funkce nezávislá na jakémkoliv parametru (tedy konstanta, $\Phi() =: C$, protože všechny mají *nezávislé* rozměry, tedy v Π-teorému máme $n = 0$. Speciálně nemůže θ záviset na m).

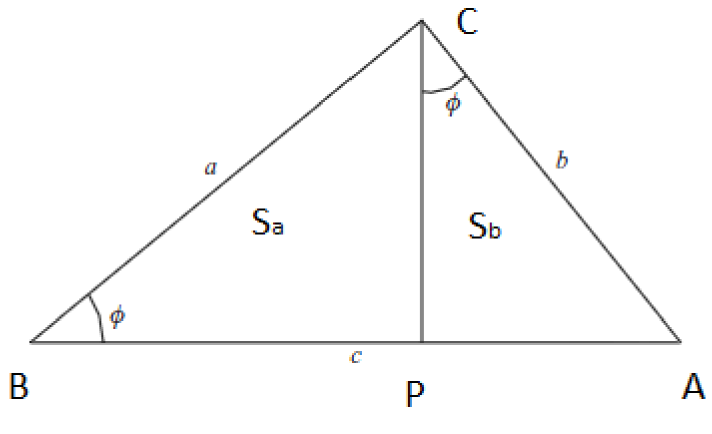
Máme proto

$$\theta = C\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Konstanta *C* $(= 2\pi)$ se z rozměrové analýzy nedá určit, stačí ale provést jediné měření θ pro dané (l, g).

Pythagorova věta

Pravoúhlý trojúhelník:



Obsah celého trojúhelníku, S_c, může záviset jen na ϕ a na c (tím je pravoúhlý ΔABC dle věty usu určen až na shodnost), máme tedy

$$S_c = f(c, \phi).$$

$$[c] = L, [\phi] = 1, [S_c] = L^2$$

Tj.

$$[S_c] = [c]^2$$

Dle Π- teorému musí platit:

$$S_c = c^2\Phi(\phi)$$

Aplikací stejné úvahy na pravoúhlé trojúhelníky ΔBPC a ΔACP dostaneme

$$S_a = a^2\Phi(\phi), S_b = b^2\Phi(\phi)$$

Ze vztahu

$$S_c = S_a + S_b$$

plyne

$$(a^2 + b^2)\Phi(\phi) = c^2\Phi(\phi),$$

tedy pro $\phi \neq 0$ (protože pak $\Phi(\phi) \neq 0$):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Výbuch atomové bomby

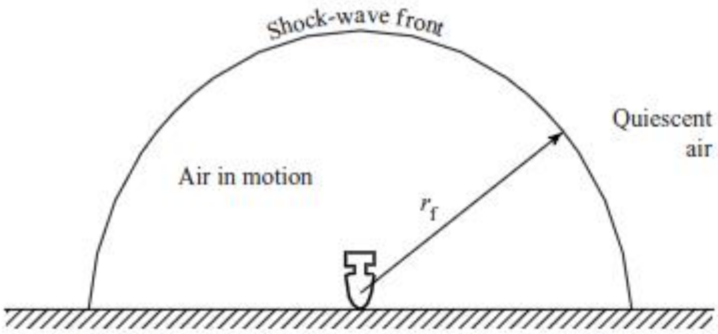


Figure 0.1. A very intense shock wave propagating in quiescent air.

