

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta



DIPLOMOVÁ PRÁCE

LUBOMÍR KOŠTÁL

Vlastní kmity maxwellovských modelů Země

Katedra geofyziky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc

Děkuji doc. Matyskovi a Dr. Hanykovi za přátelskou atmosféru, která na konzultacích panovala. Zvláště děkuji Dr. Hanykovi za poskytnutý software a informace z oblasti numerických výpočtů.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze, 12. srpna 2003,

Lubomír Košťál

Obsah

1	Úvod	7
2	Teoretická část	8
2.1	Úvod do problematiky vlastních kmitů Země	8
2.2	Maxwellovská reologie	11
2.3	Matematické intermezzo	12
3	Numerická implementace úlohy	15
3.1	Diskretizace	15
3.2	Okrajové podmínky	19
4	Postup při řešení problému	23
4.1	Metody řešení problému	23
4.2	Knihovna ARPACK – Arnoldiho metoda	26
4.3	Elastický model	30
4.4	Chování viskoelastického modelu	32
4.4.1	Metoda vlastních čísel	32
4.4.2	Metoda soustavy lineárních rovnic	39
4.4.3	Složitější modely	44
4.5	SVD analýza	45
5	Závěr	47
	Literatura	48

Název práce: Vlastní kmity maxwellovských modelů Země

Autor: Lubomír Košťál

Katedra: Katedra geofyziky, MFF UK Praha

Vedoucí diplomové práce: Doc.RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

e-mail vedoucího: cm@karel.troja.mff.cuni.cz

Konzultant: RNDr. Ladislav Hanyk, PhD.

e-mail konzultanta: lh@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Na základě metody vlastních čísel vyvinuté v Hanyk a kol. (2002) pro případ postglaciálního výzdvihu jsou počítány vlastní frekvence modelů Země s maxwellovskou reologií. Uvažovány jsou pouze nerotující, sféricky symetrické izotropní modely, kde fyzikální parametry jsou realizovány po částech konstantními funkcemi. Jsou ukázány překážky znemožňující přímočarý výpočet frekvencí. V důsledku jsou uvedeny dvě aproximativní metody výpočtu: linearizovaná metoda vlastních čísel a metoda soustavy lineárních rovnic. Jejich nedostatečnost při výpočtu i jednoduchých modelů je prokázána analýzou singulárního rozkladu komplexních matic vstupujících do programu.

Klíčová slova: vlastní kmity, viskoelasticita, maxwellovská reologie, metoda vlastních čísel, ARPACK

Title: Free Oscillations of Earth Models with Maxwell rheology

Author: Lubomír Košťál

Department: Department of Geophysics, MFF UK Prague

Supervisor: Doc.RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Supervisor's e-mail address: cm@karel.troja.mff.cuni.cz

Consultant: RNDr. Ladislav Hanyk, PhD.

Consultant's e-mail address: lh@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: Using the eigenvalue approach method developed in Hanyk a kol. (2002) for the problem of postglacial rebound we try to compute the frequencies of free oscillations of Earth models with Maxwell rheology. Only the non-rotating, spherically symmetric, isotropic Earth models are considered. Physical parameters are realized by piecewise constant functions. Obstacles preventing the direct way of eigenvalue computation are introduced along with two resulting approximation methods: the linearized eigenvalue method and the method of system of linear equations. Their insufficiency for even the simplest models is proved by SVD of the input complex matrices.

Keywords: free oscillations, viscoelasticity, Maxwell rheology, eigenvalue approach, ARPACK

1 Úvod

Úkolem předkládané diplomové práce bylo zkoumat frekvence vlastních kmitů nerotujícího, sféricky symetrického izotropního modelu Země s maxwellovskou reologií, kde radiální závislosti vstupních parametrů byly realizovány po částech konstantními funkcemi. K nalezení frekvencí vlastních kmitů pomocí vlastních čísel bylo užito přístupu aplikovaného v Hanyk a kol. (2002) na problém postglaciálního výzdvihu. K vlastní numerické realizaci pak bylo užito modifikovaného softwaru vyvinutého tamtéž.

Práce je rozdělena do následujících menších celků.

- Maximálně stručný úvod do teorie vlastních kmitů. Cílem invariantního fyzikálního popisu je nalezení pohybové rovnice pro vektor posunutí \mathbf{u} v případě obecného modelu Země.
- Zavedení maxwellovské reologie. Jako motivační příklad je analyzováno chování velmi jednoduchého jednorozměrného maxwellovského systému.
- Čistě matematická vsuvka sloužící k zavedení velmi užitečné báze sférických harmonických funkcí.
- V části o numerické implementaci úlohy se nejprve věnujeme proceduře vedoucí od invariantního popisu problému přes rozklady do báze sférických harmonik až k prostorové diskretizaci vzniklých rovnic. Okrajovým podmínkám je věnována samostatná část.
- Neméně důležitou částí jsou navržené metody pro řešení úlohy.
- Po zmínce o užitém softwaru následují výsledky výpočtů.
- A konečně v závěrečné části je učiněn pokus o vysvětlení nezdaru při řešení úlohy.

2 Teoretická část

2.1 Úvod do problematiky vlastních kmitů Země

Uvažujme model Země, jenž je v počátečním stavu $S(t = 0)$, ve stavu hydrostatické rovnováhy, během vlastních kmitů pak v časově proměnném stavu $S'(t)$. Základní úlohou v teorii vlastních kmitů je nalezení rovnice popisující vektor posunutí \mathbf{u} v celém objemu modelu. Tento vektor je definován jako

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

kde \mathbf{x} resp. \mathbf{x}' jsou polohové vektory elementárních objemových částic ve stavu S resp. S' .

Je třeba si uvědomit, že počáteční stav S je (zejména v případě Země) stavem předpjatým, v němž působí hydrostatické napětí dané Cauchyho tenzorem \mathbf{t}_0 a rovnicí rovnováhy

$$\nabla \cdot \mathbf{t}_0 + \varrho_0 \mathbf{f}_0 = 0, \quad (2)$$

kde ϱ_0 je počáteční hustota a \mathbf{f}_0 tíhová síla. Klasická teorie elasticity (Hookův zákon) platí však jen pro deformace z nepředpjatého stavu. Řešením je rozepsat napětí ve stavu S' na předpětí dané (2) a na přírůstkovou část počítanou Hookovým zákonem, přičemž část přírůstková je mnohem menší než část počáteční. Zde je však třeba důsledně rozlišit mezi Eulerovským a Lagrangeovským popisem kontinua. Předpětí v bodě A ve stavu S' není totiž rovno napětí v tomtéž bodě ve stavu S , ale napětí v takovém bodě B ve stavu S , jenž působením deformace přejde do bodu A v S' . Uvažujme tedy elementární plošku $d\Sigma$ a normálu \mathbf{n} k ní v bodě B ve stavu S a plošku $d\Sigma'$ s normálou \mathbf{n}' v bodě A ve stavu S' . Elementární sílu $d\mathbf{s}'$ v bodě A v deformovaném stavu pak díky předchozí úvaze počítáme pomocí prvního Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí \mathbf{T} jako

$$d\mathbf{s}' = d\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (3)$$

To nás vede k důslednému užití Lagrangeovského popisu. I když $d\mathbf{s}'$ je formálně Eulerovská veličina, \mathbf{T} je díky (3) veličinou Lagrangeovskou – při zavedení jednotné soustavy souřadné pro S i S' je dokonce tenzorem.

Použití \mathbf{T} jako výchozího tenzoru napětí pro další výpočty je ovšem nepraktické, budeme chtít i nadále pracovat se standardními elastickými parametry λ a μ a tedy i s Eulerovským Cauchyho tenzorem \mathbf{t} . Jinými slovy chceme vyjádřit \mathbf{t} v Lagrangeovském pojetí, nalézt vztah pro přírůstkový Cauchyho tenzor napětí pomocí Piola-Kirchhoffova tenzoru.

Jak již bylo zmíněno, základní úvahou pro popis vlastních kmitů předpjatého kontinua je rozpis potřebných veličin na počáteční a přírůstkovou

část. Důležitým omezením pro veškeré následující úvahy je linearizace přírůstků. Např. na rovnici (1) můžeme nahlížet jako

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

kde $\varepsilon \rightarrow 0$. (Taková linearizace není triviální, uvědomme si, že například v energetických úvahách vystupují členy druhého řádu v \mathbf{u} .) V souladu s (4) rozložíme i \mathbf{t} a \mathbf{T}

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t), \quad (6)$$

kde jsme přírůstkové veličiny označili pruhem. Dále si uvědomíme, že

$$t_{kl} = \frac{1}{j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} T_{ml}. \quad (7)$$

Tento vztah dále linearizujeme úpravou determinantu jakobiánu j

$$j = \det \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_m} \right) \doteq 1 + \varepsilon u_{k,k} \quad \Rightarrow \quad j^{-1} \doteq 1 - \varepsilon u_{k,k}. \quad (8)$$

Dosažením získáme hledaný vztah (index T značí transpozici)

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{T}} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{t}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{t}_0. \quad (9)$$

Abychom získali pohybovou rovnici pro \mathbf{u} rozepíšeme analogicky k (5) i sílu \mathbf{f}' a porovnáme s Taylorovým rozvojem do prvního řádu zapsaného užitím (4)

$$f'_l(\mathbf{x}', t) \approx f_{(0)l}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \left. \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}} u_k(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \bar{f}_l(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

kde jsme už přidali přírůstkovou sílu $\bar{\mathbf{f}}$, buzenou změnami potenciálu při kmitech. Pohybová rovnice pro \mathbf{u} zapsaná pomocí přírůstkového Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí pak zní

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} + \varrho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f}_0 + \bar{\mathbf{f}}) = \varrho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Pro konečnou obecnou pohybovou rovnici zbývá již jen explicitně vyjádřit \mathbf{f}_0 a $\bar{\mathbf{f}}$. Bude nás zajímat potenciál Φ generující takovou sílu. Uvažujme jej složený z potenciálu gravitačního φ a potenciálu buzeného rotací Země ψ . V počátečním stavu S tak máme $\Phi_0 = \varphi_0 + \psi_0$, kde

$$\psi_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} ((\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2) \quad (12)$$

je potenciál způsobený rotací při konstantním vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}$. Ihned vidíme, že případný přírůstkový potenciál ψ_1 by obsahoval v \mathbf{u} veličiny

až druhého řádu, a proto $\psi_1 = 0$. Pro analýzu gravitačního potenciálu, jenž v S splňuje Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi_0 = 4\pi G \varrho_0, \quad (13)$$

je třeba zvážit změnu hustoty při kmitech. Rádi bychom pracovali s lokálními přírůstky hustoty (Eulerovskými) a zachovali tak tvar Poissonovy rovnice, zvláště kvůli jednoduchosti zápisu podmínek pro potenciál na rozhraních. Toho docílíme trikem, kdy deformace rozhraní nahradíme změnou plošné hustoty. Pro hustotu ϱ ve stavu S' píšeme

$$\varrho(\mathbf{x}', t) = \frac{\varrho_0(\mathbf{x})}{j} \approx \varrho_0(\mathbf{x})(1 - \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad (14)$$

kde ϱ_0 je hustota v S . Nyní Taylorovsky rozvineme $\varrho(\mathbf{x}')$ v bodě \mathbf{x} užitím (4)

$$\varrho(\mathbf{x}', t) \approx \varrho(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \nabla \varrho_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}}. \quad (15)$$

Rozložíme-li dále hustotu dle (5) na počáteční a přírůstkovou část $\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \varrho_1(\mathbf{x}, t)$, dostáváme

$$\varrho_1(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot (\varrho_0 \mathbf{u}) \quad \text{a} \quad \nabla^2 \varphi_1 = 4\pi G \varrho_1, \quad (16)$$

kde φ_1 je přírůstkový gravitační potenciál. Tím jsme vyřešili problém celkového tíhového počátečního a přírůstkového potenciálu a můžeme dosadit do pohybové rovnice (11). Tu přepíšeme pomocí (9) na tvar pro Cauchyho přírůstkový tenzor napětí

$$\begin{aligned} \varrho_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \varphi_1 + \nabla(\nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla \Phi_0 \right) = \\ = \nabla \cdot \bar{\mathbf{t}} - \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{t}_0] + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{t}_0, \end{aligned} \quad (17)$$

přičemž \mathbf{t}_0 splňuje rovnici hydrostatické rovnováhy

$$\nabla \cdot \mathbf{t}_0 - \varrho_0 \nabla \varphi_0 = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Rovnice (17) je tak hledanou pohybovou rovnicí popisující vektor posunutí \mathbf{u} pro obecný model Země. Na závěr je třeba ještě splatit dluh v podobě okrajových podmínek, které uvádíme až nyní přehledně pro jednotlivé typy rozhraní (\mathbf{n} je normálový vektor k rozhraní).

$$\text{obecně} \quad [\varphi_1]_{-}^{+} = 0, \quad [\nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} + 4\pi G \varrho_0(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})]_{-}^{+} = 0 \quad (19)$$

$$\text{(pevné-pevné)} \quad [\mathbf{u}]_{-}^{+} = 0, \quad [\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0 \quad (20)$$

$$\text{(pevné-kapalné)} \quad [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0, \quad [\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0 \quad (21)$$

$$\text{(volné)} \quad \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (22)$$

2.2 Maxwellovská reologie

Nejprve se budeme zabývat jednorozměrnou variantou reologie – tedy vztahu mezi deformací x a napětím σ . Maxwellovská reologie je tzv. viskoelastická, lze ji znázornit jako sériově složený systém elastické pružiny tuhosti k a pístu o viskozitě η .

Analyzujeme nejprve (jako motivaci pro daleko komplikovanější případ modelu Země) právě takový diskrétní 1-D případ. Vztah mezi napětím a deformací pro pružinu je $\sigma = kx$ a pro píst $\sigma = \eta\dot{x}$, kde tečka značí derivaci dle času. V případě sériového zapojení je výsledná deformace rovna součtu elastické a viskózní části, proto náš systém popisuje rovnice

$$\frac{dx}{dt} - \frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (23)$$

Zajímá nás velikost síly (napětí) σ , jež se při dané výchylce x bude snažit uvést systém zpět do rovnováhy v závislosti na frekvenci výchylky. Lepší a hlavně jednodušší než zkoumat průběh $\sigma(t)$ jako odezvu systému na zkracující se puls v $x(t)$ je zkoumat tento „puls“ jen z jedné strany. Uvažujme tedy okamžitý nárůst x v čase $t = 0$ na konstantní hodnotu x_0 . Řešením (23) pro $t > 0$ je

$$\dot{\sigma} + \frac{k}{\eta} \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = A e^{-\xi t}, \quad (24)$$

kde $1/\xi = \eta/k$ je tzv. maxwellovký čas. Nyní dopočteme konstantu A , pokusíme se tak prodloužit řešení až do bodu $t = 0$ zprava. Využijeme principu kauzality: hodnota σ jakožto „vratné“ síly je důsledkem hodnoty x , a tudíž pokud je pro $t < 0$ hodnota $x = 0$ musí v této oblasti být i $\sigma = 0$. Dále použijeme fyzikální požadavek, aby při konečně velkých změnách x bylo i $\sigma < \infty$ nezávisle na rychlosti změny. S těmito zvláštními předpoklady můžeme opatrně zkoumat limitu $t \rightarrow 0^-$ rovnice (23). Dle definice je

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \dot{x}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(0) - x(-dt)}{dt}. \quad (25)$$

Rovnici (23) vynásobíme dt a užitím zmíněných předpokladů po úpravě máme

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left(x_0 - \frac{1}{\mu} \sigma(0) \right) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \sigma(0) dt. \quad (26)$$

Pravá strana (26) jde díky konečnosti σ k nule, levá tudíž také a v limitě nekonečných frekvencí máme $A = \sigma(0) = \mu x_0$, tedy vratná síla je čistě elastická. Můžeme tedy učinit závěr, že čím nižší je frekvence změny deformace, tím více je velikost σ „ochuzena“ oproti maximální (elastické) hodnotě. Toto je dle zřejmě samotný princip tlumení v případě maxwellovské reologie.

