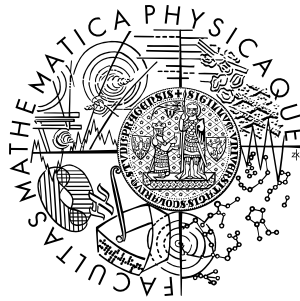


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Klára Kalousová

Tělesa Sluneční soustavy: analýza vnitřní stavby na základě topografie a gravitačního pole

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: obecná fyzika

2008

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za skvělé vedení, podnětné připomínky a velkou trpělivost. Dále bych ráda poděkovala celé katedře geofyziky za vytvoření velmi přátelského prostředí a svým rodičům za neustálou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26. 5. 2008

Klára Kalousová

Obsah

1 Úvod	6
2 Gravitační potenciál	8
2.1 Rozvoj potenciálu do řad sférických harmonických funkcí . .	9
2.2 Korelace geoidu a topografie. Admitance.	14
3 Kompenzační mechanismy	16
3.1 Izostáze	17
3.2 Elastická flexe	20
3.3 Plášťové tečení	23
4 Topografie a gravitační pole Marsu	27
4.1 Povrchové útvary na Marsu	27
4.2 Geoid a topografie Marsu	29
4.3 Výkonová spektra, korelace a admitance	33
5 Globální testy Airyho hypotézy izostáze a hypotézy elastické flexe	36
5.1 Izostatická hypotéza	36
5.2 Hypotéza elastické flexe	37
6 Závěr	39
Literatura	40

Název práce: Tělesa Sluneční soustavy: analýza vnitřní stavby na základě topografie a gravitačního pole

Autor: Klára Kalousová

Katedra (ústav): Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme gravitační pole Marsu a jeho souvislost s topografií. Nejprve uvádíme přehled základních vztahů nezbytných pro práci s gravitačním polem ve spektrální oblasti. V další části se zabýváme tzv. kompenzačními mechanismy, tedy povahou sil, které udržují stabilní povrchovou topografii. Uvádíme zde obecné rovnice rovnováhy sil pro případ izostáze, elastické flexe a plášťového tečení a odvozujeme příslušné vztahy pro gravitační potenciál. Na základě porovnání geoidu a topografie Marsu v prostorové oblasti a posouzením jejich spekter formulujeme hypotézu o různorodé povaze kompenzačních mechanismů na Marsu. Na závěr provádíme jednoduchou inverzi gravitačních dat, která potvrzuje, že geoid Marsu nelze globálně vysvětlit na základě Airyho modelu izostáze s konstantní hloubkou kompenzace ani pomocí hypotézy elastické flexe s konstantní tloušťkou elastické litosféry.

Klíčová slova: Mars, geoid, izostáze, elastická flexe, plášťové tečení

Title: Solar system bodies: internal structure analysis based on topography and gravity data

Author: Klára Kalousová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the gravity field of Mars and its connection with topography. At first, we mention the summary of basic equations, which are necessary for the work with gravity field in spectral domain. In the next section we inquire into compensation mechanisms that means into the character of forces, which hold the surface topography stable. We mention general equations of forces equilibrium for the case of isostasy, elastic flexure and mantle convection and derive corresponding equations for gravity potencial. On the basis of comparison of Martian geoid and topo-

graphy in the spatial domain and considering their spectrums, we formulate the hypothesis of heterogeneous character of compensation mechanisms on Mars. In conclusion we apply simple inversion of gravity data which confirm that it is impossible to explain the Martian geoid globally neither on the basis of Airy isostatic model with constant depth of compensation nor with the elastic flexure hypothesis with constant elastic lithosphere thickness.

Keywords: Mars, geoid, isostasy, elastic flexure, mantle convection

Kapitola 1

Úvod

Nebeská tělesa člověka přitahovala od nepaměti - ať už to byly záhadné komety, které se objevovaly jen zřídka a ohlašovaly, jak lidé věřili, štěstí či zkázu mocných, nebo planety, tělesa častěji viditelná, ale o nic méně záhadná. Většina planet byla pozorována již ve starověku, a proto nás nepřekvapí jména, která byla planetám dána na počest antických bohů. I ve středověku patřila astronomie k vědám dobře rozvinutým a planety byly nadále zájmem mnoha věhlasných jmen.

Během dlouhých staletí byla stále zdokonalována pozorovací technika, a tedy i poznatky o planetách. Tyto informace se týkají vnějších charakteristik (rozměrů a povrchu) a nebo parametrů oběhu kolem Slunce, případně parametrů rotace kolem vlastní osy. Nemáme ale takřka žádné informace o vnitřní struktuře, např. o hustotním rozložení uvnitř terestrických planet. Díky podobnosti terestrických planet se Zemi se naskýtá možnost vysvětlení jejich vnitřní struktury na základě podobných principů jako na Zemi.

Nejlepším zdrojem informací o zemském nitru je seismická tomografie [15]. Informace podobného charakteru o planetách nemáme a ani nemůžeme očekávat, že je v dohledné době budeme mít. Co ale známe, jsou údaje o topografii planet a o jejich gravitačním poli. Nabízí se tedy možnost pokusit se o vysvětlení vnitřní struktury planet na základě analýzy jejich topografie a gravitačního pole.

V této práci si klademe za cíl shrnutí nejdůležitějších vztahů pro práci s gravitačním polem a detailnější seznámení se s kompenzačními mechanismy, tedy s povahou sil, které udržují stabilní topografii povrchu (izostáze, elastická flexe, plášťové tečení). Pokusíme se odhadnout, jaké kompenzační mechanismy by mohly převládat v různých oblastech Marsu, a na závěr

vyzkoušíme, zda se gravitační pole Marsu dá vysvětlit globálně pomocí uvedených kompenzačních mechanismů.

Uvedme zde ještě stručně strukturu textu: V kapitole 2 se věnujeme hlavním vztahům potřebným pro práci s gravitačním polem a zavádíme sférické harmonické funkce. Dále pracujeme již jen s koeficienty rozvoje topografie a potenciálu, případně geoidu, do báze tvořené těmito funkcemi. V kapitole 3 se podrobně věnujeme třem základním kompenzačním mechanismům - izostázi, elastické flexi a plášťovému tečení. V kapitole 4 se zabýváme povrchovou topografií a gravitačním polem Marsu a porovnááme jejich tvar. Na základě vyložené teorie se pokoušíme předběžně odhadnout, jakými mechanismy by mohla být kompenzována topografie jednotlivých oblastí na Marsu. V kapitole 5 pak provádíme inverzi gravitačního pole a zkoumáme, zda se geoid Marsu dá globálně vysvětlit pomocí izostáze nebo elastické flexe.

Kapitola 2

Gravitační potenciál

V této kapitole uvádíme přehled základních vztahů nezbytných pro práci s gravitačním polem. Systematický výklad gravitačního pole lze nalézt např. v [2, 6, 9].

