

Postgraduální kurs
zpracování geofyzikálních dat a číslicové seismiky



OLDŘICH NOVOTNÝ

MECHANIKA KONTINUA

Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze
1976

Níže uvedený text je téměř věrným přepisem skript z roku 1976, psaných ještě na psacím stroji. V textu byly provedeny jen velmi drobné úpravy, jako jsou opravy některých překlepů nebo číslování některých vzorců. Technický vzhled textu se ve srovnání s originálem samozřejmě změnil, např. důležité vzorce jsme dali do rámečků a změnilo se umístění některých obrázků. V původních skriptech jsme vektory označovali šipkou nad příslušným písmenem, nyní šipky většinou vynecháváme, ale vektory označujeme tučným písmem. Šipku ponecháváme jen u vektoru normály \vec{n} . Za přepis tohoto textu děkuji své manželce paní Šárce Novotné.

V Praze v květnu 2012

Oldřich Novotný

MECHANIKA KONTINUA

Obsah.....	Str. 3
1. Úvod.....	4
2. Tensor deformace.....	5
2.1. Vektor posunutí.....	5
2.2. Tensor konečných deformací.....	7
2.3. Fyzikální význam složek tensoru konečných deformací.....	11
2.4. Hlavní osy deformace.....	13
2.5. Tensor malých deformací.....	13
2.6. Objemové změny při deformaci.....	15
3. Tensor napětí.....	17
3.1. Plošné a objemové síly.....	17
3.2. Vektor napětí.....	18
3.3. Podmínky rovnováhy v integrálním tvaru.....	19
3.4. Pohybové rovnice v integrálním tvaru.....	20
3.5. Složky tensoru napětí.....	20
3.6. Podmínky rovnováhy v diferenciálním tvaru.....	23
3.7. Pohybové rovnice v diferenciálním tvaru.....	24
4. Vztah mezi deformací a napětím.....	26
4.1. Reologická klasifikace látek.....	26
4.2. Zobecněný Hookův zákon.....	26
4.3. Pohybové rovnice pro homogenní anisotropní prostředí.....	28
4.4. Pohybové rovnice pro homogenní isotropní prostředí.....	28
4.5. Přehled nejdůležitějších vzorců.....	30
Literatura.....	31

1. ÚVOD

Při matematickém řešení fyzikálních úloh se zavádějí četná zjednodušení a matematické idealizace, umožňující konstruovat modely reálných fyzikálních jevů. Zavádějí se modely prostředí, modely mechanismu různých fyzikálních dějů, různé principy apod. Všechny tyto abstrakce se zavádějí pro zjednodušení matematického a fyzikálního popisu studovaných jevů. Mezi nejznámější idealizace používané v mechanice patří zejména pojmy “hmotný bod”, “soustava hmotných bodů” a “tuhé těleso”. S těmito pojmy však nevystačíme, máme-li popsat pohyby kapalin a plynů nebo pohyby pevných látek v případech, kdy deformace pevné látky již nelze z jakýchkoliv důvodů zanedbat. Nejjednodušší idealizací používanou při studiu mechanických dějů v plynných, kapalných a pevných látkách (při uvážení deformace látek) je “kontinuum” – prostředí se spojitým rozložením hmoty. Příslušná rozsáhlá část mechaniky, zabývající se studiem mechanických jevů v pevných, kapalných a plynných látkách, jež se účinkem sil deformují, se nazývá mechanika kontinua. Mechanika kontinua se obvykle dále dělí na teorii pružnosti, hydromechaniku (mechanika tekutin, tj. mechanika kapalných a plynných látek), teorii plasticity aj. Z matematického hlediska je pojem kontinua výhodný proto, že umožňuje používat aparátu spojitých funkcí a diferenciálního a integrálního počtu.

Představa spojitého rozložení hmoty ovšem odporuje našim znalostem o molekulární a atomové struktuře látek. To však neznamená, že by pojem kontinua nebyl použitelný při studiu mnohých makroskopických jevů. Při budování fyzikálních teorií není totiž často tolik důležité, aby teorie co nejlépe vystihovaly mikroskopickou strukturu látek, ale je důležité, aby byly pro studium příslušného jevu vhodné a pokud možno jednoduché. O vhodnosti modelu rozhodují zejména takové faktory, jako je charakter úlohy, požadovaná přesnost, naše fyzikální znalosti, výpočetní možnosti apod. Jako příklad uveďme pohyby Země. Budeme-li studovat pohyby Země v Galaxii, budeme Zemi patrně považovat za hmotný bod. Při studiu rotace, precese nebo pohybu pólu se Země obvykle považuje za tuhé těleso; při přesnějším studiu těchto jevů často jako kontinuum, např. jako těleso složené z pevného elastického pláště a kapalného jádra. Při studiu deformací zemského tělesa, působených přitažlivým účinkem Měsíce a Slunce, nebo při studiu seismických vln považujeme Zemi obvykle za kontinuum; Země jako hmotný bod nebo tuhé těleso pro tyto účely vůbec nevyhovuje.

Zde budovaná mechanika kontinua bude tedy spadat mezi tzv. fenomenologické teorie fyziky, které se snaží vysvětlit makroskopické chování látek na základě jisté schematizace fyzikální podstaty jevů v nich probíhajících. Nepřihlížíme k mikroskopické struktuře látek, pro výklad jednotlivých jevů a zákonitostí si v těchto teoriích vytváříme jisté modely (představy, pracovní hypotézy) a z nich se pak snažíme odvodit důsledky, které však musejí být ve shodě s naší zkušeností [2].

Při budování mechaniky kontinua je možný ještě druhý přístup. Mohli bychom důsledně vycházet ze struktury skutečných látek a makroskopické pojmy mechaniky kontinua (jako je hustota, rychlost, vnitřní energie, teplota atd.) zavést pomocí statistické mechaniky [10]. Zde touto cestou nepůjdeme, budeme postupovat čistě fenomenologicky.

V těchto skriptech se zaměřujeme na ty partie mechaniky kontinua, které jsou nejdůležitější pro studium mechanických dějů v zemském nitru. Proto po úvodních obecných kapitolách o tensoru deformace a tensoru napětí se věnujeme převážně teorii pružnosti, a to zejména se zaměřením na elastické vlny. Nesnažili jsme se o přílišnou originalitu textu, kde to bylo možné, převzali jsme z literatury některé části doslovně. Výklad nikde nezabíhá příliš daleko, jsou odvozeny pouze nejdůležitější vzorce a rovnice. Důraz byl spíše kladen, pokud to rozsah skript dovolil, na objasnění základních přístupů, předpokladů a některých souvislostí.

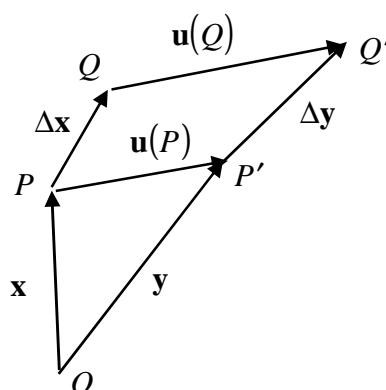
2. TENSOR DEFORMACE

Z experimentálních zkušeností je známo, že vlivem působících sil se skutečná tělesa více či méně deformují, tj. mění svůj tvar a objem. Určení deformací tělesa se proto zakládá na srovnání okamžitého stavu (objemu a tvaru) tělesa s nějakým jeho minulým stavem, považovaným za počáteční. Cílem této kapitoly je nalézt a studovat veličiny, které by byly vhodné k popisu deformací.

Aby nedošlo k nedorozumění, upozorníme předem, že v dalším budeme mluvit o dvou typech bodů; o bodech nebo “částicích” kontinua a o bodech eukleidovského prostoru. Určitý bod kontinua se v různých časových okamžicích nachází obecně v různých bodech prostoru.

2.1. Vektor posunutí

Uvažujme kontinuum ve dvou stavech, tj. ve dvou různých časových okamžicích. Jako první zvolme stav, kdy těleso není deformováno, ve druhém stavu považujeme těleso obecně již za deformované. První stav budeme též označovat jako stav před deformací, nedeformovaný stav nebo původní stav. Obdobně druhý stav budeme také nazývat stavem při deformaci, deformovaným stavem nebo novým stavem.



Obr. 1.

Zavedme kartézskou soustavu souřadnic, jejíž počátek označíme O . Uvažujme libovolný bod (libovolnou částici) kontinua. Označme její polohu v prvním, nedeformovaném stavu bodem P , ve druhém stavu P' (obr. 1). Polohu bodu P udává polohový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, polohu bodu P' udává vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Nová poloha bodu kontinua závisí na jeho původní poloze, působících silách, fyzikálních vlastnostech kontinua a na čase, kterého bylo třeba k přechodu kontinua z původního do nového stavu. V této kapitole se budeme zabývat pouze první uvedenou závislostí, tj. budeme vyšetřovat, jaké obecné vztahy, za jistých předpokladů a vlastnostech kontinua, musejí platit mezi souřadnicemi bodů kontinua v novém a původním stavu. Budeme tedy vyšetřovat závislost

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) . \quad (2.1)$$

Tímto vektorovým zápisem rozumíme zkrácené vyjádření tří skalárních závislostí

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_1(x_1, x_2, x_3) \\
y_2 &= y_2(x_1, x_2, x_3) \\
y_3 &= y_3(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

V běžných případech existuje ke každé nové poloze jednoznačně určená poloha původní. Budeme proto předpokládat, že k (2.1) existuje inverzní zobrazení

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}) . \tag{2.3}$$

Přemístění bodu kontinua z bodu P do bodu P' budeme obvykle popisovat pomocí tzv. vektoru posunutí $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Z obr. 1 plyne

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u} . \tag{2.4}$$

Vektor posunutí závisí na poloze uvažovaného bodu, tedy platí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Plyne to též z (2.4) a (2.1); $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, poslední výraz je funkce \mathbf{x} . Vektor posunutí chápeme tedy jako funkci souřadnic v nedeformovaném stavu. Stejně dobře bychom však mohli vektor posunutí považovat za funkci souřadnic v deformovaném stavu (jako funkci vektoru \mathbf{y}), neboť předpokládáme vzájemné jednoznačné přiřazení mezi body v nedeformovaném a deformovaném stavu, viz vzorce (2.1) a (2.4). Budeme-li při popisu kontinua považovat za nezávislé proměnné souřadnice v nedeformovaném stavu x_i ($i = 1, 2, 3$), budeme mluvit o Lagrangeově popisu, souřadnice x_i nazveme Lagrangeovými. Jestliže za nezávislé souřadnice považujeme souřadnice v deformovaném stavu y_i , mluvíme o Eulerově popisu a Eulerových souřadnicích [9, 10]. Poznamenejme, že Lagrangeův a Eulerův popis se důsledně rozlišuje v hydromechanice, popis v Eulerových souřadnicích je tam obvykle vhodnější [1, 9]. V teorii pružnosti se častěji používají Lagrangeovy souřadnice. V případě tzv. malých deformací, viz dále, oba popisy splývají a nemusíme mezi nimi rozlišovat. Přidržme se nyní Lagrangeova popisu, tedy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Místo “vektor posunutí” budeme někdy stručně říkat jen “posunutí”.