Je zajímavé, že podobná explicitní analýza chování pro daleko zajímavější spojitě jednorozměrné systémy by byla velmi obtížná. Pokud bychom chtěli

např. zkoumat příčné kmity struny při reologii (23) (nebo při jakékoliv jiné, i elastické reologii) nesměli bychom při odvozování rovnice zanedbat prodloužení struny. Výsledná vlnová rovnice by se stala silně nelineární a bez dalších aproximací zřejmě těžko řešitelná.

Bez dalšího odvozování zapíšeme ještě vztah pro trojrozměrnou maxwellovskou reologii pro Cauchyho tenzor napětí (Hanyk (1999))

$$\dot{\mathbf{t}}^E - \frac{\mu}{\eta} (\mathbf{t} - K(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}) = \dot{\mathbf{t}}, \quad (27)$$

kde koeficient adiabatické nestlačitelnosti K je definován pomocí Laméových parametrů $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ a \mathbf{t}^E je elastická část tenzoru splňující

$$\mathbf{t}^E = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad (28)$$

2.3 Matematické intermezzo

Až dosud jsme užívali invariantní popis fyzikálního problému. Pro další postup bude dobré nalézt vhodnou bázi pro naši úlohu, ve které budeme reprezentovat skalární a vektorové funkce.

V souladu s jednorozměrným případem řešení příčných kmitů struny na uzavřeném intervalu, kdy vhodné bázové funkce představují série funkcí sinus a cosinus, se pokusíme naleznout nějaké vhodné bázové funkce pro náš případ. Zavedeme standardní sférické souřadnice

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (29)$$

při $\vartheta \in (0, \pi)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Budeme zkoumat především funkce a operátory na sféře jednotkového poloměru, tedy $r = 1$, se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) g^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (30)$$

Ještě zmíníme důležitou větu lineární algebry (hvězdička značí hermitovské sdružení):

Věta 1. *Nechť $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ je operátor a platí $\mathcal{L} \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^* \mathcal{L}$. Pak existuje base \mathbb{V} tvořená vlastními vektory \mathcal{L} .*

Zkoumejme tedy jeden z nejdůležitějších operátorů, Laplaceův operátor, resp. díky $r = 1$ jen jeho úhlovou část ∇_Ω^2 tvaru

$$\nabla_\Omega^2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (31)$$

Pokusíme se nalézt vlastní funkce $Y(\vartheta, \varphi)$ tohoto operátoru

$$\nabla_\Omega^2 Y(\vartheta, \varphi) = \lambda Y(\vartheta, \varphi). \quad (32)$$

Takto zadaná úloha ovšem není jednoznačná. Funkce $Y(\vartheta, \varphi)$ jsou také vlastními funkcemi operátoru \mathcal{M}

$$\mathcal{M} = i \frac{d}{d\varphi}, \quad (33)$$

s vlastními čísly $m \in \mathbb{Z}$ jako důsledek nevyhnutelné 2π -periodicity funkcí na jednotkové sféře. Uvědomíme si totiž, že pro každé $\vartheta = \text{konst.}$ lze provést rozklad

$$Y(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m(\vartheta) e^{im\varphi}. \quad (34)$$

Je velmi hezkou algebraickou úlohou dokázat pomocí dodatečných operátorů tvaru

$$\mathcal{L}_{\pm} = \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) e^{\pm i\varphi}, \quad (35)$$

že vlastní čísla λ v (32) jsou tvaru $\lambda = -l(l+1)$, kde $l \in \mathbb{Z}_0^+$ a díky (33) navíc platí $-l \leq m \leq l$. Nezávislost λ na m , tedy jeho $(2l+1)$ -násobná degenerace, je přímým důsledkem sférické symetrie. Podotkněme ještě, že l se nazývá úhlové číslo a m azimutální číslo.

Můžeme tak učinit závěr, že společné vlastní funkce operátorů ∇_{Ω}^2 a \mathcal{M} tvoří kompletní bázi kvadraticky integrabilních funkcí na jednotkové sféře, neboť oba generující operátory jsou dokonce hermitovské. Tyto funkce Y_{lm} se nazývají sférické harmonické funkce. Báze jimi tvořená bude i ortonormální ve smyslu skalárního součinu (30), při explicitním tvaru $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (2\pi)^{-1} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (36)$$

kde P_{lm} jsou tzv. normované přidružené Legendreovy polynomy

$$P_{lm}(x) = \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (37)$$

odvozené z tzv. Legendreových polynomů P_n

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (38)$$

Každou kvadraticky integrabilní funkci $f(\vartheta, \varphi)$ na sféře pak můžeme rozložit

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} Y_{nm}(\vartheta, \varphi). \quad (39)$$

V případě, že funkce účinkuje v celém prostoru, tedy $f(r, \vartheta, \varphi)$, jsou i koeficienty f_{nm} funkcí r .

Pro vektorovou bázi založenou na sférických funkcích využijeme standardní lokální báze jednotkových vektorů \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ a \mathbf{e}_φ . Libovolnou vektorovou funkci separujeme na radiální a tečnou část. Bázové vektory tečné části utvoříme ze sférických funkcí v souladu s Helmholtzovou reprezentací pole pomocí operátoru ∇_Ω a máme celkem

$$\mathbf{S}_{nm}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) = Y_{nm} \mathbf{e}_r, \quad (40)$$

$$\mathbf{S}_{nm}^{(1)}(\vartheta, \varphi) = \nabla_\Omega Y_{nm} = \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (41)$$

$$\mathbf{S}_{nm}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_r \times \nabla_\Omega Y_{nm} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi. \quad (42)$$

Funkce \mathbf{S}_{nm} se nazývají vektorové sférické harmonické funkce, přičemž \mathbf{S}_{nm}^{-1} je část radiální, \mathbf{S}_{nm}^1 se nazývá konsoidální a \mathbf{S}_{nm}^0 toroidální. Radiální a konsoidální část dohromady se nazývá sferoidální. Rozklad vektorové funkce $\mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi)$ je pak nasnadě:

$$\mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [U_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) + V_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)}(\vartheta, \varphi) + W_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)}(\vartheta, \varphi)]. \quad (43)$$

Rozložíme-li vektorové pole \mathbf{u} na toroidální \mathbf{u}^T a sferoidální \mathbf{u}^S část, pak též platí

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{u}^T = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^T = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_r \cdot \nabla \times \mathbf{u}^S = 0. \quad (44)$$

3 Numerická implementace úlohy

3.1 Diskretizace

Jak již bylo zmíněno v úvodu práce, zaměřili jsme se na zkoumání speciální třídy modelů zemského tělesa. A to sféricky symetrického, nerotujícího izotropního modelu s maxwellovkou reologie. Funkce parametrů modelu ϱ_0, λ, K a inverzní maxwellovský čas ξ jsou všechny pouze funkcemi argumentu r ve sférických souřadnicích. Naopak vektor posunutí \mathbf{u} , přírůstkový potenciál φ_1 a Cauchyho přírůstkový tenzor \mathbf{t} (odpustíme si pruh, takže $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{t}}$) jsou obecně funkcemi všech souřadnic $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$.

Nezbývá tedy než za uvedených podmínek zjednodušit obecnou pohybovou rovnici (17) s podmínkou rovnováhy (18), přidat rovnici maxwellovské reologie (27) a znovu si uvědomit, že potenciál φ_1 splňuje Poissonovu rovnici (16). Získáváme tak soustavu tří parciálních diferenciálních rovnic popisujících náš problém

$$\nabla \cdot \mathbf{t} - \varrho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \varrho_0 \nabla \varphi_1 + \nabla \cdot (\varrho_0 \mathbf{u}) \nabla \varphi_0 - \nabla (\varrho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_0) = 0 \quad (45)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi_1 + 4\pi G \varrho_0 \mathbf{u}) = 0 \quad (46)$$

$$\dot{\mathbf{t}}^E - \frac{\mu}{\eta} (\mathbf{t} - K(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}) = \dot{\mathbf{t}}. \quad (47)$$

Dalším nejbližším cílem je transformovat tuto soustavu do báze sférických harmonických funkcí a najít vztah mezi jednotlivými báзовými koeficienty (tím se mimo jiné zbavíme i explicitní závislosti na „tečných“ souřadnicích ϑ, φ). Následující postup je dopodrobna rozveden v Hanyk (1999) pro případ postglaciálního výzdvihu. Rovnice tam uvedené jsou v podstatě limitou (45)–(47) pro nulovou frekvenci, tedy $\ddot{\mathbf{u}} \rightarrow 0$. Jediným rozdílem tak je absence členu setrvačných sil $\varrho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ v pohybové rovnici (45). S tímto drobným, byť po fyzikální i numerické stránce klíčovým rozdílem se však lze snadno vypořádat.

Prvním krokem je rozklad potřebných veličin do báзовých funkcí v souladu s (39) a (43). Maje na paměti sférickou symetrii úlohy, budou nás v případě (přírůstkového) Cauchyho tenzoru napětí \mathbf{t} zajímat především jeho složky na sféře o poloměru r , tedy rozklad projekce $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{t} \equiv \mathbf{T}_r$. Označme horním indexem E jeho elastickou část vystupující v (47). Jmenovitě máme

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{nm} [U_{nm}(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)} + V_{nm}(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)} + W_{nm}(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)}], \quad (48)$$

$$\varphi_1(t, \mathbf{r}) = \sum_{nm} F_{nm}(t, r) Y_{nm} \quad (49)$$

$$\mathbf{T}_r(t, \mathbf{r}) = \sum_{nm} [T_{rr, nm}(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)} + T_{r\vartheta, nm}(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)} + T_{r\varphi, nm}(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)}] \quad (50)$$

$$\mathbf{T}_r^E(t, \mathbf{r}) = \sum_{nm} [T_{rr, nm}^E(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)} + T_{r\vartheta, nm}^E(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)} + T_{r\varphi, nm}^E(t, r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)}] \quad (51)$$

Definujeme ještě pomocný koeficient $Q_{nm}(t, r)$ pomocí předchozích

$$Q_{nm}(t, r) = \frac{\partial F_{nm}(t, r)}{\partial r} + \frac{n+1}{r} F_{nm}(t, r) + 4\pi G \varrho_0 U_{nm}(t, r) \quad (52)$$

a můžeme vytvořit osmírozměrný vektor $\mathbf{y}_{nm}(t, r)$ s elementy

$$\mathbf{y}_{nm} = (U_{nm}, V_{nm}, T_{rr, nm}, T_{r\vartheta, nm}, F_{nm}, Q_{nm}, W_{nm}, T_{r\varphi, nm})^T. \quad (53)$$

Uspořádání je voleno tak, aby prvních 6 prvků bylo sferoidálních a zbylé dva toroidální. Nyní je třeba nalézt již zmiňovanou soustavu parciálních diferenciálních rovnic pro vektor $\mathbf{y}_{nm}(t, r)$ užitím (45)–(47). Vztahy mezi bázovými koeficienty (53) a jejich derivacemi jsou lineární a vedou na soustavu tvaru

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}_{nm}(r, t)}{\partial t \partial r} - \mathbf{A}_n(r) \frac{\partial \mathbf{y}_{nm}(r, t)}{\partial t} - \mathbf{S}_n(r) \frac{\partial^3 \mathbf{y}_{nm}(r, t)}{\partial t^3} = \xi(r) \left[\mathbf{D}_n(r) \frac{\partial \mathbf{y}_{nm}(r, t)}{\partial r} + \mathbf{E}_n(r) \mathbf{y}_{nm}(r, t) \right], \quad (54)$$

kde matice koeficientů o dimenzích 8×8 – \mathbf{A} , \mathbf{S} , \mathbf{D} a \mathbf{E} v souladu s očekáváním nezávisí na azimutálním čísle m . Tvar matice \mathbf{S}_n je zvláště jednoduchý – jediné nenulové prvky jsou $S_{31} = S_{42} = S_{87} = \varrho_0(r)$. Matice \mathbf{A}_n má prvky

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\lambda}{r\beta} & \frac{N\lambda}{r\beta} & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\gamma}{r^2} - \frac{4\varrho_0 g_0}{r} & -\frac{2N\gamma}{r^2} + \frac{N\varrho_0 g_0}{r} & -\frac{4\mu}{r\beta} & \frac{N}{r} & -\frac{(n+1)\varrho_0}{r} & \varrho_0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\gamma}{r^2} + \frac{\varrho_0 g_0}{r} & \frac{N\gamma + (N-2)\mu}{r^2} & -\frac{\lambda}{r\beta} & -\frac{3}{r} & \frac{\varrho_0}{r} & 0 & 0 & 0 \\ -4\pi G \varrho_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n+1}{r} & 1 & 0 & 0 \\ -4\pi G \frac{(n+1)\varrho_0}{r} & 4\pi G \frac{N\varrho_0}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(N-2)\mu}{r^2} & -\frac{3}{r} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

kde $N = n(n+1)$ a n je úhlové číslo, $\beta = \lambda + 2\mu$, $\gamma = \mu(3\lambda + 2\mu)/\beta = 3\mu K/\beta$

a $g_0 \mathbf{e}_r = \nabla \varphi_0$. Dále je

$$\mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} -\frac{K}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\gamma}{3r} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\gamma}{3r} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} -\frac{2K}{r\beta} & \frac{NK}{r\beta} & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8\gamma}{3r^2} - \frac{4\rho_0 g_0}{r} & -\frac{4N\gamma}{3r^2} + \frac{N\rho_0 g_0}{r} & -\frac{4\mu}{r\beta} & \frac{N}{r} & -\frac{(n+1)\rho_0}{r} & \rho_0 & 0 & 0 \\ -\frac{4\gamma}{3r^2} + \frac{\rho_0 g_0}{r} & \frac{2N\gamma}{3r^2} & -\frac{\lambda}{r\beta} & -\frac{3}{r} & \frac{\rho_0}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{r} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Výše uvedené hodnoty platí pro stlačitelné modely. Pro nestlačitelné modely je $K \rightarrow \infty$ a je třeba provést ve výrazech náhrady

$$\frac{1}{\beta} \rightarrow 0, \quad \frac{\lambda}{\beta} \rightarrow 1 \quad \text{a} \quad \gamma \rightarrow 3\mu. \quad (58)$$

Dále si všimněme, že soustava (54) se rozpadá na dvě podsoustavy dimenzí 6×6 a 2×2 uvádějící do souvislosti zvlášť sferoidální a zvlášť toroidální koeficienty vektoru \mathbf{y}_{nm} . Dalším důležitým poznatkem je, že pokud řešíme problém pouze v případě elastické reologie – tedy v pohybové rovnici (45) přejde $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}^E$ a rovnice (47) odpadá – získáme soustavu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}_{nm}^E(r, t)}{\partial t \partial r} - \mathbf{A}_n(r) \frac{\partial \mathbf{y}_{nm}^E(r, t)}{\partial t} - \mathbf{S}_n(r) \frac{\partial^3 \mathbf{y}_{nm}^E(r, t)}{\partial t^3} = \mathbf{0}. \quad (59)$$

Matice koeficientů \mathbf{A}_n a \mathbf{S}_n jsou v (54) a (59) zcela totožné (vektor elastického řešení \mathbf{y}_{nm}^E je podobný jako vektor \mathbf{y}_{nm} jen bázové koeficienty Cauchyho tenzoru nahradíme elastickými).