Gravitační potenciál v místě \vec{r} lze vyjádřit pomocí *Newtonova integrálu*

$$V(r, \vartheta, \varphi) = \kappa \int_{\Omega} \frac{\rho(r', \vartheta', \varphi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega', \quad (2.1)$$

kde r , ϑ a φ jsou sférické souřadnice, ρ je hustota v bodě \vec{r}' , κ je gravitační konstanta a Ω je objem Země. Potenciál (2.1) splňuje *Laplace-Poissonovu rovnici*

$$\nabla^2 V = -4\pi\kappa\rho \quad (2.2)$$

Gravitační zrychlení lze pak vyjádřit jako

$$\vec{g} = \nabla V \quad (2.3)$$

Gravitační potenciál tělesa je zpravidla reprezentován pomocí *geoidu*, definovaného jako ekvipotenciální plocha odpovídající v případě Země střední hladině oceánů. Jeho výšku můžeme odhadnout podle *Brunsova teoremu*

$$h = \frac{V(R)}{g_0(R)}, \quad (2.4)$$

kde R je poloměr tělesa a $g_0(R)$ je střední gravitační zrychlení na povrchu ($g_0 = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ v případě Země a 3.8 m s^{-2} v případě Marsu).

2.1 Rozvoj potenciálu do řad sférických harmonických funkcí

K popisu gravitačního potenciálu přibližně sférických těles se s výhodou zavádí *povrchové sférické funkce* [2, 3, 5, 8, 16]. Pro jednotkovou sféru S v E_3 a prostor C^∞ nekonečně diferencovatelných komplexních funkcí na S definujeme kanonickou bázi $Y_{jm}(\vartheta, \varphi)$, kde $j = 0, 1, \dots, \infty$ je *stupeň* dané funkce a $m = -j, \dots, j$ je její *řád*, následujícím způsobem

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m N_{jm} P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (2.5)$$

pro $m \geq 0$ a

$$Y_{j-m} = (-1)^m Y_{jm}^* \quad (2.6)$$

pro $m < 0$, kde $*$ značí komplexní sdružení, $P_{jm}(\cos \vartheta)$ ve vztahu (2.5) značí *přidružený Legendreův polynom* a N_{jm} je normalizační faktor,

$$N_{jm} = \left[\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Pro $m = 0$ je sférická funkce axiálně symetrická. Takto definované sférické povrchové funkce splňují *relace ortonormality* ve smyslu normy L_2 ,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{j_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{j_2 m_2}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (2.8)$$

Libovolnou funkci $f(r, \vartheta, \varphi) \in L_2(S \times E_1)$, která je spojitá alespoň do 2. derivace, lze pak rozvinout do této báze

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.9)$$

Díky spojitosti 2. derivace funkce f konverguje suma na pravé straně rovnice (2.9) k f stejnoměrně. Koeficienty f_{jm} získáme vynásobením funkce f komplexně sdruženou bázovou funkcí Y_{jm}^* a přeintegrováním přes celou sféru. S využitím relací ortonormality (a prohozením sumy a integrálu, což je možné díky stejnoměrné konvergenci) dostaneme

$$f_{jm}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad (2.10)$$

pro které platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |f_{jm}| = 0 \quad (2.11)$$

Pro reálnou funkci f navíc platí symetrie

$$f_{j-m} = (-1)^m f_{jm}^* \quad (2.12)$$

S využitím výše uvedených vztahů upravíme výraz (2.1). Hustotu rozvineme podle (2.9) a navíc použijeme *adiční teorém* [2], podle kterého

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_{ln}^*(\vartheta', \varphi') Y_{ln}(\vartheta, \varphi) \quad (2.13)$$

za předpokladu, že $|\vec{r}'| > |\vec{r}''|$ (počítáme potenciál vně tělesa). Pro gravitační potenciál pak dostáváme

$$\begin{aligned} V(r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j V_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left[\int_0^r \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{j+2} dr' \right] Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pro koeficienty rozvoje gravitačního potenciálu do sférických harmonických funkcí tedy platí

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \int_0^r \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{j+2} dr' \quad (2.15)$$

Analogicky pro geoid

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} \int_0^R \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{R}\right)^{j+2} dr' \quad (2.16)$$

kde R je střední poloměr tělesa (pro Země $R = 6371$ km a pro Mars 3395 km).

Vztahy (2.15), (2.16) lze použít, je-li hustota spojitou funkcí poloměru r' . Nachází-li se někde ve vzdálenosti a od středu tělesa skok v hustotě, např. na rozhraní jádra a pláště (anglicky *core-mantle boundary*, CMB), můžeme koeficienty hustoty ρ_{jm} aproximovat plošnou hustotou

$$\rho_{jm}(r') = \Delta\rho t_{jm} \delta(r' - a) \quad (2.17)$$

kde $\Delta\rho$ je hustotní skok na rozhraní, t_{jm} jsou koeficienty topografie a $\delta(r'-a)$ je Diracova δ -funkce udávající polohu hustotního rozhraní. Dosazením výrazu (2.17) do (2.15) dostáváme vztah pro koeficienty gravitačního potenciálu generovaného hustotním rozhraním

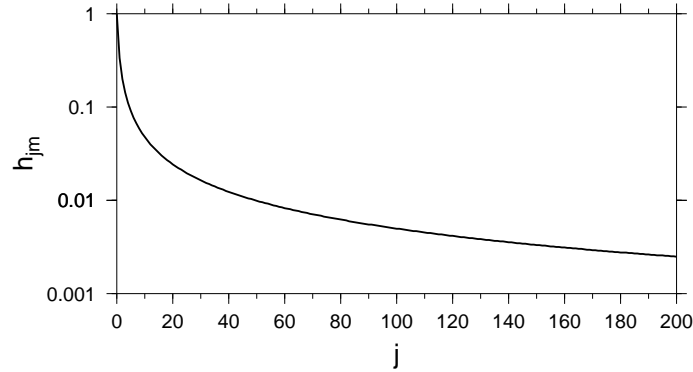
$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} t_{jm} \Delta\rho \left(\frac{a}{r}\right)^{j+2} \quad (2.18)$$

Stejně pak dosazením (2.17) do (2.16) dostaneme vztah pro koeficienty geoidu generovaného hustotním rozhraním

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} t_{jm} \Delta\rho \left(\frac{a}{R}\right)^{j+2} \quad (2.19)$$

Sady koeficientů V_{jm} , resp. h_{jm} , nazveme *spektrem* daného rozvoje. Ze vztahů (2.15), (2.16), (2.18) a (2.19) je zřejmé, že konkrétní koeficient V_{jm} , resp. h_{jm} , daného stupně a řádu závisí právě jen na hodnotě veličiny ρ_{jm} ((2.15), (2.16)), resp. t_{jm} ((2.18), (2.19)), odpovídajícího stupně a řádu a nezávisí na hodnotách koeficientů jiných stupňů a řádů.