Abychom zjednodušili matematické úvahy, předpokládejme, že vektor posunutí a jeho první derivace jsou spojitými funkcemi souřadnic. Některé případy, kdy tyto předpoklady nejsou splněny, jsou uvedeny na konci tohoto paragrafu. Ve druhé kapitole ještě připojíme předpoklad o spojitosti druhých derivací vektoru posunutí.

V blízkosti bodu P uvažujeme bod Q , který se při deformaci přemístí do bodu Q' (obr. 1). Polohu bodu Q udává polohový vektor $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, složky vektoru $\Delta\mathbf{x}$ označíme jako $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Pomocí Taylorova vzorce můžeme j -tou složku vektoru posunutí v bodě Q psát ve tvaru

$$u_j(Q) = u_j(x_i + \Delta x_i) = u_j(x_i) + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_{x_i} \Delta x_k + \dots = u_j(P) + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_P \Delta x_k + \dots , \tag{2.5}$$

derivace $\partial u_j / \partial x_k$ bereme v bodě P . Pro zjednodušení dalších zápisů zavedeme Einsteinovo sumační pravidlo: nebudeme sumaci vyznačovat znakem \sum a prostě si ji myslíme provedenou podle každého indexu, který se vyskytuje v jednom členu dvakrát. Výraz

$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \Delta x_k$ bude tedy znamenat $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \Delta x_k$. Zanedbáme-li ve (2.5) členy vyššího řádu, můžeme s použitím sumačního pravidla přibližně psát

$$u_j(Q) = u_j(P) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)_P \Delta x_k. \quad (2.6)$$

Upozorňujeme, že označení indexu, podle kterého sčítáme (řekněme mu sčítací index), jsme mohli volit libovolně, tedy místo indexu k jsme mohli zvolit např. index m apod.

Předpoklad o spojitosti posunutí zajišťuje, že těleso spojitě před deformací zůstane spojitým i po deformaci. Pro zanedbání členů vyšších řádů ve (2.5) je podstatný předpoklad o spojitosti prvních derivací vektoru posunutí, tj. výrazů $\partial u_j / \partial x_k$. Jsou-li první derivace posunutí spojitě, má vektor posunutí totální diferenciál [13] a vzorce (2.5) a (2.6) lze pak učinit libovolně přesnými, pokud zvolíme bod Q dostatečně blízko bodu P .

Ze vzorců (2.5) a (2.6) plyne, že k přibližnému určení změn v poloze malého okolí bodu P (nekonečného počtu bodů tohoto okolí) postačí znalost konečného počtu veličin (tří složek vektoru posunutí bodu P a devíti složek derivací). Odtud plyne, že i posunutí celého tělesa (má-li konečný objem), lze přibližně popsat konečným počtem veličin, jestliže toto těleso rozdělíme na konečný počet malých částí. Toho se využívá při řešení úloh některými numerickými metodami, např. metodou sítí.

Uveďme nakonec některé důležité příklady, kdy nejsou splněny výše uvedené předpoklady o spojitosti vektoru posunutí a jeho prvních derivací. K nespojitostem může docházet v určitých bodech, na čarách nebo plochách. Posunutí není spojitě v místech, kde vznikají dutiny, trhliny apod. K nespojitostem posunutí dochází rovněž v místech nedokonalého kontaktu látek. Například na rozhraní pevné látky a tekutiny, zanedbáme-li její viskozitu, jsou nespojitě složky posunutí tečné k rozhraní, tekutina může na rozhraní "proklouzávat". V místech, kde je kontakt látek dokonalý, ale nespojitě se mění některé materiálové parametry, např. hustota, je vektor posunutí spojitý, ale jeho první derivace jsou již nespojitě. S touto situací se setkáváme při vyšetřování odrazu a lomu elastických vln na rozhraní dvou prostředí. Je nemyslitelné, abychom úlohy tohoto druhu museli vyloučit z našich úvah jen proto, že na určité singulární ploše nejsou splněny předpoklady naší teorie. Postupuje se obvykle následujícím způsobem. Ty části prostředí, kde předpoklady jsou splněny, se uvažují samostatně a vztah mezi veličinami na obou stranách rozhraní se vyjádří pomocí tzv. hraničních podmínek (spojitost posunutí, napětí apod.), které jsou odpozorovány z experimentů. Podrobnosti v těchto skriptech vyšetřovat nebudeme, v dalším výkladu budeme předpokládat, že vektor posunutí a jeho první derivace jsou spojitě.

2.2. Tensor konečných deformací

V předcházejícím paragrafu jsme vyšetřovali, jak lze popsat zcela obecné posunutí kontinua. V tomto celkovém posunutí kontinua jsou zahrnuty jak tvarové a objemové změny tělesa, tj. vlastní (čistá) deformace, tak i taková posunutí, při kterých se kontinuum přemisťuje jako tuhý celek (translace a rotace tuhého tělesa). V těchto skriptech se budeme dále zabývat jen vlastními deformacemi, slovo „vlastní“ dále vynecháme. Protože deformace mohou být v různých místech kontinua různé, uvažujme opět kontinuum jen v malém okolí bodu P (obr. 1). První úloha, kterou musíme řešit, zní: „Nalezněte veličiny, kterými je možno

charakterizovat deformace malého okolí bodu P . V literatuře jsou popsány dva různé postupy řešení této úlohy.

První metoda řešení je nasnadě; z celkového posunutí odečíst tu jeho část, která odpovídá přemístění uvažovaného okolí jako tuhého tělesa. V obecném případě je však tento postup značně komplikovaný, jednoduchý je pouze v případě, že první derivace posunutí jsou malé, tj. když deformace a otočení jsou malé [7, 3]. Zde touto cestou nepůjdeme.

Druhý, nejčastěji používaný postup, je založen na této úvaze [4, 5]: Je zřejmé, že změna velikosti a tvaru všech částí tělesa bude určena, jestliže budou známy změny vzdáleností libovolných dvou bodů tělesa.

Aplikujme tuto myšlenku opět na okolí bodu P . Čtverec vzdálenosti libovolného bodu Q tohoto okolí od bodu P je dán vzorcem

$$\overline{PQ}^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta x_i \Delta x_i . \quad (2.7)$$

Poznamenejme, že tečkou mezi vektory označujeme jejich skalární součin, např. pro $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$, tedy i $\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta x_i \Delta x_i$. Vzájemnou polohu příslušných bodů při deformaci, tj. bodů P' a Q' udává vektor $\Delta \mathbf{y}$. Z obr. 1 a vztahu (2.6) plyne

$$\mathbf{u}(P) + \Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(Q) = \Delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(P) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_P \Delta x_i . \quad (2.8)$$

Odtud plyne

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_P \Delta x_i , \quad (2.9)$$

index P u derivací už dále nebudeme uvádět. Zavedme známý Kroneckerův symbol δ_{ij} , kde $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Vzorec (2.9) má ve složkách tvar

$$\Delta y_k = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \Delta x_i . \quad (2.10)$$

Pro čtverec vzdálenosti bodů P' a Q' platí

$$\overline{P'Q'}^2 = \Delta \mathbf{y} \cdot \Delta \mathbf{y} = \Delta y_k \Delta y_k = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \Delta x_j . \quad (2.11)$$

V tomto výrazu vystupují dva sčítací indexy. Snadno se lze přesvědčit, že v těchto situacích je třeba užívat odlišného značení indexů, v našem případě i a j .

Výše již bylo řečeno, že rozdíly délek odpovídajících si úseček popisují deformace kontinua. Deformaci budou popisovat i rozdíly čtverců vzdáleností, neboť známe-li \overline{PQ} a $\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2$, můžeme určit $\overline{P'Q'}$. Vyšetřovat rozdíly čtverců vzdáleností bude z výpočetního hlediska výhodné, viz vzorce (2.7) a (2.11).

Zavedeme devět veličin ε_{ij} , kterým budeme říkat složky tenzoru konečných deformací, vztahem

$$\boxed{\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2 = 2\varepsilon_{ij}\Delta x_i\Delta x_j}. \quad (2.12)$$

Souhrnu devíti složek ε_{ij} budeme říkat tensor konečných deformací, obdobně jako souhrnu složek vektoru říkáme vektor. Poněvadž platí $\Delta x_i\Delta x_i = \delta_{ij}\Delta x_i\Delta x_j$, plyne z (2.12) použitím (2.11) a (2.7) vzorec

$$2\varepsilon_{ij} = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) - \delta_{ij}. \quad (2.13)$$

Uvážíme-li, že platí $\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$ a $\delta_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, dospíváme k nejdůležitějšímu vzorci tohoto paragrafu

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}. \quad (2.14)$$

Například první dvě složky mají tvar

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right].$$

Ze vzorce (2.14) ihned plyne, že tensor konečných deformací je symetrický, tj. platí

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}. \quad (2.16)$$

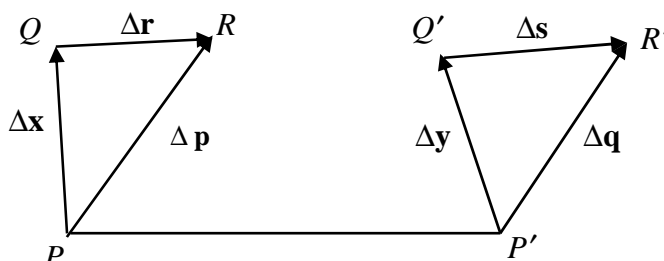
Tensor konečných deformací může tedy mít nejvýše šest různých složek.

Tensor konečných deformací byl definován vztahem (2.12), vzorec (2.14) udává jeho vyjádření pomocí vektoru posunutí. Protože derivace vektoru posunutí jsou derivace v bodě P , budeme i ε_{ij} chápat jako veličiny definované v bodě P a tedy také mluvit o tensoru konečných deformací v bodě P .