Dalším krokem ke kompaktnímu maticovému zápisu soustavy (54) je prostorová diskretizace podél radiální souřadnice r na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Časové závislosti ponecháme na později. Použijeme dvě vzájemně posunuté mřížky bodů r_i , $i = 0 \dots J$ a x_j , $j = 1 \dots J$ a $a = r_0 < x_1 < \dots < x_J < r_J = b$. Mřížka x_j je umístěna v kořenech Čebyševovských polynomů, zatímco r_i v jejich extrémních hodnotách na intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$x_j = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{\pi(j-\frac{1}{2})}{J}\right), \quad (60)$$

$$r_i = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{\pi i}{J}\right). \quad (61)$$

Vyjádříme hodnoty \mathbf{y} (odpustíme si indexy n a m) a hodnoty jeho derivací na mřížce r_i pomocí váženého součtu hodnot \mathbf{y}_j na mřížce x_j takto

$$\mathbf{y}(t, r_i) = \sum_{j=1}^J \alpha_{ij} \mathbf{y}_j(t, x_j) \quad (62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t, r_i)}{\partial r} = \sum_{j=1}^J \beta_{ij} \mathbf{y}_j(t, x_j), \quad (63)$$

kde α_{ij} a β_{ij} jsou váhové matice počítané dle Fornberg (1996) a $i = 0 \dots J$. V našem případě využíváme v (62) a (63) takzvanou pseudospektrální metodu (viz. Fornberg (1996)), kdy váhové koeficienty jsou nenulové pro všechna x_j (jedná se o limitní případ metody konečných diferencí).

Potřebujeme tedy získat celkem J vektorových rovnic pro neznámé \mathbf{y}_j , resp. celkem $8J$ skalárních rovnic pro jednotlivé elementy \mathbf{y}_j . Pomocí (62) a (63) se v (54) zbavíme derivací dle r a získáme celkem $8J-8$ obyčejných diferenciálních rovnic v čase t na vnitřních bodech r_i intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\sum_{j=1}^J \left[(\beta_{ij} - \mathbf{A}_i \alpha_{ij}) \frac{d\mathbf{y}_j(t)}{dt} - \mathbf{S}_i \alpha_{ij} \frac{d^3 \mathbf{y}_j(t)}{dt^3} \right] = \sum_{j=1}^J [\xi_i (\mathbf{D}_i \beta_{ij} + \mathbf{E}_i \alpha_{ij})] \mathbf{y}_j(t). \quad (64)$$

Zde $i = 1 \dots (J-1)$ a prvky matic vyhodnocujeme na mřížce r_i , tedy $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_n(r_i)$, $\xi_i = \xi(r_i)$ apod. Zbýlých 8 rovnic získáme z okrajových podmínek, jejichž konkrétnímu tvaru a implementaci pro okrajové body $a = r_0$ a $b = r_J$ bude věnována následující část textu.

Jelikož nadále budeme pracovat s toroidálními a sferoidálními kmity zvláště, získáváme 2 soustavy tvaru (64): $6J-6$ sferoidálních rovnic a 6 daných sferoidálními okrajovými podmínkami a $2J-2$ toroidálních rovnic a 2 dané toroidálními okrajovými podmínkami.

3.2 Okrajové podmínky

Toroidální a sferoidální části vektorových polí popsaných rovnicemi (64) splňují podmínky dané (44). Obecné okrajové podmínky jsou popsány rovnicemi (19)–(21). Úkolem je přepsat je do řeči báзовých koeficientů tvořících vektor \mathbf{y} (viz. Martinec (1984)) a vhodně zakomponovat do vlastní numerické realizace (viz. Hanyk a kol. (2002)). Rovněž zmíníme podmínky na jednotlivých typech rozhraní, neboť uvažované typy modelů Země jsou tvořeny koncentrickými slupkami o konstantních fyzikálních parametrech. Poznamenejme ještě, že do „pevného“ typu vrstvy řadíme kromě čistě elastického i viskoelastický případ. Probereme nyní zvlášť případ toroidálních a sferoidálních kmitů.

Kmity toroidální. Pro takové má vektor \mathbf{y} složky $\mathbf{y} = (W, T_{r\varphi})^T$. Objemové změny, přírůstky hustoty a tím pádem i potenciálu jsou nulové. Rovněž radiální složka \mathbf{u} je nulová. Takové kmity se nešíří kapalnými vrstvami ($\mu=0$), což poněkud usnadňuje výpočet.

Za počáteční bod $a = r_0$ považujeme tak vnější rozhraní poslední kapalné vrstvy směrem od počátku souřadnice $r = 0$ (bez kapalných vrstev je $r_0 = 0$). V takovém bodě musí být nulová tečná složka napětí $T_{r\varphi}$, což zapíšeme jako (a dosazením z (62))

$$\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{y}(t, r_0) = \mathbf{M}_0 \cdot \sum_{j=1}^J \alpha_{0j} \mathbf{y}_j(t, x_j) = 0, \quad (65)$$

kde $\mathbf{M}_0 = (0, 1)$.

Pro druhý krajní bod $r_J = b$, kde b je celkový poloměr daného modelu (volné rozhraní) platí stejné okrajové podmínky, čili (zkráceně jen pro \mathbf{y})

$$\mathbf{M}_J \cdot \mathbf{y}(t, r_J) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{M}_J = \mathbf{M}_0. \quad (66)$$

Tím máme vyřešen problém dvou chybějících rovnic – okrajové podmínky určují v obou krajních bodech r_0, r_J po jedné rovnici.

Uvažujme nyní model složený z více vrstev, počet mřížkových bodů x_j v k -té vrstvě označme J_k . Označme vektor \mathbf{y} v k -té vrstvě jako \mathbf{y}^k a sadu mřížkových bodů r_i jako r_i^k , $i = 0 \dots J_k$. Na vnitřních rozhraních (vzhledem k předchozímu pouze typ pevné–pevné) požadujeme spojitost obou složek \mathbf{y} . To znamená, že mezi \mathbf{y}^k v k -té vrstvě a \mathbf{y}^{k+1} v $(k+1)$. vrstvě bráno směrem od počátku platí

$$\mathbf{M} \cdot (\mathbf{y}^k(t, r_{J_k}^k) - \mathbf{y}^{k+1}(t, r_0^{k+1})) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

neboť díky definici mřížek je $r_{J_k}^k \equiv r_0^{k+1}$.

Definujme sloupcový vektor $\mathbf{Y}(t)$ složený z neznámých \mathbf{y}_j^k v jednotlivých vrstvách jako

$$\mathbf{Y}(t) = \left(\boxed{\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_{J_1}^0}, \dots, \boxed{\mathbf{y}_1^k, \dots, \mathbf{y}_{J_k}^k}, \dots, \boxed{\mathbf{y}_1^K, \dots, \mathbf{y}_{J_K}^K} \right)^T, \quad (68)$$

kde K značí celkový počet vrstev. Pak rovnici (64) spolu s okrajovými podmínkami (65) a (66) a podmínkami na rozhraní (67) (všemi zderivovanými v čase) můžeme pro K -vrstevnatý model zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \mathbf{R} \cdot \frac{d^3\mathbf{Y}(t)}{dt^3} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}(t). \quad (69)$$

Matrice \mathbf{P} dimenzí $\sum_{k=1}^K 2J_k \times \sum_{k=1}^K 2J_k$ má následující blokovou strukturu

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{M}_0\alpha_{0j}}_{1 \times 2J_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boxed{\mathbf{I}\beta_{ij} - \mathbf{A}_i\alpha_{ij}}_{2(J_1-1) \times 2J_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boxed{\mathbf{M}\alpha_{Jj}}_{2 \times 2J_1} & \boxed{-\mathbf{M}\alpha_{0j}}_{2 \times 2J_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{I}\beta_{ij} - \mathbf{A}_i\alpha_{ij}}_{2(J_2-1) \times 2J_2} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{M}_J\alpha_{0j}}_{1 \times 2J_K} \end{pmatrix} \quad (70)$$

s vyznačenými dimenzemi jednotlivých nenulových bloků. Matice \mathbf{I} je jednotková matice o rozměrech 2×2 . Indexy i, j probíhají hodnoty $i = 1 \dots (J_k - 1)$ a $j = 1 \dots J_k$ v každé k -té vrstvě modelu, t.j. k -tém „blokovém“ sloupci matice \mathbf{P} . Matici \mathbf{Q} lze znázornit jako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boxed{\xi_i(\mathbf{D}_i\beta_{ij} + \mathbf{E}_i\alpha_{ij})}_{2(J_1-1) \times 2J_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\xi_i(\mathbf{D}_i\beta_{ij} + \mathbf{E}_i\alpha_{ij})}_{2(J_2-1) \times 2J_2} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (71)$$

čili na místech odpovídajících okrajovým podmínkám v \mathbf{P} jsou nulové bloky příslušné velikosti. Stejnou strukturu jako matice \mathbf{Q} má i matice \mathbf{R} s tím rozdílem, že odpovídající nenulové bloky jsou zaplněny výrazy $\mathbf{S}_i\alpha_{ij}$.

Kmity sferoidální. Zde má vektor \mathbf{y} složky $\mathbf{y} = (U, V, T_{rr}, T_{r\theta}, F, Q)^T$. Narozdíl od předchozího případu je třeba díky objemovým změnám vzít v potaz i přírůstkový potenciál. Jelikož sferoidální kmity existují i v kapalných vrstvách, budeme obecně brát jako počáteční bod $a = r_0 = 0$, díky volbě

mřížky x_j se ovšem vyhneme při výpočtech singularitě v počátku. Konstrukce matic $\mathbf{M}_{0,J}$, které určují okrajové podmínky a podmínky na rozhraních je stejná jako v případě toroidálních kmitů. Nakonec dospějeme k formálně stejné rovnici jako (69), přičemž matice \mathbf{P} , \mathbf{R} a \mathbf{Q} budou trojnásobné dimenze, ale obdobné blokové struktury.

V počátku soustavy souřadné $r_0 = r = 0$ musí být v pevném prostředí nulové složky posunutí a radiální složka přírůstkového potenciálu, takže získáváme potřebné tři rovnice

$$\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Pro volný pevný povrch v bodě $b = r_J$ naopak požadujeme nulovost složek napětí a gradientu přírůstkového potenciálu

$$\mathbf{M}_J \cdot \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{M}_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Podmínka na rozhraní mezi k -tou pevnou a $(k+1)$. pevnou vrstvou je dána požadavkem spojitosti všech sferoidálních složek, takže

$$\mathbf{I} \cdot (\mathbf{y}^k(t, r_{J_k}^k) - \mathbf{y}^{k+1}(t, r_0^{k+1})) = \mathbf{0}, \quad (74)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice o rozměrech 6×6 .

V případě kapaliny nepředepisujeme v počátku omezující podmínku pro horizontální složky posunutí V , čili 2. řádek \mathbf{M}_0 v (72) je nulový. Stejně tak anulujeme i 2. řádek matice \mathbf{M}_J v (73) pro volný kapalný povrch, neboť případ kapalně vrstvy v případě sferoidálních kmitů si žádá zvláštního přístupu. Kromě $\mu = 0$ jsou v kapalinách též nulové tečné složky napětí

$$T_{r\vartheta} = 0. \quad (75)$$

Vztah mezi Cauchyho přírůstkovým tenzorem napětí a vektorem \mathbf{u} se tak proti elastickému případu redukuje na

$$\mathbf{t} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}. \quad (76)$$

Tím se 6 obyčejných diferenciálních rovnic v r mezi jednotlivými sferoidálními složkami vektoru \mathbf{y} dané v elastickém případě soustavou (59) redukuje na 4 pro složky U, T_{rr}, F, Q a jednu podmínku tvaru (viz. Martinec (1984))

$$\frac{\varrho_0 g_0}{r} U(t, r) - \frac{1}{r} T_{rr}(t, r) + \frac{\varrho_0}{r} F(t, r) + \varrho_0 \frac{\partial^2 V(t, r)}{\partial t^2} = 0. \quad (77)$$

Tato rovnice je algebraická v r , člen s časovou derivací odpovídá setrvačným silám. Diferenciální rovnice v r pro složku posunutí V je splněna identicky. Zmíněné 4 diferenciální rovnice pro vnitřní body r_i , $i = 1 \dots (J - 1)$ kapalné vrstvy zapíšeme v blocích analogicky k (70)

$$\mathbf{I}^{(L)}\beta_{ij} - \mathbf{A}_i^{(L)}\alpha_{ij}, \quad (78)$$

přičemž $\mathbf{I}^{(L)}$ vznikne z jednotkové matice 6×6 vynulováním 2. a 4. řádku a matice $\mathbf{A}^{(L)}$ má tvar

$$\mathbf{A}^{(L)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{r} & \frac{N}{r} & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4\rho_0 g_0}{r} & \frac{N\rho_0 g_0}{r} & 0 & \frac{N}{r} & -\frac{(n+1)\rho_0}{r} & \rho_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4\pi G\rho_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n+1}{r} & 1 \\ -4\pi G\frac{(n+1)\rho_0}{r} & 4\pi G\frac{N\rho_0}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n-1}{r} \end{pmatrix}. \quad (79)$$

V odpovídajících blocích matice \mathbf{R} díky (77) musíme položit $S_{42} = 0$. Algebraické podmínky (75) a (77) tak vytvoří zbývající rovnice, které vyhodnotíme přímo na mřížce x_j . To znamená, že pro každý vnitřní bod r_i vypočteme v odpovídajícím x_i obě podmínky (75) a (77). Takto jich však získáme jen $(J - 1)$. Poslední zbývající opět rozdělíme v okrajových podmínkách pro kapalnou vrstvu: (77) v posledním mřížkovém bodě kapalné vrstvy (pro r_J v bodě x_J) a (75) v počátku (pro r_0 tím pádem také v bodě x_J). Podmínky na rozhraní mezi dvěma kapalnými vrstvami můžeme ponechat ve tvaru (74). Podmínky na rozhraních typu pevné–kapalné pak plynou z předchozího.

Sferoidální rovnice spolu s okrajovými podmínkami tedy opět vedou na tvar rovnice (69), kterou budeme považovat za výchozí pro další úvahy.

4 Postup při řešení problému

4.1 Metody řešení problému

Naším úkolem je získat frekvence vlastních kmitů sferoidální \mathbf{u}^S a toroidální části \mathbf{u}^T pole vektoru posunutí \mathbf{u} , které splňují podmínky (44). Je zvykem značit jednotlivé sferoidální módy symbolem ${}_pS_{nm}$ a toroidální ${}_pT_{nm}$, kde n je úhlové číslo zavedené dříve a m azimutální (to budeme v našem sféricky symetrickém případě vynechávat). Číslo p se nazývá nodální a obecně je $p \in \mathbb{Z}_0^+$. Explicitně v rovnicích nevystupuje, je v podstatě důsledkem okrajových podmínek (omezené velikosti Země) a při konstantním l, m si jej lze představit jako počet uzlových ploch (kde $\mathbf{u} = 0$). Jedná se o analogii k jednorozměrnému případu příčných kmitů konečně dlouhé struny, kde vyhovuje celá sada řešení s p uzlovými body ($p \in \mathbb{Z}_0^+$) – základní mód $p = 0$ a vyšší harmonické módy $p > 0$. Tato terminologie platí i pro případ Země.

Vyjdeme z kompaktního maticového zápisu tvaru (91) popisujícího problém vlastních kmitů a pokusíme se najít formulaci umožňující řešení metodou vlastních čísel. Následující postup je obecný, teprve konkrétní náplň matic \mathbf{P}, \mathbf{Q} a \mathbf{R} určuje, zda se jedná o sferoidální či toroidální módy.