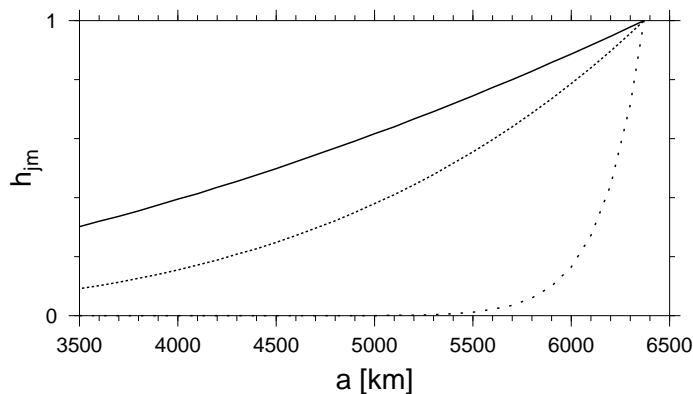
Diskutujme nyní vztah (2.19) podrobněji. Koeficienty rozvoje geoidu h_{jm} závisí na několika proměnných - na stupni j , na poloze anomálie a , na koeficientech topografie t_{jm} a na hustotním skoku $\Delta\rho$. Závislost na posledních dvou jmenovaných veličinách je lineární a nepřináší nic, co bychom mohli podrobněji zkoumat. Zaměříme se tedy na proměnné, na nichž koeficienty h_{jm} závisí nelineárně.



Obrázek 2.1: Závislost koeficientů h_{jm} , rovnice (2.19), na stupni j pro anomálii na povrchu ($a = R$). Hodnota h_{jm} je normovaná k 1.

Uvažujme nejdříve anomálii na povrchu. Potom platí $(a/R) = 1$ a koeficienty h_{jm} závisí nelineárně jen na stupni j . Pro velké j lze posloupnost $1/(2j+1)$ aproximovat hyperbolou $1/2j$, tj. s rostoucím j jsou koeficienty h_{jm} stále rychleji tlumeny. Například pro $j = 10$ klesne hodnota koeficientu $1/(2j+1)$ pod 5% hodnoty odpovídající stupni 0 (viz obr. 2.1). Koeficienty jsou tedy od určitého stupně zanedbatelné ve srovnání s koeficienty nízkých stupňů.

Nyní naopak zafixujme stupeň j a podívejme se, jak koeficienty h_{jm} závisí na poloze anomálie a . Proměnná a se ve vztahu (2.19) pro h_{jm} vyskytuje ve výrazu $(a/R)^j$, na kterém koeficienty h_{jm} závisí lineárně. Bude nás tedy zajímat, jak se mění hodnota tohoto výrazu pro konkrétní j . Pro jednoduchost pracujeme s číselnými hodnotami, které odpovídají Zemi. Anomálii uvažujeme někde v plášti, tedy přibližně od 3500 km od středu (CMB) až k povrchu. Chování výrazu $(a/R)^j$ závisí i na zvoleném stupni j - vybereme tři různé hodnoty $j = 2, 4, 30$. Uvažované závislosti jsou zachyceny na obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Závislost koeficientů h_{jm} , rovnice (2.19), na poloze anomálie a pro tři různé stupně $j = 2$ (plně), 4 (hustě tečkovaně) a 30 (řídce tečkovaně). Hodnota h_{jm} je normovaná k 1.

Pro $j = 2$ narůstá hodnota koeficientu zhruba lineárně s rostoucí vzdáleností hustotní anomálie a od středu Země. Příspěvky od anomálií, které se nacházejí ve větší hloubce, jsou menší než příspěvky od anomálií blíže u povrchu, ale nelze je zanedbat. Pro $j = 4$ je nárůst rychlejší, hlubší anomálie přispívají ke geoidu méně než anomálie blíže k povrchu, ale ani zde ještě nemůžeme příspěvky hlubších anomálií zanedbat. Naopak pro vyšší

stupeň $j = 30$ jsou koeficienty téměř nulové pro anomálie v hloubce větší než 1000 km - příspěvky těchto anomálií ke geoidu lze zanedbat. Obecně lze říci, že pro vyšší stupně j jsou koeficienty geoidu buzeného anomáliemi nacházejícími se ve větší hloubce (v menší vzdálenosti a od středu Země) značně tlumeny, tedy že vliv hlubších anomálií klesá s rostoucím stupněm j . Budeme-li navíc zkoumat potenciál mimo zemský povrch (například ze satelitu), výraz $(a/r)^{j+2}$ ve vztahu (2.18) půjde pro vyšší hodnoty j velmi rychle k nule a v rozvoji se uplatní jen členy velmi nízkého stupně, případně jen $j = 0$, pokud $r \gg a$.

Uvažujme ještě gravitační zrychlení, které vypočteme podle (2.3). Bude nás zajímat pouze radiální složka

$$g_{r,jm}^d = -\frac{\partial V_{jm}}{\partial r} = \frac{j+1}{r} V_{jm} \quad (2.20)$$

kde index r značí radiální složku a index d pochází z anglického názvu *gravity disturbances*. Záporné znaménko je důsledkem opačné orientace radiálního vektoru \vec{e}_r a vektoru tíhového zrychlení \vec{g} (tíhové zrychlení je kladné směrem ke středu tělesa, zatímco radiální vektor \vec{e}_r je kladný ve směru od středu tělesa). Spektrum gravitačního zrychlení klesá s j pomaleji než spektrum gravitačního potenciálu - to způsobuje, že ve spektru se více projeví krátkovlnné anomálie (anomálie menších laterálních rozměrů). Gravitačních disturbancí se využívá, pokud potřebujeme znát gravitační zrychlení na povrchu sféry o poloměru r . Zajímá-li nás ale gravitační zrychlení na geoidu (ekvipotenční ploše), je třeba hodnoty $g_{r,jm}^d$ opravit o přírůstek odpovídající výšce geoidu - počítáme tzv. anomálii na volný vzduch (*free-air anomaly*). Při jejím výpočtu bereme v úvahu vzdálenost mezi bodem na geoidu a bodem na povrchu a předpokládáme, že tato vzdálenost je vyplněna vzduchem. Platí tedy

$$g_{r,jm}^a = g_{r,jm}^d + \Delta_{jm} \quad (2.21)$$

Korekční člen Δ_{jm} můžeme vyjádřit následujícím způsobem

$$\Delta_{jm} \doteq \frac{\partial g_r^0}{\partial r} h_{jm} = -\frac{2}{r} V_{jm} \quad (2.22)$$

kde jsme použili vztah $g_r^0 = \kappa \frac{M}{r^2}$ a Brunsův teorém (2.4). Dosazením (2.22) do (2.21) dostaneme

$$g_{r,jm}^a = \left(\frac{j+1}{r} - \frac{2}{r} \right) V_{jm} = \frac{j-1}{r} V_{jm} \quad (2.23)$$

2.2 Korelace geoidu a topografie. Admitance.

Označme funkci vzniklou sečtením koeficientů f_{jm} pro daný stupeň j jako f_j ,

$$f_j(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-j}^j f_{jm} Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.24)$$

Výkon F_j funkce f na stupni j definujeme jako kvadrát velikosti koeficientu f_j ve smyslu L_2 normy

$$F_j = \|f_j\|_{L_2}^2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j f_j^* \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \sum_{m=-j}^j f_{jm} f_{jm}^* \quad (2.25)$$

kde poslední rovnost plyne z definice f_j a z ortonormality sférických harmonických funkcí (2.8).