Veličiny ε_{ij} jsme již sice nazvali tensorem deformace, ale dosud jsme nedokázali, že popisuje všechny deformace okolí bodu P , tj. změny vzdáleností mezi libovolnými dvěma body tohoto okolí. Tensor ε_{ij} neobsahuje veličiny Δx_i , které charakterizovaly konkrétní bod Q , přičemž tento bod byl zcela libovolný. Odtud je zřejmé, že tensor ε_{ij} popisuje změny vzdálenosti mezi dvěma body, z nichž jedním je bod P a druhý je libovolný. Zbývá ještě dokázat, že tensor ε_{ij} rovněž popisuje změny vzdáleností mezi dvěma libovolnými body uvažovaného okolí, kdy oba jsou odlišné od bodu P . Zvolme v okolí bodu P libovolně bod R ,

který při deformaci přechází do bodu R' (obr. 2). Polohu bodu R vzhledem k bodu P udává vektor $\Delta \mathbf{p}$, polohu bodu R' vzhledem k bodu P' vektor $\Delta \mathbf{q}$. Podle (2.9) platí

$$\Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \Delta p_i \quad (2.17)$$



Obr. 2

Podle obr. 2 je

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{p} - \Delta \mathbf{x}, \quad \Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{y}. \quad (2.18)$$

Odtud podle (2.9) a (2.17) plyne

$$\Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \Delta r_i. \quad (2.19)$$

Dostali jsme vzorec pro $\Delta \mathbf{s}$ zcela analogický vzorci (2.9) pro $\Delta \mathbf{y}$. Další postup by byl obdobný jako výše, kdy od vzorce (2.9) jsme dospěli k vzorci (2.11). Proto musí platit

$$\overline{Q'R'}^2 - \overline{QR}^2 = 2\varepsilon_{ij} \Delta r_i \Delta r_j. \quad (2.20)$$

Tím máme dokázáno, že tensor konečných deformací, daný v nějakém bodě, plně popisuje deformace malého okolí tohoto bodu. Vyřešili jsme tedy úlohu, kterou jsme formulovali na začátku tohoto paragrafu. Všimněme si ještě, že když všechny složky ε_{ij} jsou nulové, pak se vzdálenost bodů kontinua nemění, kontinuum se tedy nedeformuje. Obrácené tvrzení dokážeme v příštím paragrafu.

Poznamenejme, že nelze vybudovat teorii deformace, která by vycházela pouze z rozdílů vzdáleností. V tomto případě by nešlo z rozdílu odmocnin vytknout Δx_i a tím oddělit veličiny společné pro celé okolí (derivace posunutí v bodě P) od veličin Δx_i , charakterizujících geometrickou polohu konkrétního bodu.

Všimněme si ještě popisu deformací v Eulerových souřadnicích, kdy za nezávisle proměnné považujeme souřadnice deformovaného stavu y_j . Uveďme poněkud stručnější způsob odvození, než jak byl používán výše. Ze vztahu (2.2), tj $x_i = x_i(y_j)$, plyne

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Delta y_j, \quad (2.21)$$

kde jsme opět vynechali členy obsahující druhé a vyšší parciální derivace. Dosaďme do (2.21) vyjádření $x_i = y_i - u_i$. Dostáváme

$$\Delta x_i = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) \Delta y_j . \quad (2.22)$$

Vyšetřovaný rozdíl čtverců vzdáleností je

$$\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2 = \Delta y_k \Delta y_k - \Delta x_k \Delta x_k = \delta_{ij} \Delta y_i \Delta y_j - \left(\delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \right) \Delta y_i \left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right) \Delta y_j . \quad (2.23)$$

Zavedme tensor konečných deformací η_{ij} podle analogie s (2.12) vztahem

$$\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2 = 2\eta_{ij} \Delta y_i \Delta y_j . \quad (2.24)$$

Z (2.23) plyne

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} - \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right) . \quad (2.25)$$

Tensor η_{ij} se až na znaménko u posledního velmi podobá tensoru ε_{ij} . Tensor ε_{ij} se obvykle nazývá Greenův tensor deformace, η_{ij} Almansiův tensor deformace [5]. Tensorem η_{ij} se dále zabývat nebudeme.

2.3. Fyzikální význam složek tensoru konečných deformací

Relativním prodloužením úsečky PQ nazveme výraz (viz obr. 1)

$$E_{PQ} = \frac{|\Delta \mathbf{y}| - |\Delta \mathbf{x}|}{|\Delta \mathbf{x}|} . \quad (2.26)$$

Nechť před deformací souhlasí úsečka PQ se směrem první kartézské souřadnice x_1 , tj. $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, 0, 0)$. Poněvadž je $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, plyne z (2.12)

$$|\Delta \mathbf{y}|^2 - |\Delta \mathbf{x}|^2 = 2\varepsilon_{11} (\Delta x_1)^2 . \quad (2.27)$$

Odtud plyne

$$|\Delta \mathbf{y}| = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \Delta x_1 . \quad (2.28)$$

Příslušné relativní prodloužení E_1 ve směru první souřadnicové osy je

$$E_1 = E_{PQ} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 . \quad (2.29)$$

Složka ε_{11} tedy charakterizuje relativní prodloužení přímkového elementu, který byl před deformací rovnoběžný s první souřadnicovou osou. Obdobně složky ε_{22} a ε_{33} charakterizují relativní prodloužení elementů do deformace rovnoběžných s druhou a se třetí osou.

Uvažujeme před deformací dva na sebe kolmé vektory $\Delta \mathbf{x}^{(1)} = (\Delta x_1, 0, 0)$ a $\Delta \mathbf{x}^{(2)} = (0, \Delta x_2, 0)$. Pro příslušné vektory po deformaci $\Delta \mathbf{y}^{(1)}$ a $\Delta \mathbf{y}^{(2)}$ platí podle (2.10)

$$\Delta y_i^{(1)} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j, \text{ ale jen } \Delta x_1 \neq 0; \quad (2.30)$$

$$\Delta y_i^{(2)} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j, \text{ ale jen } \Delta x_2 \neq 0.$$

Vypíšeme-li pouze nenulové členy, plyne pro skalární součin vektorů (2.30)

$$\Delta \mathbf{y}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{y}^{(2)} = \Delta y_i^{(1)} \Delta y_i^{(2)} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) \Delta x_1 \Delta x_2 = 2\varepsilon_{12} \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (2.31)$$

Označme φ úhel, který svírají vektory $\Delta \mathbf{y}^{(1)}$ a $\Delta \mathbf{y}^{(2)}$. Úhel $\alpha_{12} = 90^\circ - \varphi$ představuje změnu pravého úhlu (zmenšení pravého úhlu), způsobenou deformací. Pro skalární součin uvažovaných vektorů platí známý vztah

$$\Delta \mathbf{y}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{y}^{(2)} = \left| \Delta \mathbf{y}^{(1)} \right| \left| \Delta \mathbf{y}^{(2)} \right| \cos \varphi. \quad (2.32)$$

Odtud s použitím (2.28) a (2.31) plyne

$$\sin \alpha_{12} = \cos \varphi = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{11}} \sqrt{1+2\varepsilon_{22}}}. \quad (2.33)$$

Složka tenzoru deformace ε_{12} tedy charakterizuje změnu pravého úhlu dvou přímkových elementů, z nichž do deformace byl jeden z nich rovnoběžný s osou x_1 a druhý s osou x_2 . Fyzikální význam zbývajících smíšených složek tenzoru konečných deformací ε_{13} a ε_{23} je odtud již zřejmý. Smíšené složky ε_{ij} ovšem nepopisují otočení uvažovaného oboru jako tuhého tělesa. Poznamenejme, že pro úhly α_{ij} se někdy zavádí název úhly smyku a pro ε_{ij} ($i \neq j$) název relativní smyky.

Ze vzorců (2.29) a (2.33) plyne, že když se těleso nedeformuje, tj. relativní prodloužení jsou nulová a úhly v tělese se nemění, jsou všechny složky tenzoru konečných deformací nulové.

Upozorněme znovu, že tensor konečných deformací a tedy i relativní prodloužení a relativní smyky popisují deformaci přesně jen v nekonečně malém okolí uvažovaného bodu (bodů P).

2.4. Hlavní osy deformace

Víme již, že deformace kontinua jsou popsány tensorem konečných deformací, ale zatím nemáme názornou představu, k jakým geometrickým změnám dochází v nekonečně malém okolí uvažovaného bodu v důsledku deformací. Hledejme, jaký tvar zaujímala část kontinua před deformací, která se přeměnila po deformaci v kouli, tj. předpokládejme $|\Delta\mathbf{y}| = C$, kde C je konstanta. Z (2.11) plyne

$$|\Delta\mathbf{y}|^2 = |\Delta\mathbf{x}|^2 + 2\varepsilon_{ij}\Delta x_i\Delta x_j = \Delta x_i\Delta x_i + 2\varepsilon_{ij}\Delta x_i\Delta x_j = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})\Delta x_i\Delta x_j . \quad (2.34)$$

tedy

$$C^2 = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})\Delta x_i\Delta x_j = A_{ij}\Delta x_i\Delta x_j , \quad (2.35)$$

kde jsme označili $A_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$. Rovnice (2.35) je rovnicí kvadratické plochy, body o souřadnicích $\Delta x_1, \Delta x_2$ a Δx_3 leží tedy na kvadratické ploše. Z fyzikální povahy je zřejmé, že se obecně jedná o trojosý elipsoid. V uvažovaném nekonečně malém okolí tedy vznikne koule deformací jistého trojosého elipsoidu. I obráceně lze ukázat, že okolí, které mělo před deformací tvar koule, se deformací změní obecně na trojosý elipsoid. Důkaz je snadný, použijeme-li vzorce (2.24).

Otočením soustavy souřadné můžeme kvadriku (2.35) převést na normální tvar, kdy souřadné osy souhlasí s osami kvadriky. Tyto osy budeme nazývat hlavními osami deformace. Odtud plyne tento závěr: V každém bodě kontinua existují taková tři (a obecně jen tři) vlákna, která jak před deformací, tak při ní jsou navzájem kolmá. Jejich směry před deformací a při deformaci ovšem obecně nesplývají. Úhly, které svírají obě trojice vláken, charakterizují otočení uvažovaného nekonečně malého oboru jako celku.

Popsané vlastnosti jsou důsledkem lineárního vztahu (2.9) mezi Δy_i a Δx_i , který představuje tzv. afinní transformaci nekonečně malého okolí bodu P [1]. Při afinní transformaci přecházejí přímky opět v přímky a plochy druhého stupně zůstávají plochami druhého stupně, tedy např. (nekonečně malá) koule touto transformací přechází obecně v trojosý elipsoid.