V případě čistě elastického problému dostáváme

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Y}}_0(t) - \mathbf{R} \cdot \ddot{\mathbf{Y}}_0(t) = 0, \quad (80)$$

kde $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}_0(t), \dots, \mathbf{y}_J(t))^T$ a tečka značí derivaci dle času. Získáváme tedy soustavu obyčejných lineárních homogenních diferenciálních rovnic v čase t třetího (resp. druhého) řádu s konstantními koeficienty. Tu lze převést na soustavu rovnic prvního řádu stejných vlastností v tom smyslu, že každé řešení první soustavy musí vyhovovat i druhé a naopak. Libovolné řešení soustavy prvního řádu lze zapsat jako (viz. Rektorys a kol. (1995))

$$\mathbf{Y}_0(t) = \sum_i c_i \hat{\mathbf{Y}}_0^{(i)}(t), \quad (81)$$

kde c_i jsou vhodné konstanty a $\hat{\mathbf{Y}}_0^{(i)}(t)$ prvky báze všech řešení tvořící fundamentální systém rovnice. Explicitní tvar $\hat{\mathbf{Y}}_0^{(i)}(t)$ v nedegenerovaném případě je

$$\hat{\mathbf{Y}}_0^{(i)}(t) = \hat{\mathbf{Y}}_0^{(i)} \exp(\gamma_0^{(i)} t), \quad (82)$$

kde $\hat{\mathbf{Y}}_0^{(i)}$ je v čase konstantní vektor. Jednotlivé prvky takového systému musí vyhovovat (80), takže dosazením získáváme problém vlastních čísel γ_0^2 tvaru

$$\gamma^2 \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0. \quad (83)$$

Fyzikální význam čísla γ_0 se vyjasní, položíme-li $\gamma_0 = i\omega_0$, neboť pak bude ω_0 díky tvaru řešení (82) přímo frekvencí daného elastického módu. Problém

vlastních čísel (83) pak zní

$$\omega_0^2 \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0. \quad (84)$$

Z fyzikálních důvodů musíme očekávat, že $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Pokud platí rovnice (84), pak musí platit i rovnice k ní komplexně sdružená tvaru

$$\omega_0^2 \mathbf{R} \cdot \bar{\hat{\mathbf{Y}}}_0 = -\mathbf{P} \cdot \bar{\hat{\mathbf{Y}}}_0, \quad (85)$$

neboť prvky matic \mathbf{P} a \mathbf{R} jsou reálné. Pak ovšem musí být $\bar{\hat{\mathbf{Y}}}_0 = \hat{\mathbf{Y}}_0$, a tedy $\hat{\mathbf{Y}}_0 \in \mathbb{R}$.

Výchozí rovnice v případě maxwellovské reologie zní

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{R} \cdot \ddot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}(t). \quad (86)$$

V souladu s předchozím postupem (transformace na soustavu prvního řádu je zcela analogická k substituční metodě níže) dospějeme při fundamentálním systému

$$\hat{\mathbf{Y}}^i(t) = \hat{\mathbf{Y}}^{(i)} \exp(\gamma^{(i)}t) \quad (87)$$

k rovnici

$$(\gamma^3 \mathbf{R} - \gamma \mathbf{P} + \mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}} = 0. \quad (88)$$

Na rovnici (88) lze nahlížet jako na zobecněný polynomiální vlastní problém třetího stupně. Souvislost γ se skutečnou frekvencí ω je opět $\gamma = i\omega$, ale musíme si uvědomit, že nyní $\omega \in \mathbb{C}$. Imaginární část ω pak určuje útlum ve smyslu

$$\exp(\gamma t) = \exp[i\operatorname{Re}(\omega)t] \exp[-\operatorname{Im}(\omega)t]. \quad (89)$$

Faktor kvality Q_i pro i -tý mód s frekvencí ω_i je pak definován takto

$$Q_i = \frac{\operatorname{Re}(\omega_i)}{2\operatorname{Im}(\omega_i)}. \quad (90)$$

Dosadíme-li ještě za γ do (88), dostáváme ekvivalentní vlastní problém přímo pro ω tvaru

$$(\omega^3 \mathbf{R} + \omega \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}} = 0. \quad (91)$$

Byly navrženy celkem 3 metody řešení rovnice (91).

• **Substituce.** Jediná metoda, jež se snaží nalézt řešení bez dalších aproximací. Zavedeme nové vektory

$$\hat{\mathbf{V}} = \omega \hat{\mathbf{Y}}, \quad \hat{\mathbf{W}} = \omega \hat{\mathbf{V}}, \quad (92)$$

dosadíme do (91) a získáme soustavu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -i(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}) & -(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{W}} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{W}} \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Matice \mathbf{R} je však značně singulární, takže po vynásobení (93) vhodnou blokovou maticí dostáváme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -i\mathbf{Q} & -\mathbf{P} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{W}} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{V}} \\ \hat{\mathbf{W}} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Tím jsme sice převedli (91) na zobecněný vlastní problém typu $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v} = \omega \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}$, ale trojnásobné dimenze a numericky nepěkných matic. Zdá se, že v uvedené konstrukci by bylo lepší vycházet přímo z rovnice (88), pak by matice \mathbf{M}_1 byla reálná. Numerická výhodnost takového postupu ale nebyla prokázána, neboť tato metoda se krátce po naprogramování ukázala zcela nestabilní a nepraktickou. Proto se jí dále nebudeme zabývat. Rozdíl mezi (88) a (91) je pak vůči následujícím metodám nepodstatný.

- **Linearizace.** Vycházíme ze znalosti vlastních čísel ω_0 daných problémem (84). Jelikož se jedná o frekvence vlastních kmitů elastického modelu, platí $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že frekvence vlastních kmitů maxwellovského modelu ω (díky útlumu je $\omega \in \mathbb{C}$) se ve své reálné části nebudou příliš lišit od ω_0 , čili $|\delta\omega| \ll \omega_0$ při $\omega = \omega_0 + \delta\omega$. Provedeme linearizaci v mocnině vůči $\delta\omega$

$$\omega^3 \approx \omega_0^3 + 3\omega_0^2 \delta\omega \quad (95)$$

a dosazením do (91) dostáváme problém vlastních čísel $\delta\omega$ tvaru

$$(\omega_0^3 \mathbf{R} + \omega_0 \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L = \delta\omega (-3\omega_0^2 \mathbf{R} - \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L. \quad (96)$$

Získáváme tím celé spektrum vlastních vektorů $\hat{\mathbf{Y}}_L$ a „oprav“ $\delta\omega$ příslušejících každému jednotlivému ω_0 .

- **Soustava lineárních rovnic.** Na rozdíl od předchozí metody získáme ke každému ω_0 právě jednu hodnotu $\delta\omega$ a jeden opravný vektor $\delta\hat{\mathbf{Y}}$ řešením soustavy lineárních komplexních rovnic. Pro ω zachováváme stejné linearizační předpoklady jako v předchozím případě, tedy $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ při $|\delta\omega| \ll \omega_0$. Nově ještě definujeme „opravný vektor“ $\delta\hat{\mathbf{Y}}$ jako

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{Y}}_0 + \delta\hat{\mathbf{Y}}, \quad (97)$$

kde $\hat{\mathbf{Y}}_0$ přísluší danému vlastnímu číslu ω_0 a řeší s ním (84). Uvažujeme-li opravný vektor $\delta\hat{\mathbf{Y}}$ dostatečně malý, pak při normovaných vlastních vektorech $\hat{\mathbf{Y}}_0 \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} = 1$ můžeme psát

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 \cdot \delta\hat{\mathbf{Y}} = 0. \quad (98)$$

Po dosazení do (91) a linearizaci rovnice pro ω dostaneme

$$(3\omega_0^2\delta\omega \mathbf{R} + \delta\omega \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 + (\omega_0^3\mathbf{R} + \omega_0\mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \delta\hat{\mathbf{Y}} = 0 \quad (99)$$

a po drobné úpravě

$$[(3\omega_0^2\mathbf{R} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0] \delta\omega + [\omega_0^3\mathbf{R} + \omega_0\mathbf{P} + i\mathbf{Q}] \cdot \delta\hat{\mathbf{Y}} = -i\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0, \quad (100)$$

která společně s (98) tvoří výše uvedený systém lineárních rovnic tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} ((3\omega_0^2\mathbf{R} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0)_1 & M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((3\omega_0^2\mathbf{R} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0)_n & M_{n1} & \dots & M_{nn} \\ 0 & (\hat{\mathbf{Y}}_0)_1 & \dots & (\hat{\mathbf{Y}}_0)_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\omega \\ \delta\hat{\mathbf{Y}}_1 \\ \vdots \\ \delta\hat{\mathbf{Y}}_n \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} (\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0)_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (101)$$

kde $M_{ij} = (\omega_0^3\mathbf{R} + \omega_0\mathbf{P} + i\mathbf{Q})_{ij}$. Ještě lze drobně zjednodušit $(3\omega_0^2\mathbf{R} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = -2\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = 2\omega_0^2\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0$.

4.2 Knihovna ARPACK – Arnoldiho metoda

Numerické řešení problému bylo realizováno v programovacím jazyce Fortran 90. K hledání vlastních čísel a vlastních vektorů standardního i zobecněného vlastního problému bylo užito podprogramů z matematické knihovny IMSL. Ty užívají v případě obecné komplexní čtvercové matice \mathbf{A} pro vlastní problém tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ standardního QR rozkladu. Nejprve je vhodnou unitární podobnostní transformací \mathbf{V} určena horní Hessenbergovská matice \mathbf{H} (skládá se z horní trojúhelníkové a nenulových prvků v j -tém sloupci a $(j + 1)$. řádku)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}. \quad (102)$$

Následuje iterativní proces $\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{H}$ (hvězdička značí Hermitovské sdružení), ve kterém je prováděn tzv. QR rozklad

$$(\mathbf{H} - \sigma\mathbf{I}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}, \quad (103)$$

kde \mathbf{Q} je unitární a \mathbf{R} horní trojúhelníková matice. Vhodná volba posunovacího faktoru σ výrazně ovlivňuje konvergenci celého procesu ve smyslu vymizení

subdiagonálních prvků matice \mathbf{H} . Díky unitaritě \mathbf{V} a \mathbf{Q} je tímto procesem získáno spektrum \mathbf{A} na základě obecného Schurova teorému:

Věta 2. (Schurův teorém): *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak existuje unitární matice \mathbf{Q} a horní trojúhelníková matice \mathbf{R} , že*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}, \quad (104)$$

přičemž diagonální prvky matice \mathbf{R} jsou vlastními hodnotami \mathbf{A} .

Tento rozklad je jednoznačný až na uspořádání sloupců v \mathbf{R} . V případě, že matice \mathbf{A} je normální ($\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$), lze sestavit v (104) takovou podobnostní transformaci, že \mathbf{R} je diagonální. Pak lineární obal sloupců \mathbf{Q} tvoří nejen invariantní podprostor \mathbf{A} , ale jednotlivé sloupce jsou rovnou vlastními vektory \mathbf{A} . Pro obecný problém vlastních čísel tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ je Schurova teorému užito pro případ tzv. QZ rozkladu, jenž je úpravou QR rozkladu.

I když výše popsaná metoda je standardní a obecně použitelná, nemusí být v jednotlivých případech optimální. Matice, které se v naší úloze účastní výpočtů vykazují značnou vnitřní strukturu (viz. vzorce (70) a (71)), většina prvků je navíc nulová. Výše popsané unitární transformace \mathbf{V} a \mathbf{Q} veškeré strukturální informace zničí, zmíněná řídkost matic je pak v takovém procesu zdrojem numerických chyb.

Jako vhodná alternativa resp. doplněk ke knihovně IMSL byla užita volně šiřitelná otevřená knihovna programů v jazyce Fortran 77 s názvem ARPACK (viz. Lehoucq a kol. (1997)). Jejím jediným úkolem je poradit si s rozměrnými (i zobecněnými) problémy vlastních čísel, zvláště řídkými či hůře podmíněnými užitím tzv. implicitně restartované Arnoldiho metody. Umožňuje nepočítat naráz celé spektrum, ale pouze vlastní čísla (a příslušné vektory) splňující uživatelem zadaná kritéria, zejména s největší či nejmenší absolutní velikostí nebo odchylkou od předem zadané hodnoty. Knihovny ARPACK bylo v našem případě užito ve spolupráci s knihovnou IMSL. Vybrané prvky spektra vypočteného pomocí IMSL byly iterativně zpřesňovány pomocí knihovny ARPACK. V případě podezření na vysokou kumulaci vlastních hodnot v okolí nějakého bodu byly takto zjišťovány i dodatečné informace o struktuře vlastního problému. Dodejme ještě, že otevřenost knihovny ARPACK a zvolený systém rozhraní pro komunikaci s uživatelem umožňuje značně ovlivnit výpočet spektra pro daný konkrétní případ. Nyní jen ve stručnosti zmíníme zásadní myšlenky výpočtu spektra Arnoldiho metodou. Podrobněji lze nalézt např. v Lehoucq a kol. (1997).

Základní myšlenkou je metoda projekcí na Krylovův podprostor K_k řádu k . Pro danou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a nějaký vektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ je tento podprostor tvořen lineárním obalem následující množiny vektorů

$$K_k \equiv K_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1) = \mathcal{L} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{v}_1 \}. \quad (105)$$

To zároveň znamená, že libovolný vektor $\mathbf{w} \in K_k$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{w} = q(\mathbf{A})\mathbf{v}_1$, kde q je polynom řádu menšího než k .

Úkolem je nalézt na $K_k(\mathbf{A}, \mathbf{v}_1)$ nejlepší možnou aproximaci vlastních vektorů. Definujeme k tomu účelu Ritzův vektor $\mathbf{x} \in K_k$ a Ritzovu hodnotu ϑ splňující podmínku pro vlastní vektor/číslo v projekci na K_k :

$$\mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \vartheta \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in K_k. \quad (106)$$

Pokud vybudujeme na K_k ortonormální bázi (tzv. Arnoldiho vektorů), jejíž prvky budou tvořit sloupce matice $\mathbf{W}_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$, můžeme podmínku pro Ritzův vektor $\mathbf{x} \in K_k$ zapsat pomocí k -rozměrného vektoru \mathbf{s} jako $\mathbf{x} = \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{s}$. Podmínku (106) pak dosazením a pomocí matice \mathbf{W} přepíšeme na tvar

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{s} - \vartheta \mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{W}_k^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}_k. \quad (107)$$

Po provedené projekci tedy zjišťujeme, že Ritzův pár (\mathbf{x}, ϑ) lze získat jako vlastní číslo matice $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ a transformací příslušného vlastního vektoru na K_k . Je jasné, že Ritzův vektor se bude skutečnému vlastnímu vektoru blížit tím více, čím menší bude ortogonální doplněk skutečného vektoru vůči prostoru K_k . Pro příslušných k Ritzových vektorů je tedy třeba, aby K_k byl invarianním podprostorem matice \mathbf{A} . To nastává v případě, že položíme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{s}$. Matici \mathbf{Q}_k získáme částečným Schurovým rozkladem \mathbf{A} . V souladu s (104) je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{R}_k, \quad (108)$$

kde \mathbf{Q}_k představuje prvních k sloupců matice \mathbf{Q} a $\mathbf{R}_k \in \mathbb{C}^{k \times k}$ je horní trojúhelníková matice.