Abychom mohli určit, do jaké míry se shodují dvě funkce f a g na daném stupni j (resp. na dané vlnové délce $\Lambda = (2\pi r)/j$), zavádíme *korelační koeficient* c_j , který definujeme jako skalární součin normovaných funkcí f_j a g_j [11]

$$c_j = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j g_j^* \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}{\sqrt{F_j G_j}} = \frac{\sum_{m=-j}^j f_{jm} g_{jm}^*}{\sqrt{\sum_{m=-j}^j f_{jm} f_{jm}^* \sum_{m=-j}^j g_{jm} g_{jm}^*}} \quad (2.26)$$

Korelační koeficient vyjadřuje tvarovou podobnost polí. Jsou-li funkce f a g tvarově shodné, je korelační koeficient roven jedné. Naopak nejsou-li si funkce f a g vůbec podobné, jejich korelační koeficient je roven nule. Statistický význam korelačního koeficientu závisí na počtu volných parametrů (na počtu koeficientů rozvoje pro daný stupeň). K ocenění statistické významnosti korelace se zavádí tzv. *úroveň spolehlivosti* $G_j(q)$ pro stupeň j odpovídající korelačnímu koeficientu hodnoty q . V praxi se hledá taková hodnota q pro každý stupeň j , které odpovídá úrovni spolehlivosti větší než nějaké zvolené číslo (běžně se volí 95% nebo 98%). Do korelačního grafu se pak vynáší křivka závislosti takových q na stupni j . Úroveň spolehlivosti vypočteme rekurzivně podle následujících vztahů

$$G_1(q) = q$$

$$G_j(q) = G_{j-1}(q) + q(1 - q^2)^{j-1} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{2i - 1}{2i} \quad (2.27)$$

Podrobněji se korelací dvou polí definovaných na kouli zabývá [10].

Vztah mezi geoidem a topografií je nejčastěji charakterizován *admitancí* A_j

$$h_{jm} = A_j t_{jm} + u_{jm} \quad (2.28)$$

Tímto výrazem jsme rozdělili geoid na část korelovanou s topografií (vhodně normovanou koeficienty A_j) a na ortogonální doplněk (*reziduum*) u_{jm} . Koeficienty admitance lze vypočítat z rovnice (2.28) vynásobením komplexně sdruženým koeficientem topografie t_{jm}^* a sečtením přes m (člen $\sum_{m=-j}^j u_{jm} t_{jm}^*$ je nulový díky ortogonalitě rezidua vzhledem k topografii). Pro admitanci potom platí

$$A_j = \frac{\sum_{m=-j}^j h_{jm} t_{jm}^*}{\sum_{m=-j}^j t_{jm} t_{jm}^*} = c_j \sqrt{\frac{H_j}{T_j}} \quad (2.29)$$

kde H_j a T_j je výkon geoidu, resp. topografie, na stupni j .

Kapitola 3

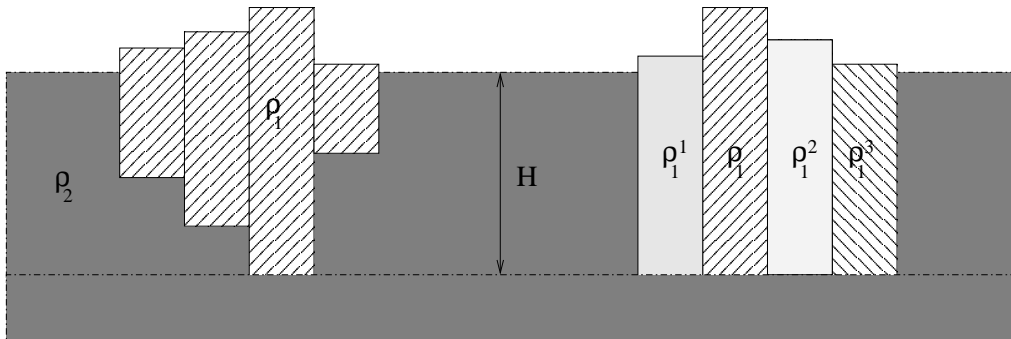
Kompenzační mechanismy

V této části se budeme zabývat *kompenzačními mechanismy*. Topografie planety představuje silové zatížení povrchu. Vzhledem k tomu, že se nezanořuje hlouběji do nitra planety, musí zde existovat také síly mířící od středu planety, které ji drží (např. vztlak nebo elastické síly). Hledáme síly, které budou v rovnováze s tíhou topografie (budou kompenzovat její silový účinek na povrch). Kompenzačními mechanismy tedy máme na mysli povahu sil, které udržují povrchovou topografii - vyložíme zde základní poznatky o *izostázi, elastické flexi a plášťovém tečení*.

Při pohledu na geoid a topografii libovolné planety si všimneme, že některé povrchové topografické útvary tvarově odpovídají gravitačnímu poli (geoid korelovaný s topografií), jiné se naopak liší od gravitačního pole (nekorelovaná část geoidu). V korelovaných místech je geoid buzen převážně povrchovou topografií - předpokládáme tedy rovnoměrné rozložení hustoty pod povrchem bez výrazných hustotních anomálií. Naopak v nekorelovaných místech přispívají ke geoidu také jiné hmoty než jen povrchová topografie - zde tedy předpokládáme hustotní anomálie uvnitř pláště. Pomocí kompenzačních mechanismů lze vysvětlit souvislost mezi anomáliemi na povrchu a v plášti a na základě úvah o kompenzaci vytvářet hustotní modely uvnitř pláště. Jedná se o obrácenou (inverzní) úlohu určení vnitřního rozložení hustoty v plášti na základě znalosti vnějšího gravitačního potenciálu (inverze vztahu (2.1)). Úloha je silně nejednoznačná, neboť existuje nekonečně mnoho hustotních rozložení, která budí stejný potenciál.

3.1 Izostáze

V 19. století vznikly dvě nezávislé hypotézy (Airyho a Prattova) o *izostatické kompenzaci* topografie - podle nich topografie (kladná nebo záporná hustotní anomálie na povrchu) musí být kompenzována hustotní anomálií opačného znaménka v plášti [6]. Podle teorie izostáze existuje *kompenzační hloubka* (označme ji H) taková, že všechny sloupce hmoty nad ní, které mají stejnou plochu podstavy, mají stejnou hmotnost (lze si to představit např. jako plování lehčích bloků na hustším prostředí). Airyho hypotéza předpokládá laterálně konstantní hustotu s různou hloubkou kořenů (kompenzační hloubka pak odpovídá poloze nejhlubšího kořenu), Prattova hypotéza naopak předpokládá stejnou hloubku kořenů, ale laterálně se měnící hustotu. Pro názornější představu viz. obr. 3.1. V této práci se přikloníme k Airyho modelu.



Obrázek 3.1: Izostatická kompenzace - vlevo Airyho hypotéza s laterálně konstantní hustotou, vpravo Prattova hypotéza s laterálně proměnnou hustotou. H je hloubka kompenzace, ρ_1 , ρ_1^1 , ρ_1^2 a ρ_1^3 jsou hustoty s blízkou hodnotou, ρ_2 je hustota hustšího prostředí ($\rho_2 > \rho_1$).