2.5. Tensor malých deformací

Pro matematické řešení úloh kontinua má tensor konečných deformací ε_{ij} tu nepříjemnou vlastnost, že vztah mezi ním (viz vzorec (2.14)) a derivacemi vektoru posunutí je nelineární, vedle členů lineárních v něm vystupují i členy kvadratické. Např. známe-li tensor konečných deformací a chceme-li určit vektor posunutí, představuje vztah (2.14) soustavu diferenciálních rovnic, které jsou však nelineární. Důsledkem nelinearity vztahu (2.14) je neplatnost principu superposice [7]: Skládají-li se dvě nebo více deformací, potom se výsledný tensor konečných deformací obecně nerovná součtu tensorů pro jednotlivé deformace (dokažte!).

V naprosté většině případů deformace látek lze uvedený vztah linearizovat. Lze tak učinit i v případě deformací zemského tělesa, ke kterým dochází při průchodu elastických vln (s výjimkou určitého okolí zdroje). Předpokládejme proto dále, že derivace posunutí jsou malé, tj.

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 , \quad (2.36)$$

takže jejich vzájemné součiny jsou veličiny druhého řádu, které lze vzhledem k samotným derivacím zanedbat. Platí-li (2.36), je výraz $(\partial u_k / \partial x_i)(\partial u_k / \partial x_j)$ v tensoru konečných deformací veličina malá druhého řádu, kterou lze zanedbat. Tensor konečných deformací ε_{ij} tak za předpokladu (2.36) přechází v tensor

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.37)$$

který nazveme tensorem malých deformací. Původ tohoto názvu je zřejmý, za předpokladu (2.36) jsou všechny složky tensoru ε_{ij} (rovněž i tensoru e_{ij}) malé a tedy i deformace kontinua jsou malé. Předpoklad (2.36) tedy znamená, že jsme se omezili na případy malých deformací kontinua. Připomeňme však, že v praxi se případy malých deformací vyskytují nejčastěji.

Složky tensoru e_{ij} mají přímý geometrický význam. Je-li ε_{11} malé a zanedbáme-li členy vyšších řádů, plyne z (2.29) vztah

$$E_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 \doteq 1 + \varepsilon_{11} - 1 = \varepsilon_{11} \doteq e_{11}. \quad (2.38)$$

V případě malých deformací jsou tedy e_{11} , e_{22} a e_{33} přímo rovny relativním prodloužením přímkových elementů, které před deformací měly směr souřadnicových os. Dále platí, viz (2.33),

$$\sin \alpha_{12} \doteq 2\varepsilon_{12} \doteq 2e_{12}. \quad (2.39)$$

Odtud plyne, že $\sin \alpha_{12}$ je malé. Proto

$$\alpha_{12} \doteq \sin \alpha_{12} \doteq 2e_{12}. \quad (2.40)$$

Smíšená složka tensoru malé deformace je tedy rovna polovině změny pravého úhlu (polovině úhlu smyku).

Předpoklad (2.36) má ještě jeden příznivý důsledek, totiž ztotožnění tenzorů ε_{ij} a η_{ij} . Lze ukázat, že ze vztahu (2.36), zanedbáme-li členy druhého řádu, plyne

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.41)$$

Dosazením (2.41) do vzorců pro tensoru konečných deformací a zanedbáním členů druhého řádu dostáváme

$$\eta_{ij} = \varepsilon_{ij} = e_{ij}. \quad (2.42)$$

Lze se snadno přesvědčit, (dokažte!), že vztah (2.36) je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby až na veličiny druhého řádu platilo

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}, \quad (2.43)$$

tj., aby tensor ε_{ij} bylo možno nahradit jednodušším tensorem e_{ij} . Pokusme se podobné podmínky formulovat pomocí samotných složek tensoru ε_{ij} , které jsou fyzikálně názornější než parciální derivace $\partial u_i / \partial x_j$. Platí-li (2.36), jsou všechny složky ε_{ij} malé. Znamená to, že nutnou podmínkou pro platnost (2.36) je, aby všechny složky ε_{ij} byly malé. Že však tato podmínka není dostačující, ihned vyplývá z následujícího jednoduchého příkladu [9, 8].

Nechť $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ je polohový vektor nějakého bodu tuhého tělesa. Otočme toto tuhé těleso kolem osy x_3 o 90° , tj. o 90° od osy x_1 k ose x_2 . Pro polohový vektor uvažovaného bodu po otočení bude zřejmě platit $\mathbf{y} = (-x_2, x_1, x_3)$. Toto otočení lze tedy popsat vektorem posunutí $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = (-x_2 - x_1, x_1 - x_2, 0)$. Těleso se tedy nedeformuje, tensor konečných deformací musí mít všechny složky nulové, o čemž se lze přesvědčit dosazením do (2.14). To již neplatí o složkách tensoru malých deformací. Dosazením výše uvedeného vektoru posunutí do vzorce pro tensor malých deformací (2.37) dostáváme $e_{11} = e_{22} = -1$, třebaže se těleso vůbec nedeformuje. Rozdíl tensorů ε_{ij} a e_{ij} v tomto případě je způsoben tím, že se těleso otočilo o úhel, který není malý. Parciální derivace $\partial u_i / \partial x_j$ totiž popisují nejen deformace, ale i otočení uvažovaného elementu jako tuhého tělesa (zde jsme nedokazovali, viz [3, 9]). Má-li platit (2.36), musejí být malé nejen deformace, ale i otočení. Malé deformace lze tedy popisovat tensorem e_{ij} pouze tehdy, jsou-li současně malá také otočení. Dokonce je třeba, aby otočení byla menší nebo nejvýše řádově stejná jako deformace ε_{ij} [9].

Nesouhlas mezi ε_{ij} a e_{ij} v uvedeném příkladu byl způsoben tím, že těleso vykonávalo pohyb jako těleso tuhé. Jestliže předpokládáme, že těleso jako celek nevykonává pohyby tuhého tělesa, pak prakticky u všech „třírozměrných“ těles (kdy všechny tři rozměry jsou zhruba stejného řádu) lze malé deformace popsat tensorem malých deformací e_{ij} [6]. Nemusí tomu tak být u těles „jednorozměrných“ nebo „dvourozměrných“, jako jsou např. dlouhé tenké tyče nebo tenké desky. Necht' např. dlouhá tenká tyč, pevně vetknutá v počátku a před deformací ležící na ose x_1 , je na volném konci ohýbána silou rovnoběžnou s osou x_2 . Necht' deformace tyče jsou malé, tj. všechny složky ε_{ij} jsou malé. Element tyče u volného konce se málo deformuje, ale vykonává velkou translaci a, co je důležité, velkou rotaci jako tuhé těleso. Odtud plyne, že deformace tyče nelze popsat tensorem malých deformací e_{ij} , třebaže jsou tyto deformace malé. K podobné situaci dochází při ohybu tenké desky do válcové plochy. Těmito úlohami se dále zabývat nebudeme. Dále budeme vždy předpokládat, že otočení jsou malá a deformace jsou malé, takže k jejich popisu lze užít tensoru malých deformací e_{ij} .

2.6. Objemové změny při deformaci

V nedeformovaném stavu mějme malý kvádr o hranách délky d_1 , d_2 a d_3 , které souhlasí s hlavními směry deformace. Objem kvádra je $V = d_1 d_2 d_3$. Po deformaci budou příslušné hrany opět na sebe kolmé a jejich délky budou

$$d_1 + e_{11}d_1, \quad d_2 + e_{22}d_2, \quad d_3 + e_{33}d_3.$$

Zde e_{11} , e_{22} a e_{33} jsou relativní prodloužení ve směru hlavních os. Pro nový objem kvádrů V' bude platit

$$V' = d_1 d_2 d_3 (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33}) = V(1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad (2.44)$$

kde v posledním výrazu jsme zanedbali výrazy $e_{11} e_{22}$ atd., neboť uvažujeme pouze malé deformace. Pro relativní změnu objemu platí

$$\vartheta = \frac{V' - V}{V} = \frac{V(1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}) - V}{V} = e_{11} + e_{22} + e_{33}. \quad (2.45)$$

Veličinu ϑ budeme nazývat kubickou dilatací nebo krátce jen dilatací.

Lze dokázat, že součet relativních prodloužení ve směrech souřadnicových os je invariant, tj. veličina nezávislá na volbě soustavy souřadnic. Matematický důkaz tohoto tvrzení zde provádět nebudeme, poměrně snadno jej lze provést užitím transformačních vztahů, které platí mezi tensory v různých kartézských soustavách souřadnic [1]. Odtud plyne, že veličina ϑ představuje relativní změnu libovolného elementárního objemu, nacházejícího se v okolí bodu, kde tuto veličinu uvažujeme. Připomeňme, že vyšetřovaný kvádr jsme orientovali do směru hlavních os jen proto, aby při deformaci přešel opět na kvádr (zachování pravých úhlů) a jeho objem bylo možno jednoduše vyjádřit vzorcem (2.44).

Pomocí dilatace ϑ můžeme rozdělit deformaci na část objemovou a část tvarovou. Platí zřejmá identita

$$e_{ij} = \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} + \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \right). \quad (2.46)$$

Označme jednotlivé členy v (2.46) jako f_{ij} a g_{ij} , tj.

$$f_{ij} = \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij}, \quad g_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij}.$$

Dosazením (2.46) do (2.45) dostáváme

$$f_{ii} = f_{11} + f_{22} + f_{33} = \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ii} = \vartheta.$$

Vidíme, že změny objemu popisuje tensor f_{ij} , zatímco tensor g_{ij} popisuje takové změny, při nich se objem nemění, tzn. změny tvarové. Tensor g_{ij} se nazývá deviatorem deformace.

3. TENSOR NAPĚTÍ

3.1. Plošné a objemové síly

Fyzikální povaha sil, působících v tělesech při jejich deformaci, je podrobně popsána v [6], odkud vyjímáme:

„Rozložení molekul v nedeformovaném tělese odpovídá stavu jeho tepelné rovnováhy. Při tom se jeho všechny části nacházejí navzájem v mechanické rovnováze. To znamená, že vydělíme-li uvnitř tělesa libovolný objem, potom výslednice všech sil, působících na tento objem ze strany jiných částí, je rovna nule.

Při deformaci se však rozložení molekul mění a těleso je vyvedeno ze stavu rovnováhy, ve kterém se původně nacházelo. V důsledku toho v něm vznikají síly, snažící se vrátit těleso do stavu rovnováhy. Tyto vnitřní síly, vznikající při deformování, se nazývají vnitřními napětími. Jestliže těleso není deformováno, vnitřní napětí v něm neexistují.