Arnoldiho metoda tedy začíná budováním ortonormální báze \mathbf{v}_i na Krylovově podprostoru K_k dimenze k generovaného zvoleným vektorem \mathbf{v}_1 . Vektory \mathbf{v}_i tvoří sloupce matice $\mathbf{V}_k = \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{T}_k$, kde \mathbf{T}_k je unitární transformace převádějící standardními prostředky matici \mathbf{G} na horní Hessenbergovskou matici \mathbf{H}_k (pro start algoritmu výhodnější, podrobněji viz. Press a kol. (1992)). Tato fáze Arnoldiho metody je v podstatě mírně modifikovanou Gramm-Schmidtovou ortogonalizací – první vektor je \mathbf{v}_1 normovaný na jednotku. Vhodná volba báze Krylovova podprostoru pomocí Gramm-Schmidtova procesu minimalizuje faktorizaci

$$\min \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_k - \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{H}_k\|. \quad (109)$$

Vzhledem ke konkrétnímu tvaru algoritmu (viz. Lehoucq a kol. (1997)) můžeme symbolicky zapsat

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{H}_k + \mathbf{f}_k \mathbf{e}_k^T, \quad (110)$$

kde reziduální vektor \mathbf{f}_k je funkcí \mathbf{v}_1 . Vektor \mathbf{e}_k je k -tým vektorem kanonické báze $\mathbb{C}^{k \times k}$, čili matice $\mathbf{f}_k \mathbf{e}_k^T \in \mathbb{C}^{n \times k}$ má všechny sloupce nulové kromě posledního, k -tého. Vztah (110) se nazývá k -krokovou Arnoldiho faktorizací.

Pokud by nastala situace $\mathbf{f}_k = 0$, byly by dle definice sloupce \mathbf{V}_k bázi invariantního podprostoru \mathbf{A} , a tudíž Ritzova čísla \mathbf{H}_k by byla vlastními čísly \mathbf{A} a příslušné Ritzovy vektory přímo vlastními vektory \mathbf{A} . To je cílem celého procesu. Bude-li \mathbf{v}_1 lineární kombinací všech k vlastních vektorů, pak vzhledem ke způsobu, jakým vektor \mathbf{v}_1 generuje v (105) podprostor K_k , nastane právě kýžená situace. Nelze předpokládat, že hned první zvolený vektor \mathbf{v}_1 bude mít požadované vlastnosti, takže konvergence (110) bude velmi špatná. Proto je v knihovně ARPACK zakomponována metoda implicitního restartování, jejímž cílem je v iterativním procesu obohacovat \mathbf{v}_1 o další nové složky vlastních vektorů, aniž by bylo nutné počítat faktorizaci (110) znova od úplného začátku (viz. Lehoucq a kol. (1997)).

Vidíme, že zvláště pro případ $k \ll n$ nabízí implicitně restartovaná Arnoldiho metoda velmi rychlý způsob nalezení vlastních čísel a vektorů pomocí redukované matice \mathbf{H}_k dané projekčními vlastnostmi na Krylovův podprostor. Navíc během celého procesu vystupuje původní matice \mathbf{A} pouze ve výrazech tvaru $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}$.

Pro zrychlení konvergence se užívá standardních metod spektrálního posunu a inverze. Například v případě obecného vlastního problému tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ posuneme spektrum o σ a máme

$$(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{M}) \cdot \mathbf{x} = (\lambda - \sigma) \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}. \quad (111)$$

Je-li levá strana (111) invertovatelná, pak získáváme úlohu pro vlastní čísla ν tvaru (vlastní vektory \mathbf{x} jsou stále stejné)

$$(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \nu \mathbf{x}, \quad \nu = \frac{1}{\lambda - \sigma}. \quad (112)$$

Tímto způsobem lze dobře odlišit jednotlivé hustě kumulované vlastní hodnoty původního problému v okolí posunu σ , blíže Press a kol. (1992).

4.3 Elastický model

V obou uvažovaných metodách řešení popsaných v kapitole 4.1, vystupuje jako parametr úlohy vlastní frekvence ω_0 elastického modelu. Nalezení spektra ω_0 se tak stalo nevyhnutelnou součástí procesu směřujícího k nalezení jednotlivých vlastních frekvencí ω odpovídajícího maxwellovského modelu.

Veškeré informace pro viskoelastický případ jsou uloženy v maticích \mathbf{P} , \mathbf{R} a \mathbf{Q} definovaných v kapitole 3.2. Frekvence odpovídajícího elastického modelu, jenž je třeba řešit, jsou pak dány zobecněným vlastním problémem tvaru

$$-\omega_0^2 \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0, \quad (113)$$

pro vlastní čísla $\gamma = -\omega_0^2$ při stejných maticích \mathbf{P} a \mathbf{R} .

Konkrétní numerický postup byl realizován již zmíněnou spoluprací jednotlivých programů z knihoven IMSL a ARPACK: jednotlivé prvky naráz získaného spektra pomocí IMSL byly každý zvlášť iterativně zpřesňovány pomocí knihovny ARPACK. Vzhledem ke tvaru (113) rozlišíme následující dvě možné metody.

Zobecněný vlastní problém. Knihovna IMSL nabízí řešení zobecněných problémů tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \gamma \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ pomocí QZ algoritmu, knihovna ARPACK užívá i zlepšujících transformací v případě špatné podmíněnosti \mathbf{M} (viz Lehoucq a kol. (1997)). Lze tedy bez dalších úprav vyjít rovnou z tvaru (113). Bohužel se ukázalo, že takto přímočará volba nevede vždy k cíli. Pro malé počty mřížkových bodů či jednodušší málovrstevnaté modely byl výpočet bezproblémový. Potíže nastávaly ve složitějších případech, například výsledné hodnoty ω_0 byly závislé na počtu mřížkových bodů J pro velká J , případně celý algoritmus (QZ) selhal.

Standardní vlastní problém. Ukázalo se, že převedením (113) na standardní vlastní problém tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \gamma \mathbf{x}$ se lze vyhnout všem neduhům předchozího případu. Jelikož díky (70) není matice \mathbf{P} singulární, lze provést inverzi a transformaci na požadovaný tvar

$$(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0 = \gamma \hat{\mathbf{Y}}_0, \quad \gamma = -\frac{1}{\omega_0^2}. \quad (114)$$

Chování spektra získaného z (114) bylo zcela uspokojivé, fyzikální podmínka $\omega_0 \in \mathbb{R}$ byla vždy dobře splněna, kromě mizivého procenta komplexně sdružených párů, což bylo nutno přičíst na vrub numerickým efektům.

Pro ilustraci uvedeme několik vypočtených hodnot vlastních frekvencí vybraných módů pro případ homogenní stlačitelné koule s následujícími parametry:

Následují výsledky, ω_0 bylo přepočteno na frekvenci f_0 vztahem $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$.

Tab. 1: Parametry jednoduchého homogenního modelu.

poloměr	$r = 6371$ km
hustota	$\varrho = 5517$ kg·m ³
modul torze	$\mu = 145.19$ GPa
koeficient adiabatické nestlačitelnosti	$K = 449.67$ GPa
počet mřížkových bodů	$J = 30$

mód	f_0 [μ Hz]	mód	f_0 [μ Hz]
${}_0S_2$	380.95	${}_0T_2$	320.53
${}_1S_2$	703.20	${}_1T_2$	914.50
${}_2S_2$	1137.72	${}_2T_2$	1347.48
${}_3S_2$	1558.44	${}_3T_2$	1764.88
${}_0S_5$	850.83	${}_0T_5$	802.98
${}_1S_5$	1318.63	${}_1T_5$	1403.36
${}_2S_5$	1687.83	${}_2T_5$	1859.61
${}_3S_5$	2097.79	${}_3T_5$	2292.12

V takto jednoduchých případech bylo zpřesnění ω_0 pomocí knihovny ARPACK zanedbatelné, proto jej neuvádíme. Význam mělo u složitějších vícevrstevnatých modelů a to až v řádu procent.

4.4 Chování viskoelastického modelu

V případě obou linearizovaných metod řešení (jak pomocí vlastních čísel, tak soustavou lineárních rovnic) bylo úkolem k zadané frekvenci $\omega_0 \in \mathbb{R}$ dané (114) a případně i vlastnímu vektoru $\hat{\mathbf{Y}}_0$ nalézt opravnou hodnotu $\delta\omega \in \mathbb{C}$ a vektor $\hat{\mathbf{Y}}_L$ tak, aby $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ minimalizovala výraz

$$\|(\omega^3 \mathbf{R} + \omega \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L\|. \quad (115)$$

Nahlédneme nyní na jednotlivé případy metod řešení. Dlužno ještě dodat, že i přes blokovou strukturu matic \mathbf{P} , \mathbf{R} a \mathbf{Q} , se užití specializovaných podprogramů pro blokové matice neosvědčilo (stejně jako v případě čistě elastických kmitů).

4.4.1 Metoda vlastních čísel

Zobecněný vlastní problém. Pomocí knihovny IMSL bylo nejprve provedeno řešení vlastního problému pro hodnoty $\delta\omega$ ve tvaru

$$(\omega_0^3 \mathbf{R} + \omega_0 \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L = \delta\omega(-3\omega_0^2 \mathbf{R} - \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L, \quad (116)$$

kde ω_0 je vlastní frekvence elastického modelu, jak popsáno v části 4.3. Ze získané sady hodnot $\delta\omega_i$ byly ku zpřesňujícímu iteračnímu procesu pomocí knihovny ARPACK vybrány takové, které splňovaly podmínku linearizace $|\delta\omega| \ll \omega_0$. Ty bylo možno po jeho provedení rozčlenit do následujících tří kategorií.

1. Hodnoty které prokazovaly divergující tendenci hned po několika, případně i jednom cyklu. Takové byly zjevným, čistě numerickým efektem.
2. Takové $\delta\omega$, které nepravidelně oscilovaly kolem nějaké hodnoty po velké množství iterací. Ty zpočátku vzbuzovaly jistou naději, avšak metodou tlumených iterací bylo prokázáno, že i ony nemají fyzikální význam.
3. A konečně velmi rychle konvergující (maximálně do pěti cyklů), velkou naději vzbuzující $\delta\omega$. Jejich podstatným nedostatkem ovšem byla naprostá závislost na nefyzikálních parametrech úlohy jako například počtu mřížkových bodů, či rozdělení jedné modelové vrstvy na dvě stejných fyzikálních vlastností.

Stejně jako v případě elastických kmitů, ani tentokrát se metoda zobecněného vlastního problému neukázala funkční.

Standardní vlastní problém. Inverzí regulární, pravé strany rovnice (116), byla úloha převedena na ekvivalentní, ve tvaru

$$(-3\omega_0^2 \mathbf{R} - \mathbf{P})^{-1} \cdot (\omega_0^3 \mathbf{R} + \omega_0 \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L = \delta\omega \hat{\mathbf{Y}}_L. \quad (117)$$

V souladu s očekáváním se vypočtené výsledky chovaly o něco lépe. Přinejmenším alespoň v tom smyslu, že závisely jen na fyzikálních parametrech úlohy. Iterační zpřesňování knihovnou ARPACK však i nadále nedopadalo nejlépe. Nabízíme tedy alespoň grafické zpracování výsledků pro některé vybrané modely.

Vysvětlivky. Znázorněny jsou vždy grafy $\text{Im}(\delta\omega)$ udávajících útlum v jednotkách $(10^3 \cdot \text{rok})^{-1}$, resp. pro větší přehlednost dekadické logaritmy absolutních hodnot. V grafu a) jsou vyneseny hodnoty $\text{Im}(\delta\omega) > 0$, v grafu b) hodnoty $\text{Im}(\delta\omega) < 0$, to vše v závislosti na frekvenci v jednotkách μHz o rozsahu $f \in \langle 0, 10^4 \rangle$. Tato závislost ale není spojitá: diskrétní hodnoty f odpovídají hodnotám f_0 spočteným pro elastický případ. Na grafu c) je znázorněn výsledek výpočtu pro $\text{Re}(\delta\omega)$, udávající opravu v reálné části frekvence. Vynesena je již přepočtená hodnota δf v jednotkách μHz

$$\delta f = \frac{\text{Re}(\delta\omega)}{2\pi}, \quad (118)$$

resp. dekadický logaritmus její absolutní hodnoty. Pro rozlišení kladné či záporné opravy je užito symbolu křížku (\times) pro případ $\text{Re}(\delta\omega) > 0$ a kolečka (\odot) pro $\text{Re}(\delta\omega) < 0$. Na uvedených grafech je vyneseno celé spektrum $\delta\omega$ pro každou jednu f_0 a znázorněno tečkou (\cdot). Symboly (\times, \odot) jsou zvýrazněny pouze hodnoty, jež splňují podmínku linearizace, tedy taková $\delta\omega$, že $|\text{Re}(\delta\omega)| < \omega_0$. Konečně na čtvrtém grafu d) je vyneseno dekadický logaritmus normy vektoru \mathbf{e} definovaného

$$\mathbf{e} = (\omega^3 \mathbf{R} + \omega \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_L, \quad (119)$$

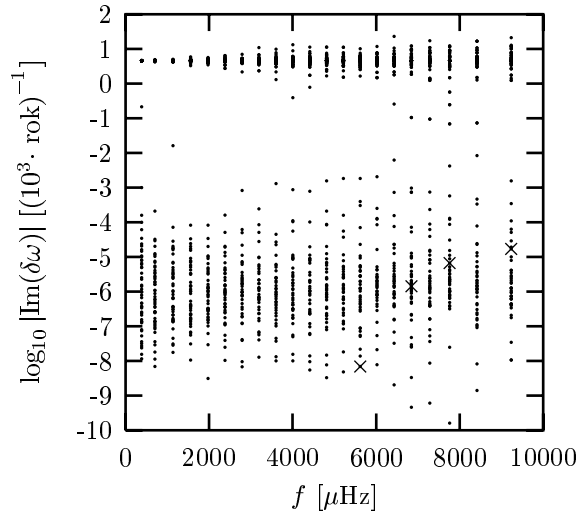
kde $\hat{\mathbf{Y}}_L$ vlastní vektor $\hat{\mathbf{Y}}_L$ příslušný $\delta\omega$. Do úvahy jsou zde brány jen $\delta\omega$ splňující linearizační podmínky. Vše opět v závislosti na frekvenci (pro každé úhlové číslo n tak získáváme $\delta\omega$ pro jednotlivé ${}_p S_n$, či ${}_p T_n$).

Nyní uvedeme jednotlivé reprezentativní případy s krátkým komentářem.

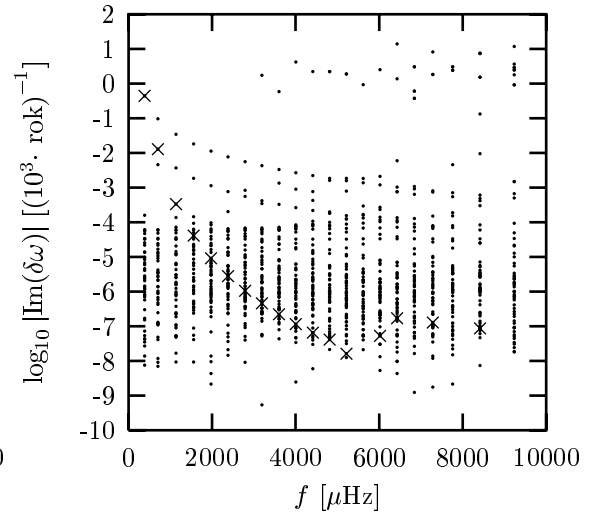
- Obr. 1, str. 35. V první řadě byl zvažován nejjednodušší možný případ, t.j. homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31 (mimo K), s konstantní viskozitou $\eta = 10^{21} \text{Pa}\cdot\text{s}$. Bylo zjištěno, že ve spektru $\delta\omega$ existuje vždy jen jedna hodnota splňující podmínky linearizace. Je zajímavé, že tato skutečnost platí pro všechny počítané modely, včetně stlačitelných. Nejvyšší hustota bodů je v oblasti (zhruba) $\text{Re}(\delta\omega) \in (\frac{1}{3}\omega_0, 3\omega_0)$. Velkým překvapením je v uvedeném případě velká kumulace $\text{Im}(\delta\omega)$ v záporné oblasti, což neodpovídá fyzikálnímu očekávání ze vzorce (89). Na vině může být z numerického hlediska velká hodnota maxwellovského času $t_M = 1/\xi = \eta/\mu \approx 10^{10} \text{s}$.