Představíme-li si tuhé bloky různé tloušťky o stejné hustotě ρ_1 plovoucí na hladině kapaliny o hustotě ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) můžeme napsat rovnici rovnováhy ve tvaru

$$\rho_1 t_1 = t_2 (\rho_2 - \rho_1) \quad (3.1)$$

kde t_1 je tloušťka té části bloku, která plave nad hladinou, a t_2 je tloušťka ponořené části bloku. V rovnici (3.1) jsme pro jednoduchost předpokládali, že velikost gravitačního zrychlení se v uvažované oblasti nemění. Budeme-li pracovat se sférickým tělesem, musíme provést korekci na sféricitu - ze

vztahu (3.1) dostaneme [6]

$$\rho_1 t_1 R^2 = t_2 (\rho_2 - \rho_1) (R - H)^2 \quad (3.2)$$

kde R je střední poloměr sférického tělesa a $(R - H)$ je vzdálenost hloubky kompenzace od středu tělesa. V případě Země je kompenzační hloubka přibližně 100 km pod povrchem, tedy $R^2 \doteq (R - H)^2$ a vztah (3.1) lze použít bez větší chyby. V případě těles s menším poloměrem (Mars) nebo větší hloubkou kompenzace je vhodnější použít vztah (3.2).

Nastiňme ještě jiný pohled na izostázi, prezentovaný často v literatuře (podrobnou diskuzi na téma izostáze lze nalézt např. v [7]). Izostáze je podle tohoto přístupu stav, kdy vymizí (zrelaxuje) smykové napětí. Předpokládejme dále, že v určité hloubce H se už tlak laterálně nemění

$$p(R - H, \vartheta, \varphi) = konst. \quad (3.3)$$

Vycházíme z rovnice rovnováhy kontinua

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{g} = 0 \quad (3.4)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí, pro který podle výše uvedeného předpokladu platí

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} \quad (3.5)$$

kde p je tlak a \mathbf{I} identický tenzor. Dosazením (3.5) do (3.4) a použitím (3.3) po úpravě dostaneme

$$p = \int_{R-H}^{R+t} \rho(r, \vartheta, \varphi) g_r(r, \vartheta, \varphi) dr = konst. \quad (3.6)$$

kde t je výška topografie (topografie se obvykle měří od geoidu, my zatím pro jednoduchost všude uvažujeme topografii vztaženou ke střednímu poloměru tělesa R). Vztah (3.6) je konzistentní se vzorcem (3.1), ale neodpovídá vzorci (3.2), kde byla stejně jako ve vztahu (3.6) uvažována sférická geometrie.

Při výpočtu koeficientů rozvoje gravitačního potenciálu (nebo geoidu) buzeného povrchem topografií a topografií rozhraní kůra - plášť, vyjdeme ze vztahu (3.3), který vyjádříme ve tvaru

$$t_S \rho_S + t_M \Delta \rho_M = konst \quad (3.7)$$

kde index S značí povrch (z anglického *surface*) a index M (z anglického *mantle* - plášť) značí veličiny související s rozhraním kůra - plášť. V souladu

s Airyho hypotézou předpokládáme, že ρ_S ani $\Delta\rho_M$ se laterálně nemění. Topografii t_S a t_M rozvineme podle (2.9)

$$t_S = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j (t_S)_{jm} Y_{jm}$$

$$t_M = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j (t_M)_{jm} Y_{jm}$$

Dosazením do (3.7) dostáváme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j [(t_S)_{jm} \rho_S + (t_M)_{jm} \Delta\rho_M] Y_{jm} = C Y_{00} \quad (3.8)$$

kde výraz $C Y_{00}$ odpovídá konstantě na pravé straně rovnice (3.7). Z rovnice (3.8) pak plyne

$$(t_S)_{jm} \rho_S + (t_M)_{jm} \Delta\rho_M = 0 \quad (3.9)$$

pro všechna $j > 0$. Vyjádříme-li z tohoto vztahu t_M (výšku topografie vnitřního hustotního rozhraní) a dosadíme-li do následujícího vztahu (úprava rovnice (2.18))

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left[(t_S)_{jm} \rho_S + (t_M)_{jm} \Delta\rho_M \left(\frac{a}{r} \right)^{j+2} \right] \quad (3.10)$$

dostaneme koeficienty potenciálu pouze v závislosti na topografii povrchu t_S , na hustotě povrchu ρ_S a na středním poloměru a vnitřního hustotního rozhraní

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} (t_S)_{jm} \rho_S \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{j+2} \right] \quad (3.11)$$

Použijeme-li místo parametru a hloubku kompenzace H , $H = r - a$, dostaneme pro sférické harmonické koeficienty rozvoje potenciálu vztah

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} (t_S)_{jm} \rho_S \left[1 - \left(\frac{r-H}{r} \right)^{j+2} \right] \quad (3.12)$$

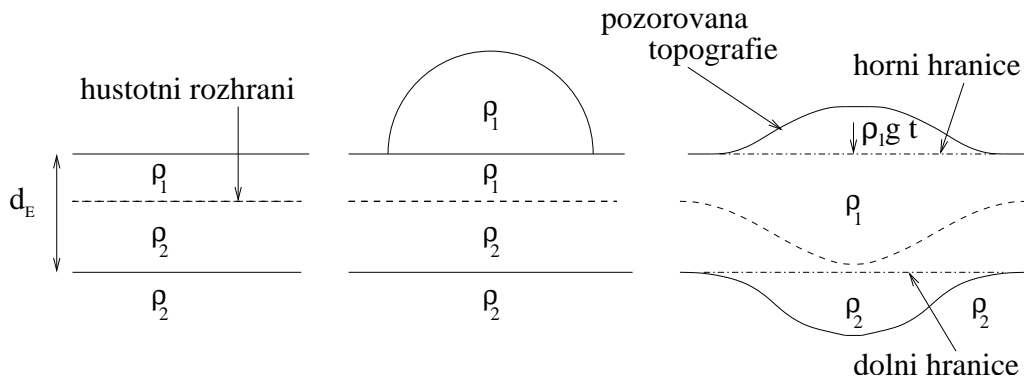
stejně pro geoid

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1) g_0(R)} (t_S)_{jm} \rho_S \left[1 - \left(\frac{R-H}{R} \right)^{j+2} \right] \quad (3.13)$$

Podívejme se nyní podrobněji na vzorce (3.12), (3.13). Zlomek na začátku vztahu obsahuje pouze konstanty, lineární závislost na r , resp. R , a závislost na $1/(2j+1)$, která je diskutována v kapitole 2.1 (obr. 2.1). Závislost na ρ_S a na $(t_S)_{jm}$ je také lineární. Zajímá nás tedy pouze závislost na hloubce kompenzace H pro různé stupně j . Výraz v hranaté závorce je nulový pro nulovou hloubku kompenzace a s rostoucím H roste, přičemž nárůst je výraznější na vyšších stupních. To odpovídá skutečnosti, že dlouhovlnná topografie kompenzovaná blízko u povrchu ($H \sim 0$) nebudí prakticky žádný gravitační potenciál (viz kontinenty na Zemi). Naopak, čím větší je hloubka kompenzace a čím menší je vlnová délka topografie, tím větší je gravitační potenciál, který povrchová topografie generuje.

3.2 Elastická flexe

V případě elastické flexe předpokládáme na povrchu tělesa přítomnost elastické vrstvy tloušťky d_E , uvnitř které uvažujeme hustotní rozhraní. Elastická vrstva se po zatížení prohýbá včetně hustotního rozhraní - názorněji na obr. 3.2. Topografie na povrchu je tedy držena jednak silami souvisejícími s deformací elastické vrstvy, jednak vztlakem.