Vnitřní napětí jsou podmiňována molekulárními silami, tj. silami vzájemného působení mezi molekulami. Pro teorii pružnosti je velmi podstatná ta okolnost, že molekulární síly mají velmi nepatrný „akční rádius“. Jejich vliv zasahuje řádově do mezimolekulární vzdálenosti od částice, která je vyvolává. Avšak v teorii pružnosti, jako v teorii makroskopické, se uvažují pouze vzdálenosti, které jsou velké ve srovnání se vzdálenostmi mezi molekulami. V teorii pružnosti proto musíme považovat „akční rádius“ molekulárních sil za nulový. Můžeme říci, že síly způsobující vnitřní napětí jsou v teorii pružnosti silami „působícími na blízko“, které se předávají od každého bodu pouze k bodu jemu nejbližšímu. Odtud plyne, že síly, působící na libovolnou část tělesa ze strany okolních částí, působí pouze bezprostředně přes povrch této části.

Je třeba zde uvést následující připomínku: uvedené tvrzení neplatí v těch případech, kdy při deformaci v tělese vznikají makroskopická elektrická pole (pyroelektrické a piezoelektrické látky). Dále však vlastnosti takových látek uvažovat nebudeme.“

Výše uvedený výklad o molekulárních silách můžeme jinými slovy shrnout takto [1]: „O těchto silách předpokládáme, že působí jen do vzdáleností řádově stejných, jako jsou vzdálenosti sousedních hmotných bodů (z hlediska atomové teorie). To znamená, že tyto síly jsou omezeny na ty sousední hmotné body, které jsou právě na opačných stranách myšlené plochy omezující uvažovaný objemový element. Proto jim říkáme síly plošné.“ Příkladem plošných sil je hydrostatický tlak, aerodynamický tlak nebo síly působené mechanickým kontaktem dvou těles.

Na uvažovanou část těles ovšem nemusí působit jen síly, které působí pouze „na blízko“ a jejichž účinek bychom mohli popisovat jako vliv plošných sil. Ve fyzice jsou známy dva typy sil, které působí „na dálku“, tj. do vzdáleností větších než je vzdálenost mezi molekulami. Jsou to síly gravitační a elektromagnetické. Protože jsou tyto síly obecně úměrné objemu uvažované části tělesa, nazýváme je silami objemovými.

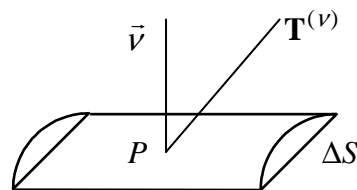
Uvažujeme-li dynamické problémy (d'Alembertův princip), bude další objemovou silou ještě síla setrvačná. Pokud popisujeme pohyb tělesa v neinerciální soustavě, k objemovým silám dále přistupují tzv. zdánlivé síly (na Zemi odstředivá a Coriolisova síla). Někdy se také zavádějí umělé objemové síly, aby bylo možno určité děje v kontinuu snadněji popsat; např. zdroj elastických vln se často nahrazuje působením objemové síly nebo pevnou překážkou v proudící tekutině lze nahradit tekutinou, na níž působí vhodně určená objemová síla [11]. Příkladem objemové síly je tedy např. tíže (výslednice gravitační a odstředivé síly) nebo elektromagnetická síla působící na nabitě (prostorový makroskopický náboj) nebo zmagnetované těleso.

Někdy se plošné a objemové síly dále dělí na vnější a vnitřní. Jedná se o pojmy relativní, musí být vždy řečeno, jaké těleso uvažujeme [11]. Plošné síly působící na vnitřních plochách uvažovaného tělesa nazýváme vnitřními; plošné síly, působící zvnějšku na hranici tělesa (např. v důsledku dotyku s jiným tělesem), nazýváme vnějšími. Obdobně lze zavést vnitřní a vnější objemové síly.

3. 2. Vektor napětí

Přistupme k podrobnějšímu vyšetření plošných sil. Zkoumané těleso uvažujme tentokrát v deformovaném stavu (popis pomocí Eulerových souřadnic). Z tělesa vydělme určitý konečný objem a plochu, která tento objem ohraničuje, označme S (obr. 3). Na ploše S zvolme libovolný bod P a plochu ΔS , která je částí S a obsahuje P . Označme $\vec{\nu}$ jednotkový vektor kolmý k ploše ΔS (a tedy i k S) v bodě P a orientovaný tak, že směřuje ven z uvažovaného objemu. Řekněme, že vektor $\vec{\nu}$ udává směr vnější normály plochy S v bodě P . Vektor $\vec{\nu}$ umožňuje definovat kladnou (ze strany kladné normály) a zápornou stranu plochy ΔS .

Pojednejme o plošných silách působících na ploše ΔS . Budeme tím rozumět síly, kterými část tělesa přilehlá ke kladné straně plochy ΔS působí přes tuto plochu na část tělesa přilehlou ke straně záporné. Síly, kterými působí záporná část na část kladnou, jsou podle principu akce a reakce stejně veliké, ale opačného směru.



Obr. 3

V případě kontinua, na rozdíl od tuhého tělesa, je velmi podstatné rozložení sil. Třebaže tuhé těleso zde nepovažujeme za vyhovující aproximaci deformovatelného tělesa jako celku, zdá se, že určité představy z mechaniky tuhého tělesa by bylo možné do jisté míry přenést na malé části kontinua a to tím lépe, čím budou tyto části menší. Na základě zmíněných jistých analogií s tuhým tělesem učiníme několik předpokladů o vlastnostech plošných sil. Budeme předpokládat, že je-li plocha ΔS dostatečně malá, jsou plošné síly působící na tuto plochu staticky ekvivalentní síle $\Delta \mathbf{H}$ a dvojici sil $\Delta \mathbf{G}$, působících v bodě P . Jinými slovy: Je-li kontinuum v deformovaném stavu v klidu, pak účinek všech plošných sil působících na malý plošný element ΔS lze nahradit jednou silou $\Delta \mathbf{H}$, působící v bodě P , a jedním momentem sil $\Delta \mathbf{G}$, působícím kolem nějaké osy jdoucí bodem P . Vektory $\Delta \mathbf{H}$ a $\Delta \mathbf{G}$ jsou obecně funkcemi velikosti plochy ΔS , její orientace a geometrických vlastností. Představme si nyní, že libovolným způsobem zmenšujeme velikost plochy ΔS k nule, přičemž však bod P stále zůstává uvnitř této plochy. Na základě fyzikálních představ je rozumné dále ještě předpokládat, že vektor $\Delta \mathbf{H}/\Delta S$ konverguje obecně k nenulové limitě $\mathbf{T}^{(\nu)}$ a že vektor $\Delta \mathbf{G}/\Delta S$ konvertuje k nulovému vektoru. Vektor

$$\mathbf{T}^{(v)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{H}}{\Delta S} = \frac{d \mathbf{H}}{d S} \quad (3.1)$$

se nazývá vektorem napětí. Abychom vyjádřili, že se vztahuje k plošnému elementu s vnější normálou \vec{v} , připojujeme znak normály nad označení vektoru. Vektor napětí (často stručně budeme říkat jen napětí) představuje sílu působící na jednotku plochy v deformovaném tělese. Napětí tedy nezávisí jen na poloze plošného elementu, ale i na jeho orientaci. Je třeba upozornit, že obecně $\mathbf{T}^{(v)}$ neleží ve směru \vec{v} .

Průmět vektoru $\mathbf{T}^{(v)}$ do směru normály \vec{v} , tj. normálovou složku vektoru $\mathbf{T}^{(v)}$, nazýváme normálovým napětím. Podobně průmět vektoru $\mathbf{T}^{(v)}$ do tečné roviny, čili tečnou složku $\mathbf{T}^{(v)}$, nazýváme napětím tečným nebo smykovým: někdy se říká též napětí střížné [1]. Je-li normálové napětí kladné (jeho směr souhlasí se směrem \vec{v}), je to tah; je-li záporné, je to tlak [4].

Zdůrazněme, že $\mathbf{T}^{(v)}$ je síla, působící na kladnou stranu jednotkové plochy. Podle principu akce a reakce na zápornou stranu této plochy působí síla $-\mathbf{T}^{(v)}$.

Obdobné úvahy, jako v případě plošných sil, učiníme i o silách objemových. Vydělme z tělesa v deformovaném stavu nějaký malý objem ΔV . Označme P tentokrát nějaký vnitřní bod objemu ΔV . Budeme předpokládat, že je-li objem ΔV dostatečně malý, jsou objemové síly na něj působící staticky ekvivalentní síle $\Delta \mathbf{K}$ a dvojici sil $\Delta \mathbf{L}$, působících v bodě P . Zmenšujeme nyní objem ΔV tak, aby bod P stále zůstal jeho vnitřním bodem. Budeme předpokládat, že vektor $\Delta \mathbf{K}/\Delta V$ konverguje obecně k nenulové limitě \mathbf{F} , kdežto vektor $\Delta \mathbf{L}/\Delta V$ k nulovému vektoru. Vektor \mathbf{F} je objemová síla v bodě P vztažená na jednotku objemu.

Závěrem poznamenejme, že v některých úlohách nelze dobře přijmout předpoklad o vymizení momentu plošných nebo objemových sil při zmenšování příslušného elementu plochy nebo objemu [5, 8, 11]. Z geofyzikálně významných případů sem patří např. mechanické jevy v oblasti seismického ohniska (velké gradienty napětí, nelze zanedbat momenty plošných sil [8]) nebo šíření elastických vln za přítomnosti magnetického pole (nevymizí momenty objemových sil, neboť si magnet při zmenšování objemu stále zachovává svůj dipólový charakter [5]). Dále se těmito případy zabývat nebudeme, budeme předpokládat, že momenty plošných i objemových sil vymizí.

3.3. Podmínky rovnováhy v integrálním tvaru

Budeme předpokládat, že na uvažované těleso v počátečním, tj. nedeformovaném stavu, nepůsobily žádné síly a že tedy počáteční stav je bez elastických posunutí. Takový stav tělesa budeme nazývat přirozeným [1].

Nechť těleso působením vnějších sil přechází z přirozeného stavu do stavu deformovaného. Po dobu tohoto přechodu není těleso v rovnováze. Uvažme až stav, kdy se těleso již dále nedeformuje, ale když už je v deformovaném stavu v klidu. Tehdy se ustavila rovnováha mezi působícími silami a vnitřními napětími. Tento stav deformovaného tělesa a libovolných jeho částí se velmi podobá rovnovážnému stavu tuhého tělesa. Proto podmínky rovnováhy deformovaného tělesa vyvodíme z podmínek rovnováhy tuhého tělesa. Aby bylo tuhé těleso v rovnováze, musí vymizet výslednice působících vnějších sil a jejich výsledný moment.