- Obr. 2, str. 36. Stejný model jako v předchozím případě, s podstatným rozdílem ve viskozitě: $\eta = 10^{11}$ Pa·s. Dramatický skok ve viskozitě ovšem není provázen dramatickým přesunem do oblasti $\text{Im}(\delta\omega) > 0$, navíc pro prvních několik módů zřejmě nejsou splněny podmínky linearizace. Dalším experimentováním s různými hodnotami viskozit se situace nezlepší. Lze snad jen konstatovat, že s řádově klesající η přestávají být splněny podmínky linearizace. Zároveň dochází k chaotickému „přelévání“ hodnot mezi kladnou a zápornou oblastí $\text{Im}(\delta\omega)$. Chování nestlačitelného modelu pro různé hodnoty úhlového čísla n si zachovává uvedené charakteristiky.
- Obr. 3, str. 37. Opět homogenní model z Tab. 1, str. 31, tentokrát ve stlačitelném případě s úhlovým číslem $n = 5$, viskozitou $\eta = 10^{20}$ Pa·s. Celkové chování homogenních stlačitelných modelů vykazuje stejné znaky jako v případě stlačitelných.
- Obr. 4, str. 38. Pro úplnost uvedeme ještě ukázkový výpočet $\delta\omega$ pro případ toroidálních módů s úhlovým číslem $n = 2$. Jedná se o stejný homogenní nestlačitelný model s viskozitou $\eta = 10^{19}$. Celkově ovšem musíme konstatovat, že ani experimentování s toroidálními módy pro dané modely nepřinesla očekávané výsledky.

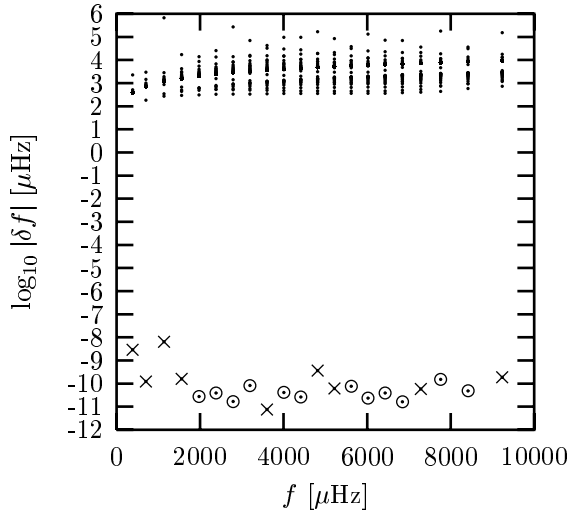
a) $\text{Im}(\delta\omega) > 0$



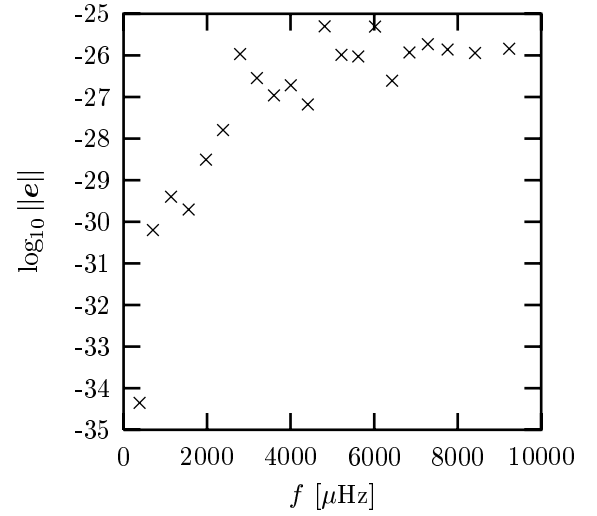
b) $\text{Im}(\delta\omega) < 0$



c) $\text{Re}(\delta\omega)$

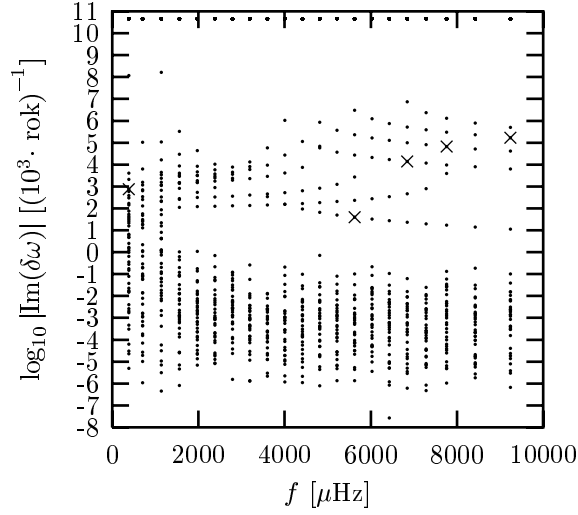


d) $\|e\|$

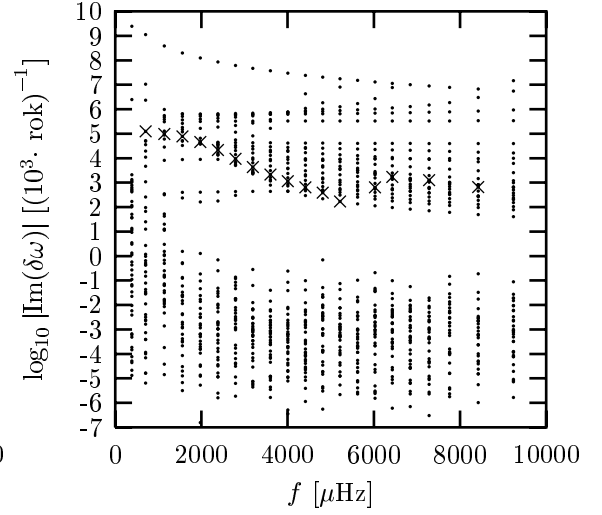


Obr. 1: Výpočet $\delta\omega$ metodou vlastních čísel pro módy pS_2 . Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{21}$ Pa·s.

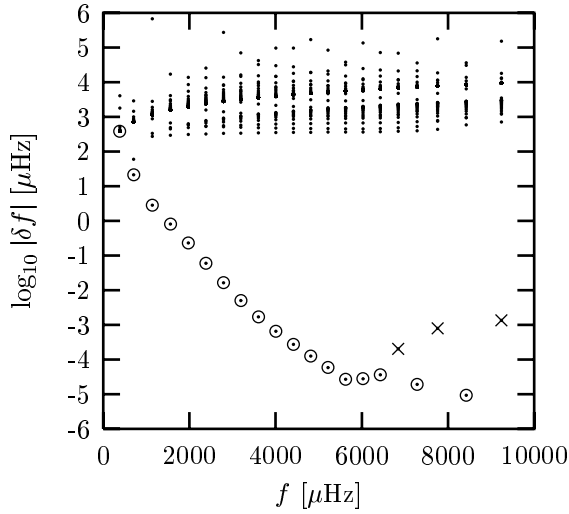
a) $\text{Im}(\delta\omega) > 0$



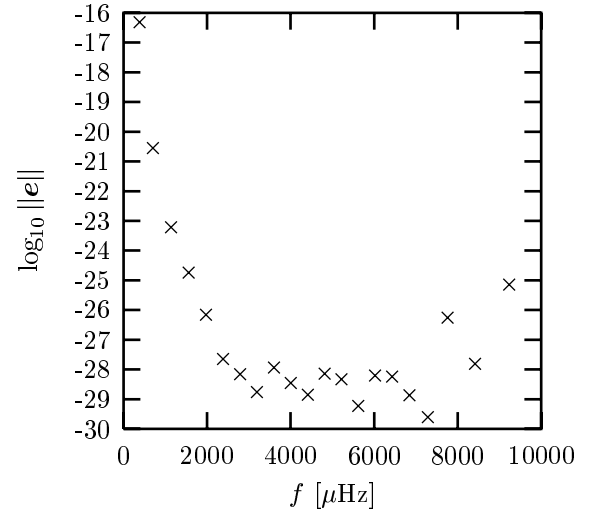
b) $\text{Im}(\delta\omega) < 0$



c) $\text{Re}(\delta\omega)$

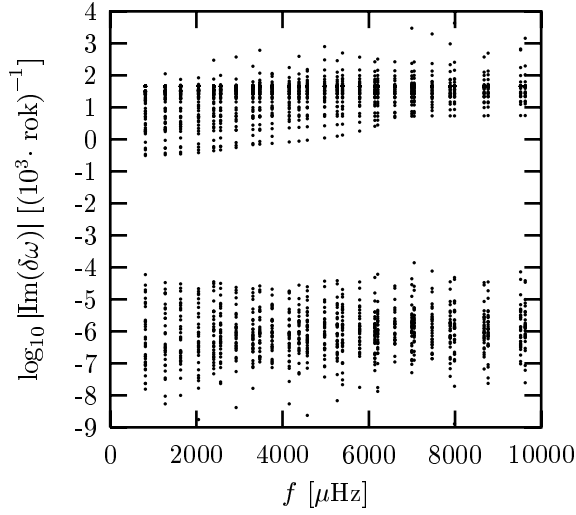


d) $\|e\|$

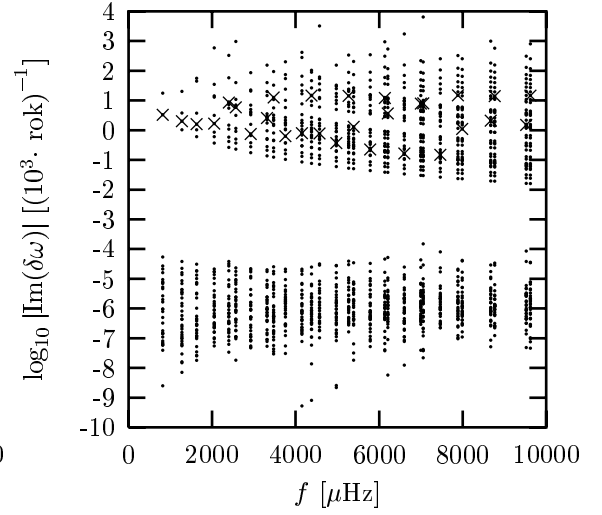


Obr. 2: Výpočet $\delta\omega$ metodou vlastních čísel pro módy pS_2 . Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{11}$ Pa·s.

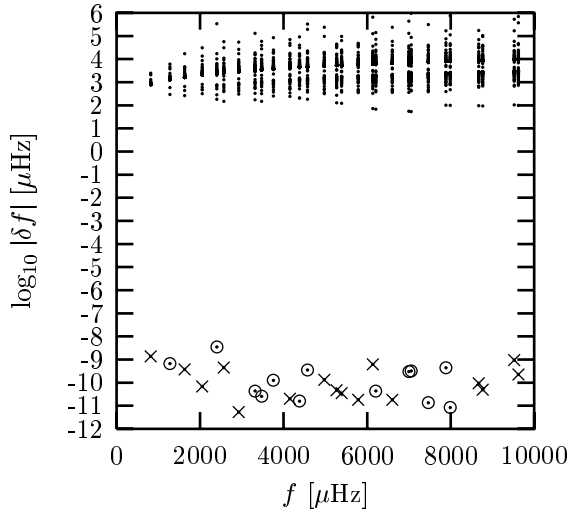
a) $\text{Im}(\delta\omega) > 0$



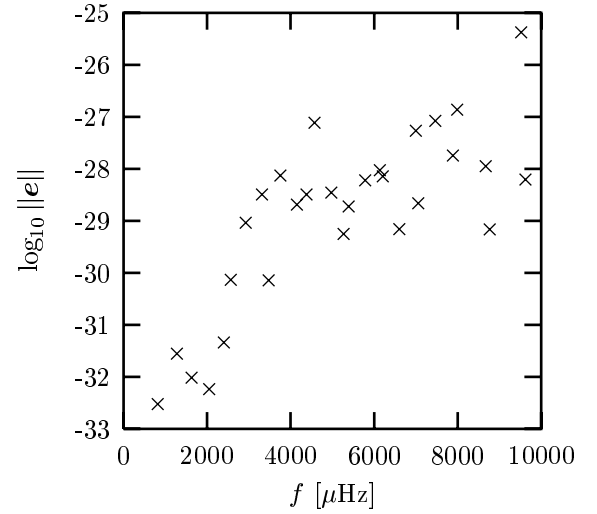
b) $\text{Im}(\delta\omega) < 0$



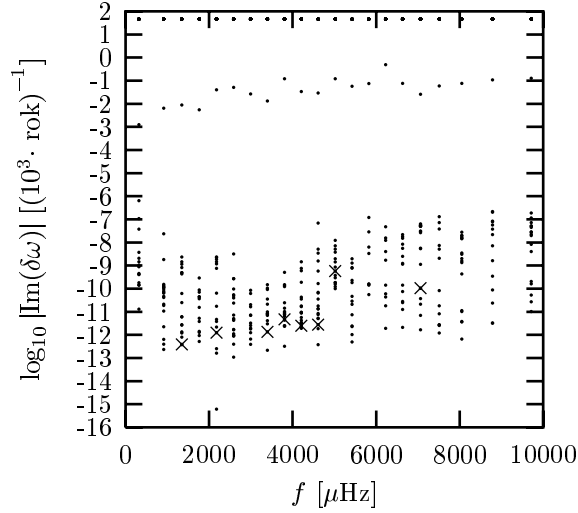
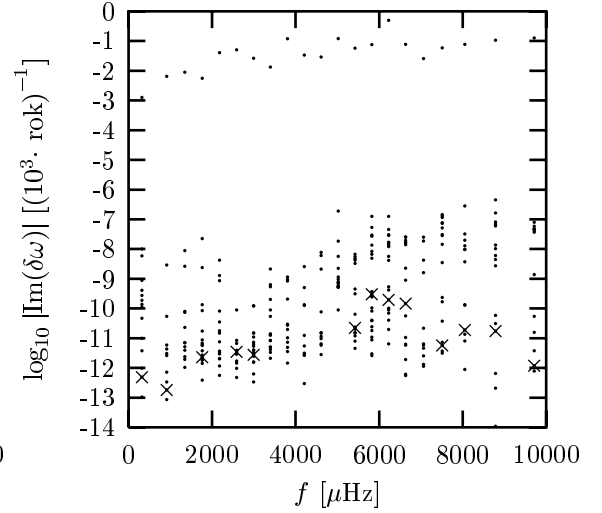
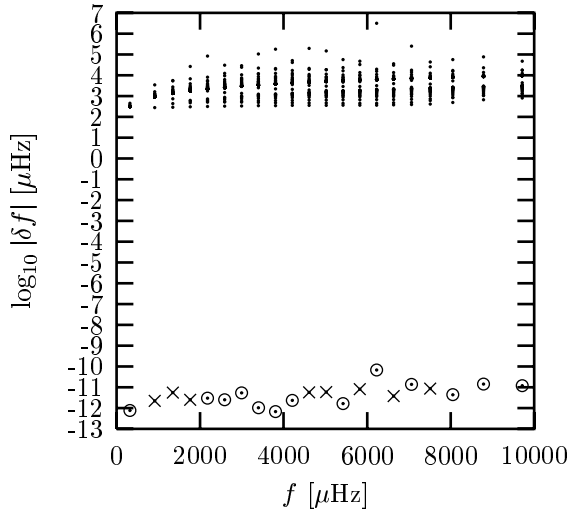
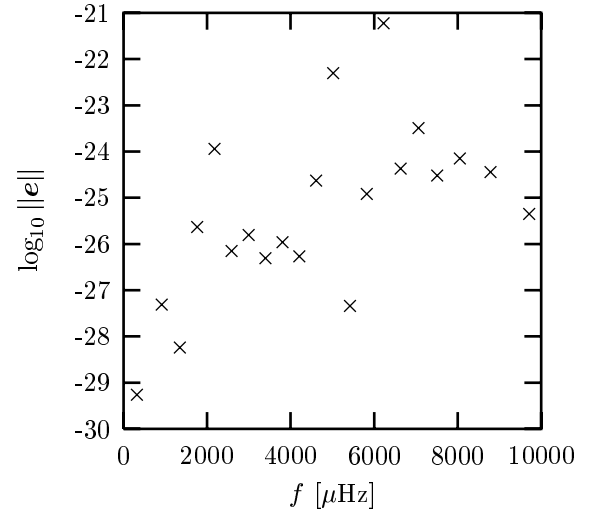
c) $\text{Re}(\delta\omega)$



d) $\|e\|$



Obr. 3: Výpočet $\delta\omega$ metodou vlastních čísel pro módy pS_5 . Homogenní stlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{20}$ Pa.s.

a) $\text{Im}(\delta\omega) > 0$ b) $\text{Im}(\delta\omega) < 0$ c) $\text{Re}(\delta\omega)$ d) $\|e\|$ 

Obr. 4: Výpočet $\delta\omega$ metodou vlastních čísel pro módy pT_2 . Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{19}$ Pa·s.