Obrázek 3.2: Nezatížená elastická vrstva s hustotním rozhraním (vlevo), zatížení elastické vrstvy (uprostřed), prohnutá elastická vrstva (vpravo). d_E je tloušťka elastické vrstvy.

Deformace elastické vrstvy je obecně popsána rovnicí rovnováhy kontinua

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{g} = 0 \quad (3.14)$$

a reologickým vztahem

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} \right) \quad (3.15)$$

kde λ a μ jsou Lamého elastické koeficienty a \vec{u} je posunutí. Objemová síla $\rho \vec{g}$ v rovnici (3.14) souvisí pouze s deformací hustotního rozhraní. V prvním přiblížení můžeme psát

$$\rho \vec{g} = \Delta \rho u_r \vec{g} \delta(r - a) \quad (3.16)$$

kde $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$. Pro vyřešení problému je třeba doplnit ještě hraniční podmínky. Na horní hranici (viz obr. 3.2) předpokládáme rovnováhu vnější a vnitřní síly

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r = \vec{T}_1 \quad (3.17)$$

kde \vec{T}_1 je vnější síla, pro kterou v prvním přiblížení platí

$$(\vec{T}_1)_t = 0, \quad (\vec{T}_1)_r = -\rho g_0 t \quad (3.18)$$

kde t je topografie povrchu. Na dolní hranici je situace podobná - předpokládáme rovnováhu sil

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r = \vec{T}_2 \quad (3.19)$$

kde \vec{T}_2 je síla působící na uvažovanou oblast od středu tělesa, pro kterou platí

$$\vec{T}_2 = 0 \quad (3.20)$$

Zkusme porovnat izostázi a elastickou flexi. Izostaticky kompenzovaná topografie je držena v rovnováze vztlakovými silami, které závisejí na rozdílu hustot ρ_1 a ρ_2 , zatímco elasticky kompenzovaná topografie je držena jak vztlakovými, tak elastickými silami. Je zřejmé, že topografie držena vztlakem a elasticky bude do hustší kapaliny zanořena méně než topografie držena jen vztlakem. Na izostázi se lze vlastně dívat jako na krajní případ elastické flexe, kdy jsou elastické síly nulové. Topografii zanořené části bloku jsme značili $(t_M)_{jm}$, výše zmíněné úvahy lze matematicky zapsat jako

$$(t_M^E)_{jm} = C_j (t_M^I)_{jm} \quad (3.21)$$

kde $C_j \in (0,1)$ je *kompensační koeficient* odpovídající redukci průhybu izostaticky kompenzované topografie v důsledku elastické flexe. Pro $C_j = 1$ zjevně platí $(t_M^E)_{jm} = (t_M^I)_{jm}$. To odpovídá situaci, kdy je topografie kompenzována izostaticky. Pro menší hodnoty C_j platí $(t_M^E)_{jm} \leq (t_M^I)_{jm}$ a tedy elasticky kompenzovaná topografie se zanoří méně než topografie kompenzovaná izostaticky. Vztah (3.12), resp. (3.13) lze pak přepsat do tvaru

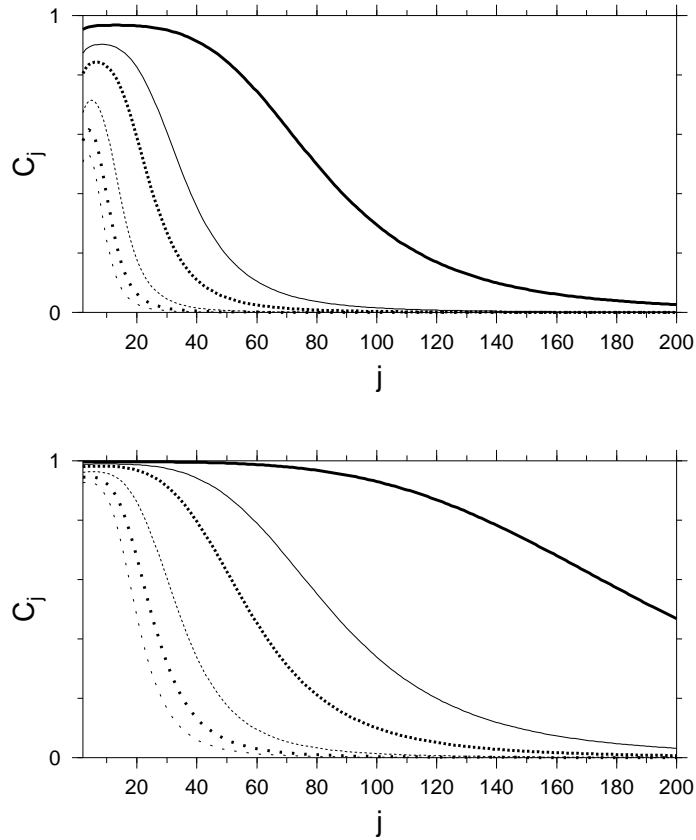
$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} (t_S)_{jm} \rho_S \left[1 - C_j \left(\frac{r - T_c}{r} \right)^{j+2} \right] \quad (3.22)$$

resp.

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} (t_S)_{jm} \rho_S \left[1 - C_j \left(\frac{R - T_c}{R} \right)^{j+2} \right] \quad (3.23)$$

kde T_c je tloušťka kůry. Kompensační koeficient obecně závisí na Lamého elastických koeficientech λ a μ , na poloměru tělesa R a na tloušťce elastické vrstvy d_E . Pro Zemi nabývá tento parametr zhruba hodnoty $d_E = 30$ km. Pro výpočet C_j použijeme vztah odvozený v [14]. Závislost kompenzačního koeficientu na stupni j pro Mars a pro Zemi pro různé tloušťky elastické vrstvy a pro stejné elastické koeficienty je na obr. 3.3. Z obrázku je patrné, že kompenzační koeficient klesá s rostoucím stupněm j . Objektům s vysokým stupněm j (menší vlnovou délkou Λ) tak odpovídá menší hodnota C_j a jsou tedy kompenzovány převážně elasticky. Menší vlnová délka znamená menší laterální rozměr - takovými objekty pak mohou být např. oceánské sopky. Naopak pro objekty charakterizované nízkým stupněm j (větší vlnovou délkou Λ) nabývá kompenzační koeficient hodnot blízkých jedné a takové objekty "nevnímají" elastickou vrstvu a jsou kompenzovány převážně izostaticky. To je případ zemských kontinentů.

Dalším parametrem, který určuje vliv elastické flexe na kompenzaci povrchové topografie, je poloměr tělesa R . Z obr. 3.3 je patrné, že těleso s větším poloměrem (Země) je při stejné hodnotě tloušťky elastické vrstvy d_E a elastických parametrů λ a μ charakterizováno pomalejším poklesem kompenzačního koeficientu C_j v závislosti na j než těleso s menším poloměrem (Mars). Zjevně tedy u menších těles má elasticita větší vliv na kompenzaci topografie.