Vydělme v deformovaném tělese libovolnou část, jejíž objem označme V a povrch S . Předpokládáme, že působení části prostředí, které se nachází vně S , na část prostředí uvnitř S ,

Ize v každém bodě objemu popsat vektorem napětí $\mathbf{T}^{(v)}$. Dále předpokládáme, že v každém bodě objemu je zadána objemová síla \mathbf{F} .

Aby se vydělený objem prostředí nacházel v rovnováze, je nutné a stačí, aby byly splněny následující podmínky

$$\iint_S \mathbf{T}^{(v)} dS + \iiint_V \mathbf{F} dV = 0, \quad (3.2)$$

$$\iint_S (\mathbf{y} \times \mathbf{T}^{(v)}) dS + \iiint_V (\mathbf{y} \times \mathbf{F}) dV = 0, \quad (3.3)$$

kde \mathbf{y} je polohový vektor uvažovaného bodu. První z těchto podmínek požaduje, aby výsledná síla byla rovna nule, druhá požaduje, aby byl nulový výsledný moment.

3. 4. Pohybové rovnice v integrálním tvaru

Předpokládejme nyní, že kontinuum již není v klidu, ale že se pohybuje. Podle d'Alembertova principu dostaneme pohybové rovnice tím, že k podmínkám rovnováhy připojíme tzv. setrvačné síly. Připomeňme, že pro hmotný bod je setrvačná síla rovna záporně vzatému součinu jeho hmoty a zrychlení. Podle tohoto principu dostaneme pohybové rovnice ze (3.2) a (3.3) ve tvaru (viz první a druhá věta impulsová v mechanice soustavy hmotných bodů, [11])

$$\boxed{\iint_S \mathbf{T}^{(v)} dS + \iiint_V \mathbf{F} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV}, \quad (3.4)$$

$$\iint_S (\mathbf{y} \times \mathbf{T}^{(v)}) dS + \iiint_V (\mathbf{y} \times \mathbf{F}) dV = \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{y} \times \rho \mathbf{v}) dV. \quad (3.5)$$

Podrobná diskuse těchto rovnic je podána v [11].

Chtěli bychom zdůraznit, že rovnice (3.2) až (3.5) nikterak nevyplývají z obdobných rovnic pro soustavu hmotných bodů a tuhé těleso, ale jsou samostatnými rovnicemi, samostatnými fyzikálními zákony. Hledali jsme je pouze jako zobecnění rovnic, platících pro soustavu hmotných bodů a tuhé těleso. Všechno, co předcházelo formulování rovnic (3.2) až (3.5), je proto třeba chápat jako pomocné úvahy, jako jakési navození [11]. Meze platnosti rovnic (3.2) až (3.5) je třeba stanovit srovnáním výsledků teorie, založené na těchto rovnicích, s experimenty. Přitom rovnice (3.2) a (3.3) jsou speciální případy rovnic (3.4) a (3.5). Rovnice (3.4) a (3.5) budeme považovat za základní vektorové rovnice mechaniky kontinua, platící i pro nespojitě pohyby prostředí. Z těchto rovnic odvodíme dále, za jistých předpokladů o spojitosti, rovnice v diferenciálním tvaru.

Závěrem upozorníme, že rovnice (3.4) a (3.5) jsou rovnicemi pro klasické případy, kdy momenty plošných a objemových sil jsou nulové. Jestliže tyto momenty vezmeme v úvahu, rovnice (3.4) se sice nezmění, ale v rovnici (3.5) přibudou další členy [11].

3.5. Složky tensoru napětí

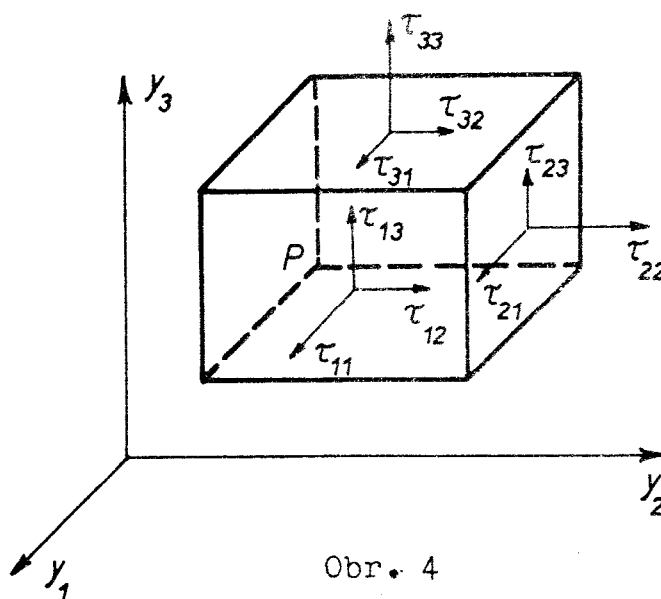
Vraťme se k úvahám o vektoru napětí v paragrafu 3.2. Předpokládali jsme, že účinky plošných sil můžeme popsat pomocí vektoru napětí. Stav napětí v nějakém bodě P bude tedy

popsán, budou-li známa napětí působící na libovolné plošce, procházející bodem P . Předpokládejme, že postačí, omezíme-li se pouze na plošky rovinné. Stav napětí v bodě P bude tedy popsán, budou-li známa napětí na všech rovinných ploškách, procházejících tímto bodem. Takovýchto plošek ovšem můžeme bodem P proložit nekonečně mnoho. Níže ukážeme, že k popisu stavu napětí bude stačit, budeme-li znát napětí na třech ploškách kolmých na souřadnicové osy.

Nechť rovinná ploška ΔS je kolmá k i -té souřadnicové ose. Kladný směr normály zvolme v kladném směru této osy. Složky vektoru napětí působícího na uvažovanou plošku ze strany kladné normály jsou T_1^i, T_2^i, T_3^i . Zavedeme nové označení

$$\tau_{ij} = T_j^{(i)}, \quad (3.6)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$. Souboru devíti veličin τ_{ij} budeme říkat tensor napětí, jednotlivým veličinám τ_{ij} složky tensoru napětí. Všimněte si, že v τ_{ij} první index označuje souřadnicovou osu, ke které je uvažovaná ploška kolmá, druhý index stanoví, o kterou složku vektoru napětí jde. Tedy např. τ_{11}, τ_{12} a τ_{13} označuje složky napětí, které působí na plošku kolmou k první souřadnicové ose, směr normály k této plošce souhlasí se směrem první osy. Na „zápornou“ stranu této plošky, tj. ze strany opačné normály, působí na plošku napětí o složkách $-\tau_{11}, -\tau_{12}, -\tau_{13}$. Obrázek 4 ukazuje kladné směry složek vektoru napětí, působícího na stěnách kvádru. Osy jsou označeny y_1, y_2, y_3 , protože pracujeme s Eulerovými souřadnicemi.



Obr. 4

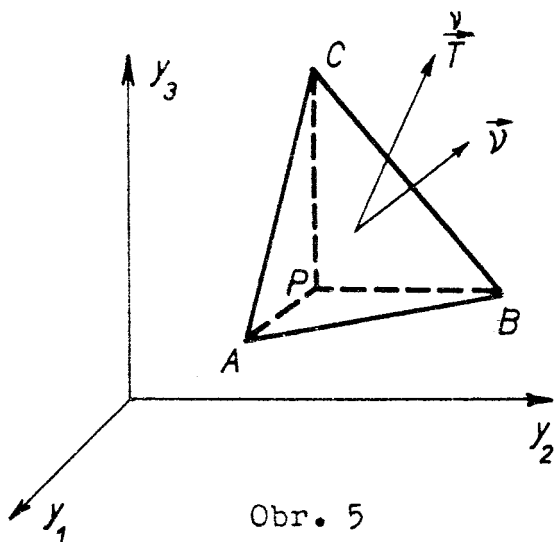
Ukážeme, že pomocí devíti veličin τ_{ij} v bodě P můžeme určit vektor napětí \mathbf{T}^v pro libovolnou orientaci plošného elementu procházejícího bodem P [1]. Abychom našli vztah mezi složkami vektoru \mathbf{T}^v a složkami tensoru napětí τ_{ij} , budeme uvažovat podmínky rovnováhy infinitesimálního čtyřstěnu, jehož tři stěny kolmé na směr souřadnicových os procházejí bodem P , a čtvrtá stěna, vedená ve vzdálenosti h od bodu P , je kolmá na zvolený

směr \vec{v} (obr. 5). Při zmenšování h , viz dále, přejde tato stěna v plošný element procházející rovněž bodem P .

Obsah trojúhelníku ABC označme σ . Obsahy trojúhelníků PBC , PAC a PAB označme postupně σ_1 , σ_2 a σ_3 ; tyto trojúhelníky vzniknou promítnutím trojúhelníka ABC do rovin kolmých na souřadnicové osy. To znamená, že např. σ_1 můžeme vyjádřit jako součin obsahu σ a kosinu úhlu, který svírá rovina ABC s rovinou PBC . Tento kosinus je právě roven v_1 , tj. první složce vektoru \vec{v} , neboť složky v_i ($i=1, 2, 3$) jsou směrovými kosiny normály \vec{v} . Obdobné platí pro průměty do dalších dvou souřadných rovin, tedy

$$\sigma_i = \sigma v_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Dále budeme ještě potřebovat objem čtyřstěnu, který se rovná $V = \frac{1}{3}\sigma h$.



Složky objemové síly, vektoru a tensoru napětí v bodě P označíme F_i , T_i^v a τ_{ij} . Předpokládejme, že objemové síly a napětí jsou spojité funkce souřadnic. Aplikujeme na uvažovaný čtyřstěn podmínku rovnováhy (3.2), jež představuje tři skalární rovnice. Uvažujme rovnici pro i -tou složku. Vzhledem k předpokládané spojitosti můžeme pro objemový integrál psát $(F_i + \varepsilon'_i)\frac{1}{3}\sigma h$ a pro plošné integrály přes jednotlivé stěny čtyřstěnu $(T_i^v + \varepsilon_i)\sigma$, $(-\tau_{1i} + \varepsilon_{1i})\sigma_1$, $(-\tau_{2i} + \varepsilon_{2i})\sigma_2$, $(-\tau_{3i} + \varepsilon_{3i})\sigma_3$. Zde ε'_i , ε_i a ε_{ji} jsou veličiny, pro které platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon'_i = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_{ji} = 0.$$

U veličin τ_{ij} vystupuje znamení minus proto, že vnější normály, tj. normály mířící ven ze čtyřstěnu, mají na příslušných stěnách směr opačný než je směr souřadnicových os. Rovnici rovnováhy můžeme nyní s použitím (3.7) přepsat ve tvaru

$$(T_i^v + \varepsilon_i)\sigma + (-\tau_{ji} + \varepsilon_{ji})\sigma v_j + (F_i + \varepsilon_i')\frac{1}{3}\sigma h = 0. \quad (3.8)$$

Dělme tuto rovnici σ a provedme pak limitní přechod pro $h \rightarrow 0$ tak, aby stěna ABC stále zůstala kolmá na vektor \vec{v} . Dostáváme

$$T_i^v = \tau_{ji} v_j, \quad (3.9)$$

což je již hledaný vztah mezi T_i^v a τ_{ji} .

