

# Úvod do oceánského proudění

## Barotropní oceánický slapový model

David Einšpigel

# Obsah

- 1 Úvod
- 2 Rovnice proudění
- 3 Slapový model

# Co způsobuje proudění v oceánech?

- vyrovnávání rozdílů v teplotě, salinitě, tlaku,  $\rho = \rho(p, T, S)$
- vítr - wind stress  $F_{wind} = \rho_{air} C_D A U_{10}^2$
- slapy produkují silné proudy, až  $5 \frac{m}{s}$  u pobřeží

# Úvodní pojmy

- Barotropní model: tlak závisí pouze na hustotě a naopak.
- Baroklinický model: hustota je funkcí tlaku i teploty.
- Aproximace mělké vody:
  - rovnice popisují proudění hydrostaticky homogenní, nestlačitelné tekutiny
  - hloubka oceánu je malá ve srovnání s horizontálními rozměry
  - úloha se zjednoduší na 2D problém

# Rovnice kontinuity

- Nestlačitelná kapalina:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Rovnici zintegrujeme podle  $z$  ode dna  $h_b$  po hladinu  $h_s$ .

$$\int_{h_b}^{h_s} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} dz = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (h_s - h_b) + \frac{d}{dt} (h_s - h_b) = 0$$

- Získáme rovnici pro elevaci hladiny oceánu,  $H = h_s - h_b$ ,  
 $H = d + \zeta$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (H\mathbf{v})$$

# Pohybové rovnice

- Pohybové rovnice:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}$$

- Newtonovská kapalina:

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \eta(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v})$$

- Působící síly (v horizontálním směru):

- Corioliosova  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$
- slapové působení  $\gamma\nabla\Phi$ , kde  $\gamma = 1 + k - h$
- tření na dně  $-\frac{r}{H}\mathbf{v}|\mathbf{v}|$

- Po dosazení vede na Navierovy-Stokesovy rovnice:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -g\nabla\zeta + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} - \gamma\nabla\Phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{r}{H}\mathbf{v}|\mathbf{v}|$$

# Výsledné rovnice v geografických souřadnicích

- Rovnice pro poledníkovou (meridionální) rychlost

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} = & -\frac{v_\phi}{a} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} - v_\lambda \sin \phi \right) + \frac{g}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \\ & + \frac{\eta}{\rho a^2} \left( \tan \phi \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \lambda^2} - \frac{v_\phi}{\cos^2 \phi} - 2 \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) \\ & - \frac{\gamma}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + 2\Omega \sin \phi v_\lambda - \frac{r}{H} v_\phi |\mathbf{v}| \end{aligned}$$

# Výsledné rovnice v geografických souřadnicích

- Rovnice pro rovnoběžníkovou (zonální) rychlost

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} = & -\frac{v_\phi}{a} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_\phi \sin \phi \right) - \frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \\ & + \frac{\eta}{\rho a^2} \left( \tan \phi \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \lambda^2} - \frac{v_\lambda}{\cos^2 \phi} + 2 \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} \right) \\ & + \frac{\gamma}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - 2\Omega \sin \phi v_\phi - \frac{r}{H} v_\lambda |\mathbf{v}| \end{aligned}$$



# Výsledné rovnice v geografických souřadnicích

- Rovnice pro elevaci hladiny

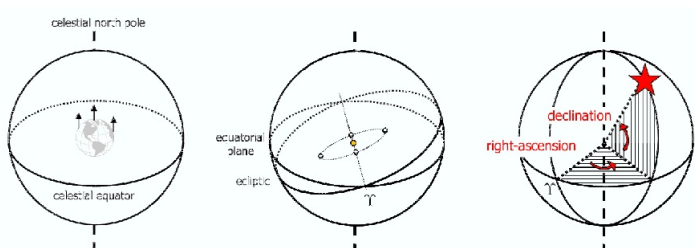
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a} \left( \tan \phi H v_{\phi} - \frac{\partial H v_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial H v_{\lambda}}{\partial \lambda} \right)$$