4.4.2 Metoda soustavy lineárních rovnic

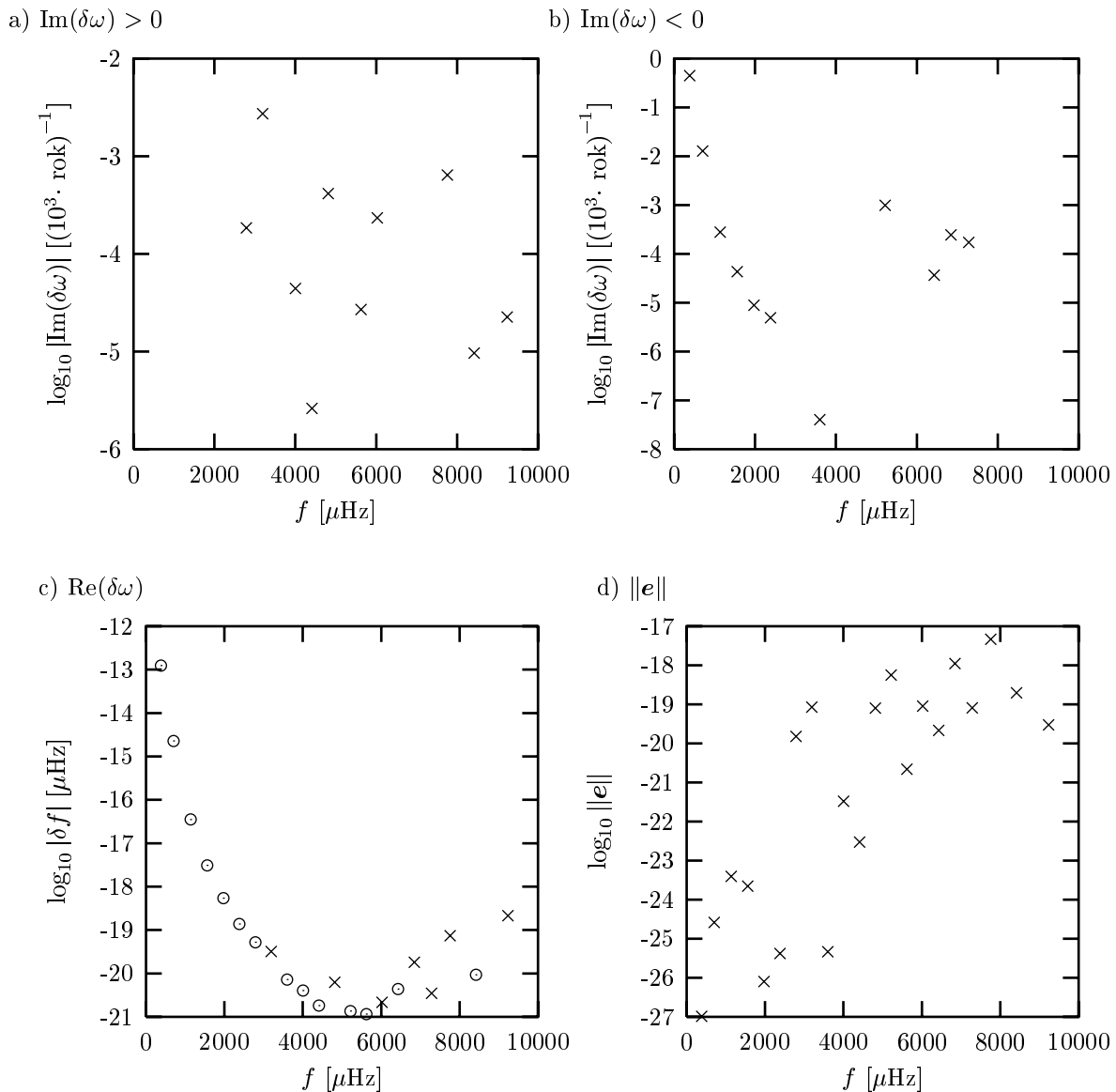
Touto metodou bylo ke každému jednotlivému páru vlastní číslo/vektor $(\omega_0, \hat{\mathbf{Y}}_0)$ získaného řešením (114) nalezen právě jeden pár $(\delta\omega, \delta\hat{\mathbf{Y}})$ řešením soustavy lineárních rovnic (101). Linearizovaný vektor $\hat{\mathbf{Y}}_L$ aproximující skutečný vlastní vektor $\hat{\mathbf{Y}}$ je pak definován jako

$$\hat{\mathbf{Y}}_L = \hat{\mathbf{Y}}_0 + \delta\hat{\mathbf{Y}}. \quad (120)$$

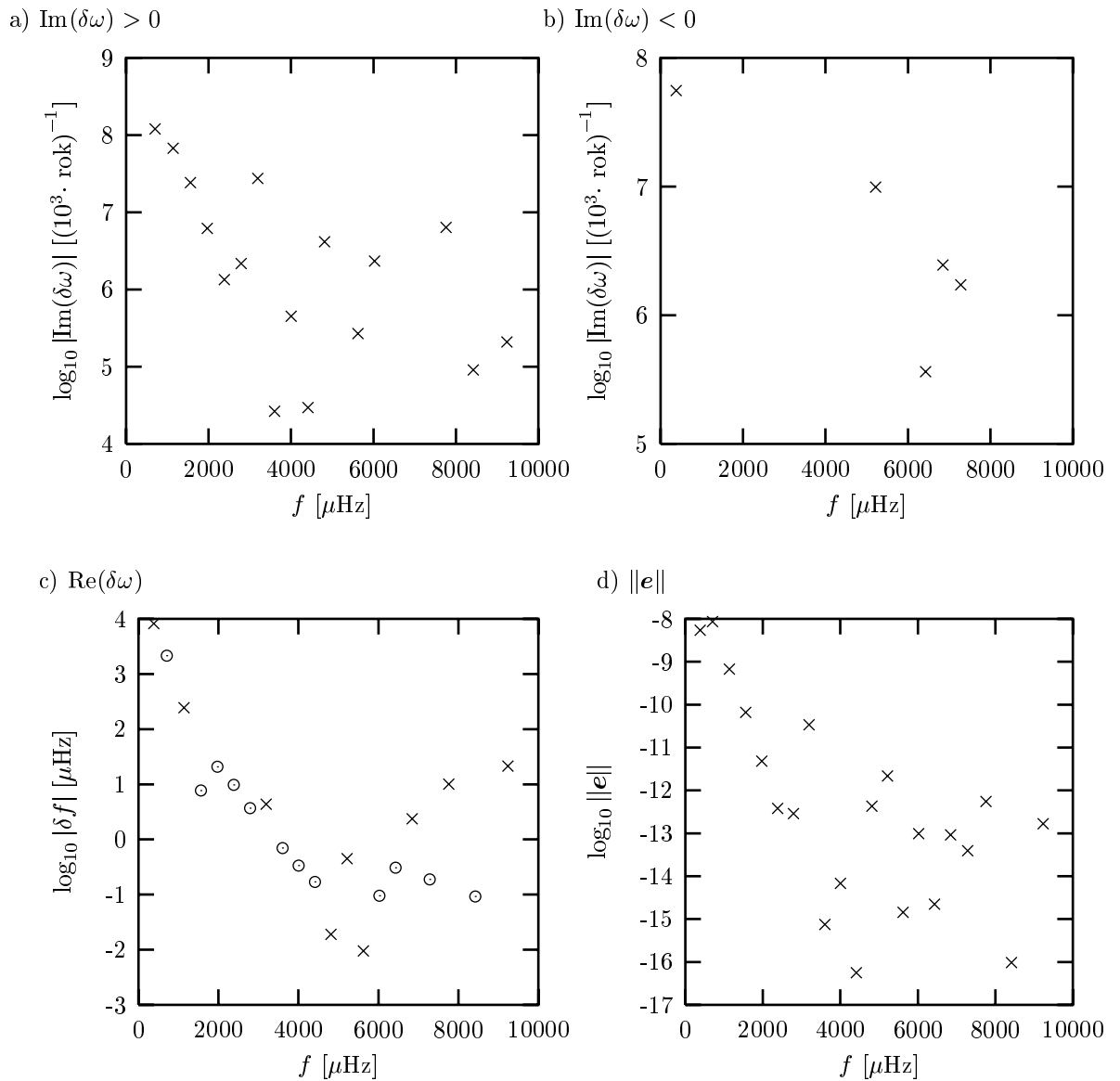
Pro srovnání s metodou vlastních čísel nabízíme grafickou podobu výpočtů pro stejné případy. Obecně lze říci, že vyjma několika málo shodných hodnot nelze prokázat shodu mezi oběma metodami. Bez přihlídnutí ke konkrétním hodnotám se však obě metody chovaly stejně nepředvídatelně.

Uvedené grafy zachovávají stejné konvence jako v případě metody vlastních čísel.

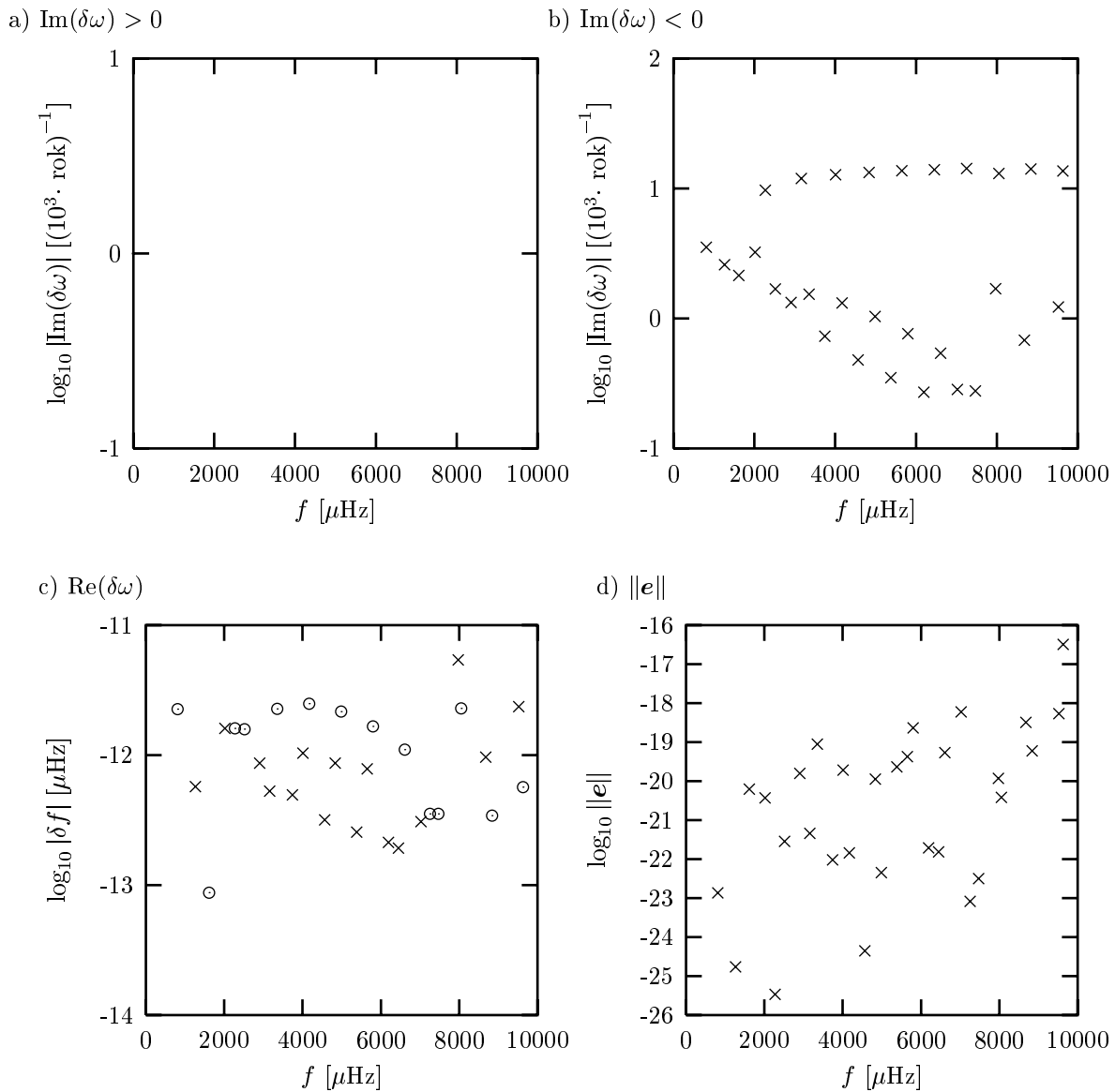
- Obr. 5, str. 40. Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31 (mimo K), s konstantní viskozitou $\eta = 10^{21}$ Pa·s. Odpovídá Obr. 1, str. 35.
- Obr. 6, str. 41. Stejný model jako v předchozím případě, s rozdílem ve viskozitě: $\eta = 10^{11}$ Pa·s. Odpovídá Obr. 2, str. 36.
- Obr. 7, str. 42. Opět homogenní model z Tab. 1, str. 31, tentokrát ve stlačitelném případě s úhlovým číslem $n = 5$, viskozitou $\eta = 10^{20}$ Pa·s. Odpovídá Obr. 3, str. 37.
- Obr. 8, str. 43. Příklad toroidálních módů s úhlovým číslem $n = 2$. Jedná se o stejný homogenní nestlačitelný model s viskozitou $\eta = 10^{19}$. Odpovídá Obr. 4, str. 38.