Všimněme si, že při limitním přechodu vypadly z rovnice (3.8) objemové síly [1]. Je to pochopitelné z toho, že při zmenšování tělesa klesají objemové síly se třetí mocninou lineárního rozměru, kdežto plošné síly jen se druhou mocninou. Protože setrvačná síla je silou objemovou, vyplývá odtud, že vztah (3.9) zůstane v platnosti i pro úlohy dynamické.

3.6. Podmínky rovnováhy v diferenciálním tvaru

Hledejme podmínky rovnováhy kontinua v nějakém bodě P . Uvažujme malý kvádr, jehož stěny jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami a jehož jeden roh leží v bodě P (obr. 4). Délky hran kvádrů označme dy_1 , dy_2 a dy_3 .

Předpokládejme, že složky napětí τ_{ij} působící na „záporných“ stěnách kvádrů jsou složkami napětí v bodech o souřadnicích y_1, y_2, y_3 , tj. napětí $-\tau_{ij}(y_1, y_2, y_3)$. Na „kladné“ stěně kolmé k ose y_1 budou napětí dána funkcemi $\tau_{ij}(y_1 + dy_1, y_2, y_3)$ a obdobně na „kladných“ stěnách kolmých k osám y_2 a y_3 . Ve směru y_1 působí tedy síly: $\tau_{11}(y_1 + dy_1, y_2, y_3)dy_2 dy_3$ a $-\tau_{11}(y_1, y_2, y_3)dy_2 dy_3$ na stěnách kolmých k ose y_1 , $\tau_{21}(y_1, y_2 + dy_2, y_3)dy_1 dy_3$ a $-\tau_{21}(y_1, y_2, y_3)dy_1 dy_3$ na stěnách kolmých k ose y_2 , $\tau_{31}(y_1, y_2, y_3 + dy_3)dy_1 dy_2$ a $-\tau_{31}(y_1, y_2, y_3)dy_1 dy_2$ na stěnách kolmých k ose y_3 . Objemová síla má složku do osy y_1 rovnou $F_1 dy_1 dy_2 dy_3$. Součet všech těchto sil se má rovnat nule. Jestliže v tomto součtu rozvineme výrazy obsahující diferenciály do Taylorovy řady a zanedbáme členy druhého a vyšších řádů, dostaneme po vydělení objemu kvádrů $dy_1 dy_2 dy_3$ rovnici

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial y_3} + F_1 = 0.$$

To je již hledaná podmínka rovnováhy pro složky sil ve směru osy y_1 . Obdobně odvodíme rovnice pro další dvě složky. Dostáváme tak rovnice rovnováhy ve tvaru

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial y_j} = 0. \quad (3.10)$$

Abychom mohli ve výše zmíněném Taylorově rozvoji zanedbat druhé a vyšší derivace, musíme učinit předpoklad, že první derivace tensoru napětí $\partial \tau_{ji} / \partial y_j$ jsou spojité; viz obdobnou úvahu při odvozování vzorce (2.6). Z podmínky rovnováhy v integrální tvaru (3.2)

tedy plyne podmínka rovnováhy v diferenciálním tvaru (3.10) tehdy, jsou-li F_i , τ_{ji} a $\partial\tau_{ji}/\partial y_j$ spojitými funkcemi souřadnic.

Analogicky bychom postupovali při úpravách rovnice (3.3) pro momenty sil. Podrobné odvození lze nalézt např. v [1]. Bez odvození uvedme, že podmínka rovnováhy pro momenty vede k podmínce

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} . \quad (3.11)$$

Tato podmínka říká, že tensor napětí je symetrický, tj. může mít nejvýše šest různých složek.

Poznamenejme, že v případech, kdy nelze zanedbat momenty plošných nebo objemových sil diskutované v paragrafu 3.2, zůstává sice v platnosti rovnice (3.10), ale v rovnici (3.11) přibývají další členy, takže tensor napětí již není symetrickým [5, 11]. My však budeme dále uvažovat pouze případy, kdy tensor napětí je symetrický.

Matematicky elegantnější odvození rovnic (3.10) a (3.11) lze provést užitím Gaussovy věty. Pomocí ní se plošné integrály v (3.2) a (3.3) převedou na integrály objemové a z nich bezprostředně plynou podmínky rovnováhy v diferenciálním tvaru [1, 6].

3.7. Pohybové rovnice v diferenciálním tvaru

Pohybovou rovnici dostaneme podle d'Alembertova principu tím, že k silám v podmínce rovnováhy připojíme setrvačnou sílu na jednotku objemu, tj.

$$-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} , \quad (3.12)$$

kde ρ je hustota a \mathbf{v} je rychlost pohybu částice kontinua. Pohybová rovnice má tedy ve složkách tvar

$$F_i + \frac{\partial\tau_{ji}}{\partial y_j} = \rho \frac{dv_i}{dt} . \quad (3.13)$$

Protože fyzikální zákony se formulují pro hmotné částice, musíme derivaci podle času v (3.12), resp. (3.13), rovněž chápat jako derivaci pro pevně zvolenou hmotnou částici [11]. Pro tuto derivaci dostaneme různé výrazy podle toho, bude-li rychlost vyjádřena v Lagrangeových nebo Eulerových souřadnicích. Nechť je \mathbf{v} vyjádřena v Lagrangeových souřadnicích x_1, x_2, x_3, t (v dynamických úlohách přistupuje k prostorovým souřadnicím ještě čas t), tj. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_i, t)$. Pak platí

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} , \quad (3.14)$$

neboť pro zvolenou částici jsou souřadnice x_i konstantní; zopakujme, že souřadnice x_i udávají polohu částice v nedeformovaném stavu. Vyjádřeme ještě rychlost pomocí posunutí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_i, t)$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} . \quad (3.15)$$

Setrvačnou sílu můžeme tedy vyjádřit v Lagrangeových souřadnicích jako $-\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$. Abychom celou pohybovou rovnici (3.13) vyjádřili v Lagrangeových souřadnicích, musíme ještě na levé straně vyloučit souřadnice y_i , podle kterých se derivuje. Podmínka (2.42), požadující, aby derivace posunutí byly malé, zajišťovala, že k popisu deformací postačil tensor malých deformací, tj. nebylo třeba rozlišovat mezi Lagrangeovými a Eulerovými souřadnicemi. Jestliže kromě toho budou malé i derivace napětí tak, že součin derivace napětí a derivace posunutí je malá veličina druhého řádu, bude možné pokládat derivace $\partial \tau_{mn} / \partial y_j$ a $\partial \tau_{mn} / \partial x_j$ za stejné až na malé veličiny druhého řádu. Podrobnostmi důkazu tohoto tvrzení se zabývat nebudeme, uveďme pouze základní souvislost derivací tensoru napětí v Lagrangeových a Eulerových souřadnicích; ze vztahu $y_k = x_k + u_k$ plyne

$$\frac{\partial \tau_{mn}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{mn}}{\partial y_k} \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Za zmíněných předpokladů dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\boxed{F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}}. \quad (3.16)$$

Tato rovnice patří k nejdůležitějším rovnicím v mechanice kontinua. Je jednou z výchozích rovnic v teorii šíření seismických vln.

Pro zajímavost uveďme bez odvozování pohybovou rovnici v Eulerových souřadnicích:

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial y_j} v_j \right), \quad (3.17)$$

kde výraz na pravé straně jsme vyjádřili pomocí složek rychlosti. Povšimněme si, že v případech, kdy lze na pravé straně zanedbat poslední člen, nabývá tato rovnice podobného tvaru jako rovnice (3.16)

4. VZTAH MEZI DEFORMACÍ A NAPĚTÍM

4.1. Reologická klasifikace látek

Dosud jsme se nezabývali vztahy mezi deformací a napětím, které budeme potřebovat pro řešení pohybové rovnice kontinua. Vzájemný vztah mezi deformací a napětím závisí na charakteru látky, různý je pro plyn, kapalinu a pevnou látku, ale i mezi látkami téhož skupenství jsou veliké rozdíly. Určováním vztahu mezi napětím a deformací se zabývá reologie. Přesné závislosti mezi deformací a napětím jsou obvykle značně složité, proto reologie zavádí modely, které přibližně vystihují charakter deformačního chování různých skupin látek. Uvedme stručně základní vlastnosti látek elastických, viskosních a plastických, podrobnosti viz [3].

Látku nazveme elastickou (pružnou), jestliže se při uvolnění vnějších sil plně vrací ze stavu deformovaného do stavu původního. Speciálním případem je lineárně elastická látka, kdy mezi deformací a napětím platí přímá úměrnost. Isotropní lineárně elastická látka se nazývá látkou hookovskou (platí zde Hookův zákon, [3]).

Viskosní látka je charakteristická tím, že při zadaném napětí roste deformace neomezeně s časem. Do vztahu mezi deformací a napětím vstupuje tedy čas; příkladem takových látek jsou kapaliny. Speciálním případem jsou tzv. newtonovské látky, pro něž platí lineární vztah mezi napětím a rychlostí deformace.

Plastickými nazýváme látky, u nichž tečení (tečením zde rozumíme pohyb, při kterém rychlost deformace je různá od nuly) nastává až po překročení jisté mezní hodnoty napětí. Plastické vlastnosti vykazují např. kovy při větších napětích a mnohé makromolekulární látky.

Mnohé látky vykazují chování na rozhraní mezi látkami kapalnými a pevnými. Příkladem může složit asphalt, smůla, sklo aj. Nejjednodušším modelem, popisujícím chování takovýchto látek, je model viskoelastické látky, která vznikne kombinací vlastností newtonovské viskosní kapaliny a hookovské elastické látky. O těchto podrobnostech se zmiňujeme proto, že i mnohé vlastnosti hornin lze popsat jako vlastnosti viskoelastické látky (např. útlum seismických vln v horninách); v tomto směru se v poslední době rozvíjí velmi intenzivní výzkum. My však v dalším nebudeme uvažovat takové složité modely prostředí, ale omezíme se pouze na kontinuum lineárně elastické.