# Slapový potenciál

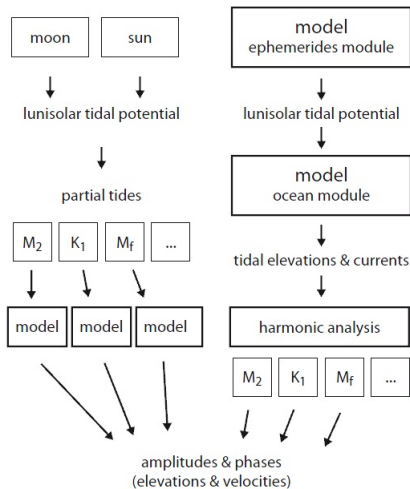
- Slapový potenciál působící na rotující Zemi

$$\Phi = \frac{GMr^2}{4R^3} [(3 \sin^2 \phi - 1)(3 \sin^2 \delta - 1) + 3 \sin(2\phi) \sin(2\delta) \cos \tau + 3 \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos(2\tau)]$$

$$\tau = T_{sid} - \alpha = T_{Gsid} + \lambda - \alpha$$



# Slapový model



# Parciální slapy

- Každý ze tří členů potenciálu lze rozvinout do Fourierovy řady pro speciálně vybrané frekvence

$$f = n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3 + n_4 f_4 + n_5 f_5 + n_6 f_6$$

Table 17.1 Fundamental Tidal Frequencies

	Frequency °/hour		Period	Source
$f_1$	14.49205211	1	lunar day	Local mean lunar time
$f_2$	0.54901653	1	month	Moon's mean longitude
$f_3$	0.04106864	1	year	Sun's mean longitude
$f_4$	0.00464184	8.847	years	Longitude of moon's perigee
$f_5$	-0.00220641	18.613	years	Longitude of moon's ascending node
$f_6$	0.00000196	20,940	years	Longitude of sun's perigee

# Parciální slapy

- Slapový potenciál se zjednoduší na tvar

$$\Phi_n(\phi, \lambda, t) = k_n G_m(\phi) \cos(f_n t + m\lambda)$$

- $m$  - zonální vlnové číslo
  - dlouhoperiodické slapy:  $m = 0$
  - denní:  $m = 1$
  - půldenní:  $m = 2$
- $G_m(\phi)$  - geodetická funkce
  - $G_0(\phi) = \frac{3}{2} \cos^2 \phi - 1$
  - $G_1(\phi) = \sin(2\phi)$
  - $G_2(\phi) = \cos^2 \phi$

# Parciální slapy

- Výhody užití parciálních slapů
  - systém je charakterizován pevnými periodami
  - srovnání s naměřenými daty a možnost predikce slapů
- Celkem 399 možných parciálních slapů
  - 100 dlouhoperiodické, 160 s denní periodou, 115 dvakrát za den, 14 třikrát za den
  - většina s velmi malými amplitudami, význam má hlavně několik slapů s největšími amplitudami