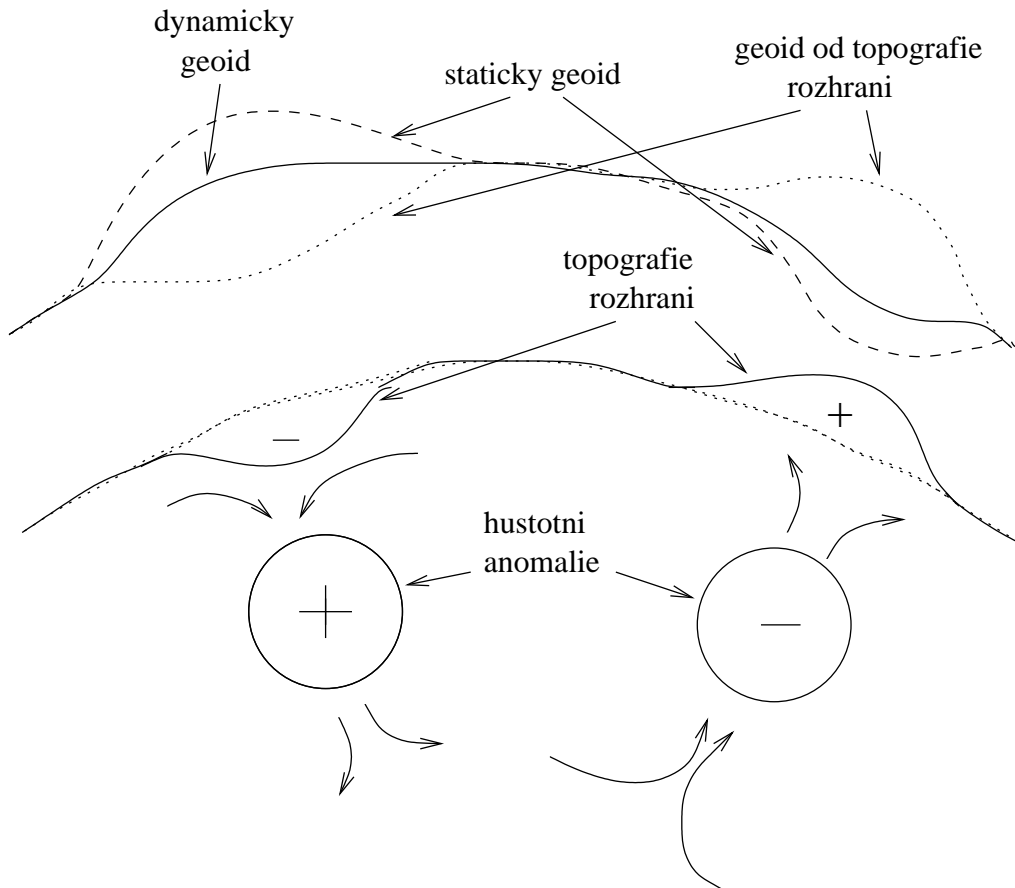


Obrázek 3.3: Závislost kompenzačního koeficientu Marsu (nahore) a Země (dole) na stupni j pro různé tloušťky elastické vrstvy - nejsilnější čarou tloušťka 10 km, směrem dolů pak tloušťky 30, 50, 100, 150 a 200 km.

3.3 Plášťové tečení

Předchozí kompenzační mechanismy předpokládají ideálně tuhé těleso, tedy žádné pohyby v plášti. Uvažujeme-li tečení v plášti (*plášťovou konvekci*), musíme ke statickému geoidu připočítat geoid generovaný topografiemi na rozhraních (detailněji viz [4, 12, 13]). Představme si pro názornost kladnou hustotní anomálii pohybující se v plášti směrem ke středu tělesa. Tato anomálie budí jednak statický geoid, jednak vyvolává tečení, které způsobuje deformaci rozhraní (povrchu nebo CMB). Tato deformace, kterou označujeme jako *dynamickou topografii*, budí také geoid, který má opačné znaménko

než staticky buzený geoid. Součtem těchto geoidů je geoid dynamický, který má menší amplitudu než geoid statický (analogicky pro zápornou hustotní anomálii). Schematicky viz obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Statický geoid (čárkovaně), geoid generovaný topografiemi rozhraní (tečkovaně) a dynamický geoid (plně). Statický geoid a geoid generovaný topografiemi se zjevně částečně vyruší nad hustotními anomáliemi a dynamický geoid má pak menší amplitudu než geoid statický.

Uvažujeme opět stejný tvar rovnice rovnováhy kontinua jako v předešlých mechanismech

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{g} = 0 \quad (3.24)$$

a přidáme navíc podmínku nestlačitelnosti materiálu pláště

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.25)$$

kde \vec{v} je rychlost pohybu materiálu. Tenzor napětí uvažujeme ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta(\nabla\vec{v} + \nabla^T\vec{v}) \quad (3.26)$$

kde η je viskozita. Pro úplné vyřešení problému je opět potřeba zadat okrajové podmínky na sférických hranicích pláště. Pro dolní hranici (CMB) předpokládáme nulovou výměnu hmoty mezi pláštěm a jádrem (skrz rozhraní neprotéká žádný materiál)

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_r = 0 \quad (3.27)$$

a nulové síly působící v tečném směru

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_t = 0 \quad (3.28)$$

Pro horní rozhraní (povrch Země) klademe stejné podmínky. Na rozhraních tedy působí pouze síly v radiálním směru - ty se pak interpretují jako dynamicky generovaná topografie. Pro povrch můžeme psát

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_r = -\rho_S g_0(R) t_S \quad (3.29)$$

kde ρ_S je hustota povrchu, $g_0(R)$ je střední gravitační zrychlení na povrchu a t_S je topografie povrchu, zatímco pro CMB platí

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_r = \Delta\rho g_0(r_{cmb}) t_{cmb} \quad (3.30)$$

kde $\Delta\rho$ je hustotní skok na rozhraní jádro-plášť, $g_0(r_{cmb})$ je střední gravitační zrychlení na CMB a t_{cmb} je topografie tohoto rozhraní. Rozdílná znaménka na pravých stranách rovnic jsou dána opačnými orientacemi normál k daným rozhraním. Gravitační potenciál, resp. geoid, buzený plášťovou konvekcí lze pak vyjádřit jako součet potenciálu, resp. geoidu, buzeného hustotními anomáliemi v plášti a potenciálu, resp. geoidu, buzeného deformovanými hustotními rozhraním. Konkrétním dosazením do (2.15), (2.16), (2.18) a (2.19) dostáváme

$$\begin{aligned}
V_{jm}(r) &= \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \int_{r_{cmb}}^R \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{j+2} dr' + \\
&+ \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left[\Delta\rho(t_{cmb})_{jm} \left(\frac{r_{cmb}}{r}\right)^{j+2} + \rho_S(t_S)_{jm} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+2} \right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

resp.

$$\begin{aligned}
h_{jm} &= \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} \int_{r_{cmb}}^R \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{R}\right)^{j+2} dr' + \\
&+ \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} \left[\Delta\rho(t_{cmb})_{jm} \left(\frac{r_{cmb}}{R}\right)^{j+2} + \rho_S(t_S)_{jm} \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Připomeňme, že počítáme potenciál, resp. geoid, vně tělesa, tedy že platí $r \geq R$. Pokud topografie t_S a t_{cmb} vyjádříme ze vztahů (3.29) a (3.30), dostaneme

$$\begin{aligned}
V_{jm}(r) &= \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \int_{r_{cmb}}^R \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{j+2} dr' + \\
&+ \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left[\frac{[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_r]_{jm}}{g_0(r_{cmb})} \left(\frac{r_{cmb}}{r}\right)^{j+2} - \frac{[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_r]_{jm}}{g_0(R)} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+2} \right]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

resp.