4.2. Zobecněný Hookův zákon

V klasickém Hookově zákoně, vyjadřujícím lineární vztah mezi napětím a relativním prodloužením, pro jednoduchost uvažujeme deformace jen v tom směru, ve kterém působí napětí. V předcházejících kapitolách jsme ukázali, že deformaci a stav napjatosti můžeme popsat pomocí tensorů. Klasický Hookův zákon zobecníme proto tak, že budeme předpokládat obecný lineární vztah mezi tensorem napětí a tensorem deformace, tj.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (4.1)$$

Tomuto vztahu budeme říkat zobecněný Hookův zákon, veličiny C_{ijkl} budeme nazývat elastickými koeficienty. Vztah (4.1) vystihuje chování velmi široké skupiny látek včetně mnohých látek anisotropních jako jsou např. krystaly.

Celkový počet koeficientů C_{ijkl} je $3^4 = 81$. Protože však jsou tensor napětí i tensor deformace symetrické, snižuje se tím počet nezávislých koeficientů na $6 \times 6 = 36$. Dále lze

ukázat, že z energetických úvah plyne symetrie elastických koeficientů při záměně první a druhé dvojice indexů [1], tj. $C_{ijkl} = C_{klij}$. Tím se počet nezávislých elastických koeficientů snižuje na 21. Tomuto počtu elastických koeficientů odpovídá trojklonná krystalová soustava. Pro krystaly s vyšší symetrií se počet nezávislých elastických koeficientů dále snižuje [1]. Tak u soustavy jednodlonné je 13 nezávislých elastických koeficientů, pro kosočtverečnou 9, pro krychlovou 3 nezávislé elastické koeficienty. Isotropní látka, která je charakterizovaná tím, že její vlastnosti jsou ve všech směrech stejné, lze popsat dvěma elastickými koeficienty. V teoretických pracích se za tyto dva koeficienty obvykle berou tzv. Laméovy koeficienty λ a μ , zobecněný Hookův zákon má pak tvar

$$\tau_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (4.2)$$

kde $\vartheta = \text{div } \mathbf{u} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ je objemová dilatace.

Odvození nezávislých elastických koeficientů se obvykle provádí tak, že se vyšetřují změny těchto koeficientů při otočení soustavy souřadnic [1]. Tato odvození jsou značně zdlouhavá, zde je provádět nebudeme. Provedeme pouze zjednodušené odvození zobecněného Hookova zákona pro isotropní prostředí (4.2). Vyjdeme z představy, že deformace isotropního tělesa se skládá ze dvou nezávislých částí, z deformace objemové a deformace tvarové [3]. V paragrafu 2.6 jsme odvodili, že tensor malých deformací e_{ij} můžeme rozdělit na část objemovou a část tvarovou následujícím způsobem

$$e_{ij} = f_{ij} + g_{ij} = \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} + \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \right). \quad (4.3)$$

Obdobnou identitu můžeme napsat i pro tensor napětí

$$\tau_{ij} = p_{ij} + q_{ij}, \quad (4.4)$$

kde

$$p_{ij} = \frac{1}{3} \kappa \delta_{ij}, \quad q_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \kappa \delta_{ij}, \quad \kappa = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}. \quad (4.5)$$

Podle analogií lze očekávat, že napětí p_{ij} vyvolávají změny objemu, napětí q_{ij} změny tvaru. Budeme požadovat existenci dvou koeficientů k_1 a k_2 , kde k_1 vyjadřuje úměrnost mezi objemovými částmi tensoru napětí a tensoru deformace, k_2 vyjadřuje přímou úměrnost mezi částmi tvarovými:

$$p_{ij} = k_1 f_{ij}, \quad q_{ij} = k_2 g_{ij}. \quad (4.6)$$

Je snad zřejmé, že poslední úvahy jsou dělány hodně „podle citu“; aby odvozování vzorce (4.2) bylo úplné a přesné, museli bychom nejprve řádně dokázat, že pro isotropní prostředí lze skutečně psát přímé úměrnosti (4.6). Užitím (4.4), (4.6) a (4.3) nyní dostáváme

$$\tau_{ij} = k_1 f_{ij} + k_2 g_{ij} = \frac{1}{3} (k_1 - k_2) \vartheta \delta_{ij} + k_2 e_{ij}. \quad (4.7)$$

Zavedeme-li nové označení, nové elastické koeficienty λ a μ vztahy

$$\lambda = \frac{1}{3}(k_1 - k_2), \quad 2\mu = k_2, \quad (4.8)$$

dospíváme ihned ke vzorci (4.2).

4.3. Pohybové rovnice pro homogenní anisotropní prostředí

Jsou-li elastické koeficienty v různých místech tělesa různé, mluvíme o tělese nehomogenním. Dále se omezíme pouze na příklady homogenních těles, kdy elastické koeficienty jsou pro celé těleso konstanty.

Uvažujme anizotropní homogenní prostředí. Dosadíme do pohybové rovnice (3.16) výraz pro zobecněný Hookův zákon (4.1) a tensor deformace vyjádříme pomocí posunutí, vzorec (2.35). Dostáváme

$$F_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijkl} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (4.9)$$

Upravme druhý výraz v hranaté závorce. V důsledku symetrie elastických koeficientů a protože sčítání indexů je libovolné, můžeme psát

$$C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = C_{ijlk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (4.10)$$

O správnosti těchto výrazů se můžeme přesvědčit rozepsáním příslušných devíti výrazů (sčítání podle k a l). Užitím (4.10) a předpokladu o homogenitě lze rovnici (4.9) upravit na konečný tvar

$$F_i + C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (4.11)$$

4.4. Pohybová rovnice pro homogenní isotropní prostředí

Dosadíme do pohybové rovnice (3.16) výraz pro zobecněný Hookův zákon pro isotropní prostředí (4.2):

$$F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \vartheta \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (4.12)$$

Jsou-li elastické koeficienty konstantní, platí

$$F_i + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (4.13)$$

Připomeňme význam některých označení:

$$\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} = \Delta u_i, \quad \operatorname{grad} \vartheta = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}, \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}, \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} \right),$$

operátor Δ nazýváme Laplaceovým operátorem. Rovnici (4.13) můžeme nyní vyjádřit v posunutích ve tvaru

$$F_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (4.15)$$

Tato rovnice představuje tři složkové rovnice ($i = 1, 2, 3$), které mohou být vyjádřeny jednou vektorovou rovnicí ve tvaru

$$\mathbf{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.16)$$

Zde Laplaceovou operací na vektor rozumíme provedení Laplaceovy operace na jednotlivé složky (takto lze zavádět jen v kartézských souřadnicích). Rovnice (4.15), resp. (4.16), jsou hledané pohybové rovnice pro homogenní isotropní prostředí. Zavedeme-li ještě místo \mathbf{F} objemovou sílu \mathbf{g} vztaženou na jednotku hmoty, tj.

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}, \quad (4.17)$$

můžeme (4.16) přepsat ve tvaru

$$\rho \mathbf{g} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.18)$$

Tato rovnice bude výchozí rovnicí ve skriptech, pojednávajících o šíření seismických vln.

Všimněme si, jak by se pohybová rovnice změnila, kdyby prostředí bylo isotropní, ale nehomogenní. Ze (4.12) plyne, že na levé straně rovnice (4.15) přibyl by ještě člen

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.19)$$

Závěrem ještě poznámka o matematických předpokladech. Ve třetí kapitole jsme při odvozování pohybové rovnice v diferenciálním tvaru museli učinit předpoklad, že složky tensoru napětí mají spojité první derivace podle souřadnic. Podíváme-li se na zobecněný Hookův zákon, je zřejmé, že vše bude v pořádku, jestliže budou spojité první derivace elastických koeficientů a druhé derivace posunutí. Z hlediska šíření elastických vln to má tyto důsledky:

a) V místech nespojitosti elastických koeficientů musíme pro zajištění spojitosti posunutí a napětí předpokládat vznik odražených a lomených vln.

b) V místech nespojitosti prvních derivací elastických koeficientů dává tzv. paprsková teorie nesprávné (nespojité) hodnoty amplitud vln.

4.5. Přehled nejdůležitějších vzorců

Uvedme nejdůležitější vzorce z hlediska seismiky, které byly odvozeny v těchto skriptech:

- Vyjádření tensoru malých deformací e_{ij} pomocí vektoru posunutí \mathbf{u} ,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (2.37)$$

- Pohybová rovnice kontinua

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad (3.16)$$

- Zobecněný Hookův zákon pro isotropní prostředí

$$\tau_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (4.2)$$

- Pohybová rovnice pro homogenní isotropní prostředí

$$\rho \mathbf{g} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.18)$$

Pro anisotropní prostředí má zobecněný Hookův zákon tvar (4.1) a pohybová rovnice pro homogenní anisotropní prostředí má tvar (4.11).

LITERATURA

Níže uvedený seznam neobsahuje veškerou použitou literaturu, ale pouze literaturu nejdůležitější a nejsnadněji dostupnou. K dalšímu studiu doporučujeme zejména knihy [1], [5] a [4], velmi podrobné seznamy literatury jsou v [5] a [12].

- [1] M. Brdička: *Mechanika kontinua*. NČSAV, Praha 1959.
- [2] A. Hladík: *Teoretická mechanika*. SPN, Praha 1972 (skripta).
- [3] A. Havránek: *Mechanika II*. SPN, Praha 1974 (skripta).
- [4] A.E.H. Love: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4-th ed., Cambridge University Press, Cambridge 1927.
- [5] Y.C. Fung: *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1965.
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifšic: *Teorija uprugosti*. Nauka, Moskva 1965.
- [7] I.S. Sokolnikoff: *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York 1946.
- [8] F.A. McClintock, A.S. Argon: *Mechanical Behavior of Materials*. Addison-Wesley, Reading 1966. (Ruský překlad: F. Makklintok, A. Argon: *Deformacija i razrušenje materialov*. Mir, Moskva 1970.)
- [9] V.V. Novožilov: *Teorija uprugosti*. Sudpromgiz, Leningrad 1958.
- [10] A.A. Il'jušin: *Mechanika splošnoj sredy*. Izd. Moskov. Univ., Moskva 1971.
- [11] L.I. Sedov: *Mechanika splošnoj sredy*. I. Nauka, Moskva 1973.
- [12] A.I. Lur'je: *Teorija uprugosti*. Nauka, Moskva 1970.
- [13] K. Rektorys a spol.: *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha 1963.