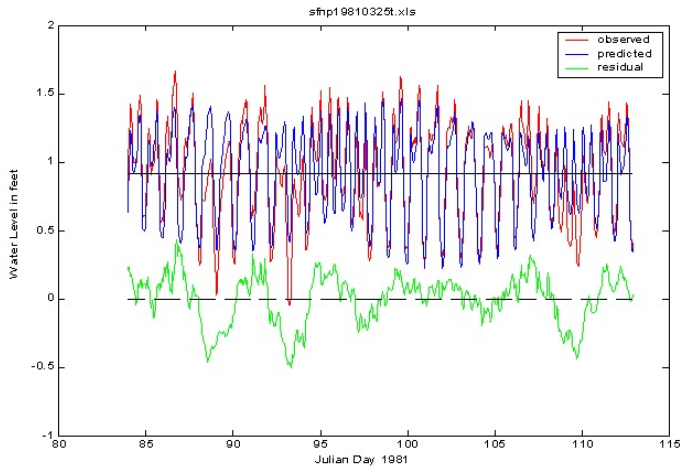
## Parciální slapy

Table 17.2 Principal Tidal Constituents

Tidal Species	Name	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	Equilibrium Amplitude† ( $m$ )	Period (hr)
Semidiurnal		$n_1 = 2$						
Principal lunar	$M_2$	2	0	0	0	0	0.242334	12.4206
Principal solar	$S_2$	2	2	-2	0	0	0.112841	12.0000
Lunar elliptic	$N_2$	2	-1	0	1	0	0.046398	12.6584
Lunisolar	$K_2$	2	2	0	0	0	0.030704	11.9673
Diurnal		$n_1 = 1$						
Lunisolar	$K_1$	1	1	0	0	0	0.141565	23.9344
Principal lunar	$O_1$	1	-1	0	0	0	0.100514	25.8194
Principal solar	$P_1$	1	1	-2	0	0	0.046843	24.0659
Elliptic lunar	$Q_1$	1	-2	0	1	0	0.019256	26.8684
Long Period		$n_1 = 0$						
Fortnightly	$Mf$	0	2	0	0	0	0.041742	327.85
Monthly	$Mm$	0	1	0	-1	0	0.022026	661.31
Semiannual	$Ssa$	0	0	2	0	0	0.019446	4383.05

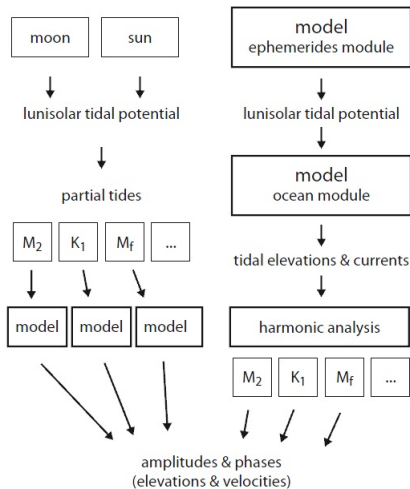
†Amplitudes from Apel (1987)

# Parciální slapy





# Slapový model



## Výhody ephemeridního slapového modelu

- všechny parciální slapy jsou započítávány, model reprezentuje úplnou dynamiku systému
- zahrnuty interakce mezi jednotlivými slapy („shallow-water tides“)
- parciální slapy lze vypočítat harmonickou analýzou

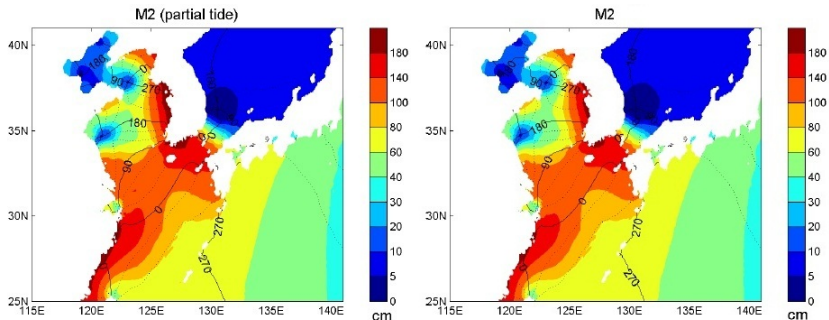
# Harmonická analýza

- Výsledky kompletního působení netvoří pevnou periodu
- Parciální slapy lze získat harmonickou analýzou

$$x(t_n) = \bar{x} + \sum_{m=1}^M [A_m \cos(2\pi f_m t_n) + B_m \sin(2\pi f_m t_n)] + x_r(t_n)$$

- amplituda:  $C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$
- fáze:  $\phi_m = \arctan\left(\frac{B_m}{A_m}\right)$
- Pro rozlišení dvou „sousedních“ slapů je třeba, aby  $T > \frac{1}{|f_1 - f_2|}$
- např. pro dominantní slapy  $M_2$  a  $S_2$  potřebujeme časovou řadu dlouhou alespoň 14,8 hodin
- čím delší časová řada, tím více slapů můžeme získat, včetně dlouhodobých, např. pro roční  $S_a$  potřebujeme časovou řadu dlouhou alespoň 366 dní

# Rozdíl mezi oběma přístupy



# Rozdíl mezi oběma přístupy