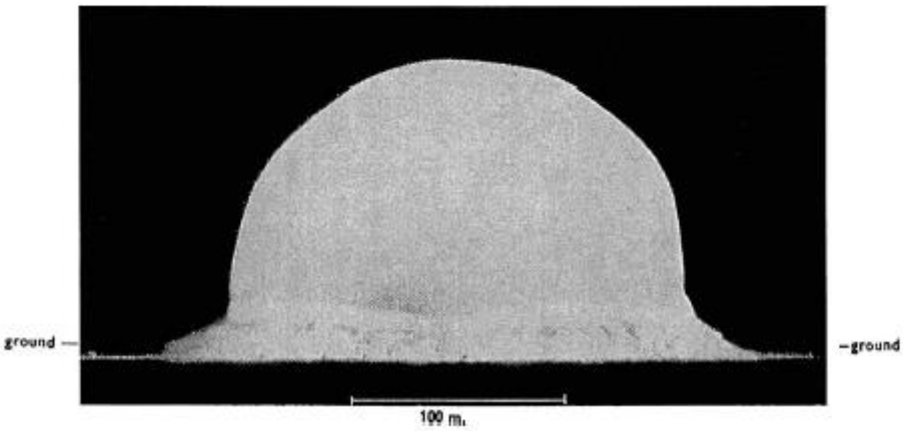


Figure 0.2. Photograph of the fireball of the atomic explosion in New Mexico at $t = 15$ ms, confirming in general the spherical symmetry of the gas motion (Taylor 1950b, 1963).

Úloha: Určit energii výbuchu v závislosti na čase a poloměru r_f tlakové vlny.

Předpoklad: Výbuch začíná z bodu (*bodový model*). r_f závisí na čase t od výbuchu, celkové energii E, počáteční hustotě vzduchu ρ_0, Poissonově konstantě plynu γ (předpoklad, že se na sledovaných časových škálách nemění, adiabatický děj). Vliv počátečního tlaku je zanedbán.

Nejprve budeme hledat závislost $r_f = f(E, t, \rho_0, \gamma)$.

Rozměry veličin jsou: $[r_f] = L, [t] = T, [E] = ML^2T^{-2}, [\rho_0] = ML^{-3}, [\gamma] = 1$.

Rozměry E, t, ρ_0 jsou nezávislé, γ je bezrozměrná, $[r_f] = L = [E]^{1/5}[t]^{2/5}[\rho_0]^{-1/5}$.

Podle Π teorému tedy musí platit:

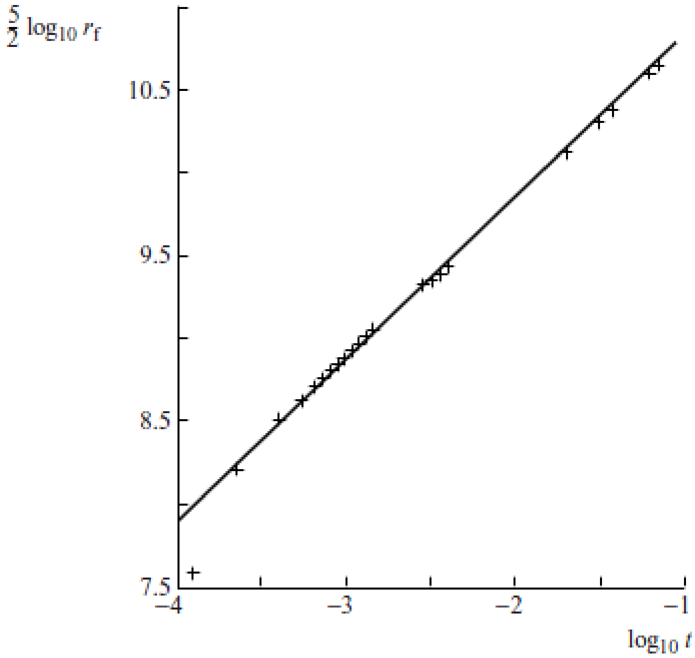
$$r_f = E^{1/5}t^{2/5}\rho_0^{-1/5} \times \Phi(\gamma) = \left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{1/5} \times \Phi(\gamma) \qquad (5)$$

Taylor použil použil 25 fotografií výbuchu bomby z testu Trinity z roku 1945, s časy od 0.1 ms-62 ms, a zjistil, že závislost r_f na t skutečně (na pozorované časové škále) odpovídá vztahu (5), viz obrázek níže.

Na základě odhadu $\Phi(\gamma)$ a ρ_0 pak určil E lineární regresí.

Přesné řešení problému poskytli nezávisle na sobě John von Neumann a Leonid Sedov.

Viz https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2011.562324.



Aplikace na rate-and-state zákony tření
http://geo.mff.cuni.cz/seismosoft/clanky/Hatano.GJI2015.pdf