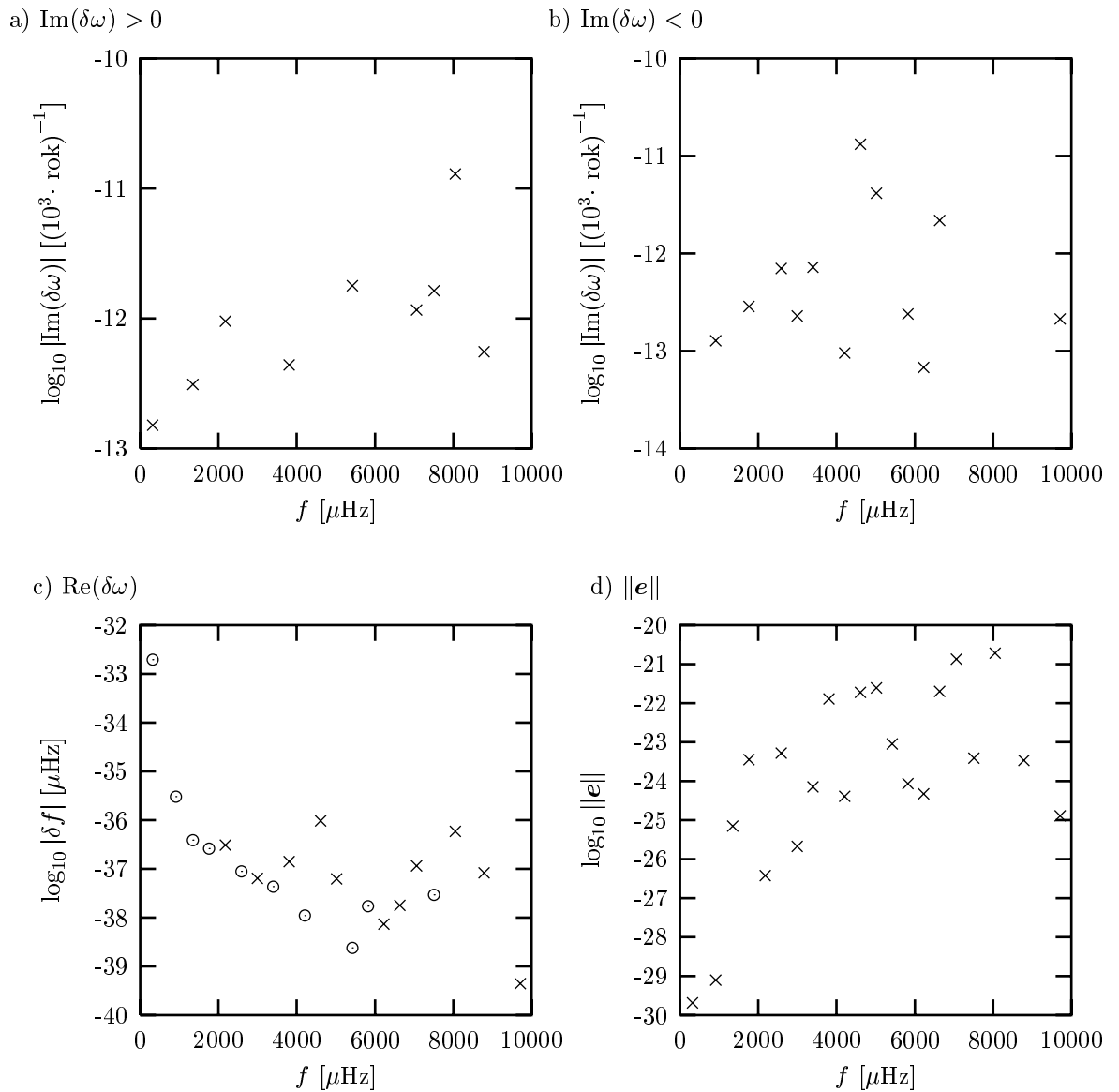
Obr. 5: Výpočet $\delta\omega$ metodou soustavy lineárních rovnic pro módy pS_2 . Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{21}$ Pa·s. Odpovídající Obr. 1, str. 35.



Obr. 6: Výpočet $\delta\omega$ metodou soustavy lineárních rovnic pro módy pS_2 . Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{11}$ Pa·s. Odpovídající Obr. 2, str. 36.



Obr. 7: Výpočet $\delta\omega$ metodou soustavy lineárních rovnic pro módy ${}_pS_5$. Homogenní stlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{20}$ Pa·s. Odpovídající Obr. 3, str. 37.



Obr. 8: Výpočet $\delta\omega$ metodou vlastních čísel pro módy pT_2 . Homogenní nestlačitelný model uvedený v Tab. 1, str. 31, s viskozitou $\eta = 10^{19}$ Pa·s. Odpovídající Obr. 4, str. 38.

4.4.3 Složitější modely

Ze složitějších vícevrstevnatých modelů byly uvažovány dva. Především model uvedený v Tab. 2, str. 44 (J udává počet mřížkových bodů v každé vrstvě). Motivací bylo odhadnout viskozitu astenosféry η_A tak, abychom získali útlum alespoň v řádu dnů. Jádro bylo uvažováno buďto přímo kapalné, nebo s uvedeným μ a nenulovou viskozitou. Rychlost S vln v jádře by mohla být až $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (viz. Masters & Shearer (1995)) a modul torze μ_C by tak mohl být až $\mu_C \approx 10^8 \text{ Pa}$. Odhady viskozit η_C se pak pohybují v rozmezí od $10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ až do $10^{11} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, přičemž střídme odhady udávají η_C kolem $10^7 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ až $10^8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Tab. 2: Parametry jednoduchého viskoelastického modelu Země typu: litosféra–astenosféra–plášť–jádro.

r [km]	ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	μ [GPa]	K [GPa]	η [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]	J
3480	10926	μ_C	1100	η_C	20
6151	4314	145	300	10^{21}	20
6251	3300	70	130	η_A	20
6371	3300	40	100	10^{21}	20

Speciálně pro odhad fyzikálních parametrů η_C a μ_C vnějšího jádra byl zkonstruován další model v Tab. 3, str. 44. Vnitřní jádro bylo uvažováno buďto přímo elastické, či s velmi vysokou viskozitou η_I (z numerických důvodů).

Tab. 3: Parametry modelu Země s viskoelastickým vnějším jádrem.

r [km]	ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	μ [GPa]	K [GPa]	η [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]	J
1221	13000	160	1390	η_I	20
3480	10296	μ_C	1000	η_C	20
6251	4314	145	400	10^{21}	20
6371	3300	40	100	10^{21}	20

Bohužel experimentování s oběma modely pro různé kombinace η_I , η_C a μ_C nepřineslo vůbec žádné výsledky. A to ani metodou vlastních čísel, ani metodou soustavy lineárních rovnic. Zřejmě díky jejich složitosti oproti homogenním modelům bylo zjištěno ještě chaotičtější chování. Nahrazování kapalných resp. elastických vrstev viskoelastickými s nízkými či extrémně vysokými viskozitami nevedlo k cíli. Hodnoty $\text{Im}(\delta\omega)$ a $\text{Re}(\delta\omega)$ vykazovaly zcela nepředvídatelnou strukturu v závislosti na různých parametrech. Proto neuvědomíme žádné grafy oprav sferoidálních či toroidálních módů a raději zkusíme nahlédnout do možných příčin takového neúspěchu.

4.5 SVD analýza

Velmi mocnou technikou při nahlížení do numerické struktury maticových problémů je singulární rozklad (SVD).

Věta 3. (Singulární rozklad): *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, přičemž $m \geq n$. Pak existují unitární matice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ a $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*, \quad (121)$$

kde $\mathbf{\Sigma}$ je diagonální matice o rozměrech $n \times n$. Čísla $\Sigma_{ii} = \sigma_i \in \mathbb{R}_0^+$ se nazývají singulárními hodnotami matice \mathbf{A} .

Tento rozklad existuje i v případě, že počet sloupců n je větší než počet řádků m , pak lze říci, že alespoň $n - m$ singulárních hodnot je nulových.

Definujme ještě číslo podmíněnosti matice (čtvercové) ε jako podíl největší singulární hodnoty k nejmenší. Striktně vzato je matice singulární, pokud tento podíl nelze vyčíslit, $\varepsilon \rightarrow \infty$. Pro numerické úlohy ovšem stačí, aby tento podíl byl velmi vysoký. Pro dvojitou přesnost v jazyce Fortran (naš případ) by nemělo být (řádově) $\varepsilon > 10^{12}$, viz. Press a kol. (1992).

Původním účelem SVD pro naši práci mělo být zkoumání soustavy (101) v metodě lineárních rovnic. Každá čtvercová matice \mathbf{A} pracuje v soustavě tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (122)$$

jako lineární zobrazení z vektorového prostoru \mathbf{x} do prostoru \mathbf{b} . SVD umožňuje nalézt jádro a obraz takového zobrazení. Při singulárním rozkladu matice \mathbf{A} dle (121) tvoří sloupce \mathbf{U} příslušející nenulovým σ_i ortonormální bázi obrazu, zatímco sloupce \mathbf{V} příslušející nulovým σ_i ortonormální bázi jádra.

Pokud vektor \mathbf{b} v (122) leží v obraze matice \mathbf{A} , pak vždy existuje vektor \mathbf{x} splňující (122). Pokud je matice \mathbf{A} singulární, je řešení nekonečně mnoho. Pomocí SVD však lze vybrat takové řešení, které má nejmenší velikost ve smyslu nejmenších čtverců.

Pokud vektor \mathbf{b} neleží v obraze, nemá soustava (122) žádné řešení. Stále však lze díky SVD vybrat takový vektor \mathbf{x} , který minimalizuje výraz

$$\min \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|. \quad (123)$$

V obou případech lze příslušný vektor \mathbf{x} získat (viz. Press a kol. (1992)) pomocí výpočtu

$$\mathbf{x} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Gamma}) \cdot (\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{b}), \quad (124)$$

kde matice $\mathbf{\Gamma}$ je diagonální s prvky

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{\sigma_i} \quad \text{pro} \quad \sigma_i \neq 0. \quad (125)$$

V případě, že $\sigma_i = 0$, je $\Gamma_{ii} = 0$. Toto platí i pro σ_i zanedbatelné z numerického hlediska, podrobněji např. Press a kol. (1992). Vidíme, že singulární rozklad poskytuje velmi mocný nástroj pro zacházení s podezřele se chovajícími soustavami lineárních rovnic.

Předpokládali jsme, že podmínka

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 \cdot \delta \hat{\mathbf{Y}} = 0 \quad (126)$$

v metodě lineárních rovnic může být problematickou. Jejím vynecháním bychom řešili soustavu pro více proměnných než rovnic s maticí tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ((3\omega_0^2 \mathbf{R} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0)_1 & M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((3\omega_0^2 \mathbf{R} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}_0)_n & M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad (127)$$

o $n-1$ řádcích a n sloupcích při $M_{ij} = (\omega_0^3 R + \omega_0 P + iQ)_{ij}$. Pomocí singulárního rozkladu bychom pak získali jednodimenzionální komplexní prostor všech řešení, ze kterého bychom vybrali vhodného kandidáta.

Bohužel se ukázalo, že situace je mnohem horší. Předně ve všech případech byla podmíněnost matice \mathbf{A} nesmírně špatná – bez ohledu na podmínku (126). Pro složitější modely bylo často $\varepsilon \approx 10^{20}$, v závislosti na ω_0 kolísalo ε v rozmezí několika řádů. I v nejjednodušších případech homogenních modelů se číslo podmíněnosti pohybovalo kolem $\varepsilon \approx 10^{17}$. Sada singulárních hodnot byla bohužel vždy z valné části tvořena pouze σ_i daleko za akceptovatelnou hodnotou.

Stejně dopadla i analýza singulárních hodnot matic při výpočtu metodou vlastních čísel. Výchozí matice tvaru

$$(-3\omega_0^2 \mathbf{R} - \mathbf{P})^{-1} \cdot (\omega_0^3 \mathbf{R} + \omega_0 \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \quad (128)$$

vykazovaly stabilně mimořádně špatné numerické vlastnosti. Přitom invertovatelná část $(3\omega_0^2 \mathbf{R} + \mathbf{P})$ dopadala velmi dobře s podmíněnostmi maximálně kolem $\varepsilon \approx 10^4$. Analýza singulárních hodnot matic účastnicích se výpočtů v elastickém případě tak jen potvrdila jejich bezproblémový pozorovaný charakter.

5 Závěr

Zjistili jsme, že na cestě k výpočtu frekvencí maxwellovského modelu Země leží řada překážek, jež zřejmě znemožňují jejich efektivní výpočet metodou aplikovanou v Hanyk a kol. (2002) na případ postglaciálního výzdvihu. Možné problémy lze rozdělit do tří kategorií.

1. *Vlastní čísla a linearizace.* Hned v úvodu se nám podařilo zjistit, že úloha ve vlastních číslech frekvencí ω vede na zobecněný polynomiální problém třetího řádu tvaru

$$(\omega^3 \mathbf{R} + \omega \mathbf{P} + i\mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{Y}} = 0. \quad (129)$$

Tento se vzpouzí jakékoliv přímé (neaproximační) metodě řešení. Cesta vedoucí přes linearizaci vůči opravě $\delta\omega$ oproti elastickému případu vyžaduje netriviální podmínku $|\delta\omega| \ll \omega_0$. Přitom však obecně nelze předpokládat, že $\text{Re}(\delta\omega) = 0$, což dále komplikuje situaci. I přes snahu se nepodařilo ukázat, že daná linearizace je dostatečně silná, aby v ní vymizela reálná složka $\delta\omega$.

2. *Komplexnost vstupních matic.* Pro obě aproximativní metody – metoda vlastních čísel a metoda soustavy lineárních rovnic – vstupují do podprogramů nevyhnutelně komplexní matice. Viz. rovnice (96) a (101), neboť všechny prvky matic \mathbf{P} , \mathbf{R} a \mathbf{Q} jsou reálné. Toto je podstatný rozdíl nejen oproti čistě elastickým kmitům (113), kde vystupují matice \mathbf{P} , \mathbf{R} , ale i problému postglaciálního výzdvihu s maticemi \mathbf{P} , \mathbf{Q} , viz. Hanyk a kol. (2002). V obou uvedených případech se lze komplexnosti vstupních matic vyhnout. Každý prvek $z \in \mathbb{C}$ ve tvaru $z = a + ib$ kde $a, b \in \mathbb{R}$ lze převést na matici z \mathbb{R}^2 standardním izomorfismem

$$a + ib \longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Tato skutečnost rozhodně nemá blahodárny vliv na průběh výpočtu.

3. *Numerické vlastnosti matic.* Analýza vstupních matic singulárním rozkladem ukázala na jejich extrémně špatné numerické vlastnosti – a to v obou uvažovaných metodách. Vystopování konkrétní příčiny je značně spekulativní. V každém případě výsledky analýzy ukazují, že spočteným výsledkům nelze přikládat fyzikální význam. Tím ovšem není vyloučena možná shoda obou tak rozdílných metod na několika málo hodnotách.

Literatura

- Dahlen F. A., Tromp J., *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998
- Fornberg B., *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge, New York, 1996
- Hanyk L., *Viscoelastic Response of the Earth: Initial-value approach*, Ph.D. Thesis, MFF UK, 1999
- Hanyk L., Matyska C., Yuen D.A., *Determination of Viscoelastic Spectra by Matrix Eigenvalue Analysis*, Ice Sheets, Sea Level and the Dynamic Earth, 2002, 257–273
- Lehoucq R. B., Sorensen D. C., Yang C., *ARPACK User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*, ARPACK website: <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>
- Martinec Z., *Free oscillations of the Earth*, Travaux Géophysiques, No. 591, 1984, 117–236
- Masters T. G., Shearer P. M., *Seismic Models of the Earth: Elastic and Anelastic*, Global Earth Physics, American Geophysical Union, 1995
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., *Numerical Recipes in Fortran 77*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- Rektorys K. a spolupracovníci, *Přehled užití matematiky*, Nakladatelství Prometheus, Praha, 1995
- Secco R. A., *Viscosity of the Outer Core*, Mineral Physics and Crystallography, American Geophysical Union, 1995
- Zahradník M., Motl L., *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 1995