$$\begin{aligned}
h_{jm} &= \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} \int_{r_{cmb}}^R \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{R}\right)^{j+2} dr' + \\
&+ \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} \left[\frac{[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_r]_{jm}}{g_0(r_{cmb})} \left(\frac{r_{cmb}}{R}\right)^{j+2} - \frac{[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r)_r]_{jm}}{g_0(R)} \right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Kapitola 4

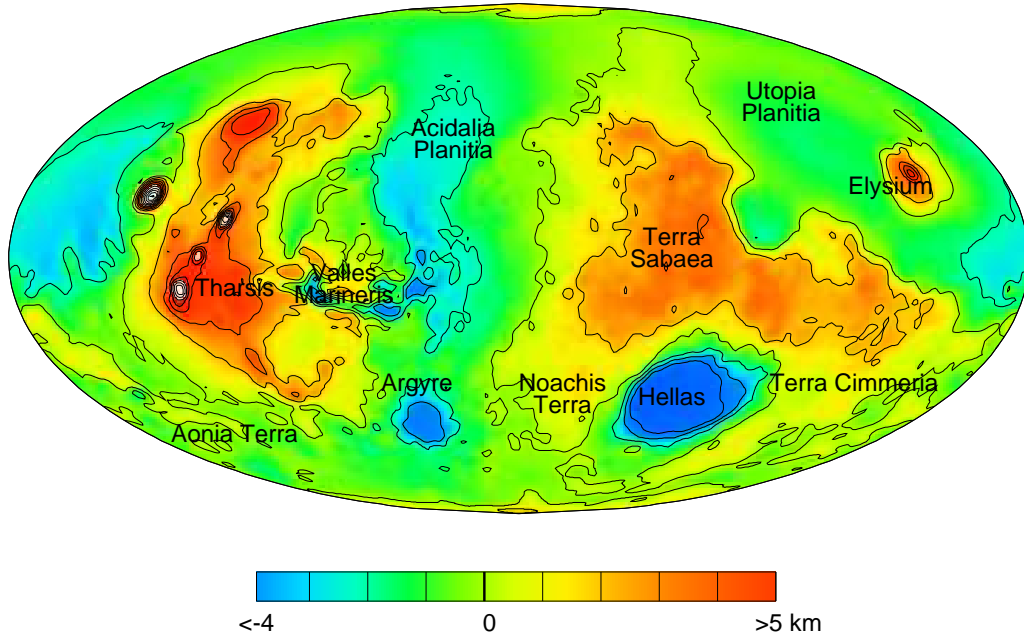
Topografie a gravitační pole Marsu

V této kapitole se nejprve budeme zabývat některými výraznými útvary na povrchu Marsu. Poté se zaměříme na analýzu gravitačního pole a topografie Marsu a pokusíme se předběžně určit, jaké mechanismy by mohly fungovat v jednotlivých oblastech Marsu. Pro výpočty používáme sférické harmonické koeficienty topografie a geoidu [18] a programovací jazyk Fortran, obrázky jsou vykreselny v programu GMT.

4.1 Povrchové útvary na Marsu

Při prvním pohledu na topografii Marsu (obr. 4.1) nás upoutá několik vysočin, které jsou převážně obklopeny nížinami. Nížiny mají monotónní reliéf, zato vysočiny jsou pokryty impaktovými krátery. Hlavní vysočinou je oblast *Tharsis*, která je vulkanického původu, stejně jako další oblast *Elysium*. Nejvyšší sopkou na Marsu je *Olympus Mons* v oblasti Tharsis, který dosahuje výšky více než 20 km a je zároveň nejvyšší sopkou ve Sluneční soustavě. Nedaleko se nacházejí další tři sopky *Arsia Mons*, *Pavonis Mons* a *Ascraeus Mons* vysoké 14 až 18 km. Oblast Tharsis je geologicky nejmladším útvarem na Marsu. Ve starší oblasti Elysium najdeme další vulkány, nejvyšší z nich dosahuje výšky kolem 13 km. Na jižní polokouli si všimneme dvou impaktových pánví *Hellas* a *Argyre*. Hellas je nejhlubší proláklina na povrchu planety (současná hloubka je kolem 8 km, dříve však mohla být ještě mnohem hlubší). Dalším pozoruhodným útvarem na Marsu je *Valles Marineris*, obrovský systém kaňonů, který měří přes 4000 km. Dosahuje šířky okolo 100

km, místy dokonce i 400 - 600 km, a hloubky více než 5 - 6 km. Na povrchu

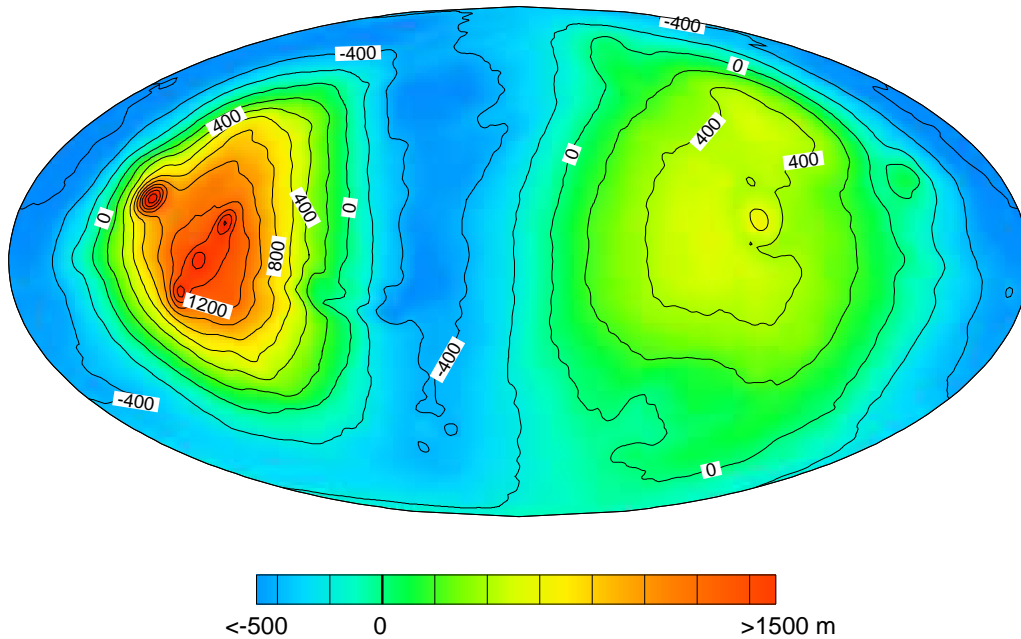


Obrázek 4.1: Topografie Marsu měřená od geoidu zachycená v rozsahu stupňů $j = 2 - 85$.

Marsu rozlišujeme několik dalších oblastí, některé z nich nesou jména připomínající pozemské útvary. Na obrázku zleva je to *Aonia Terra*, *Acidalia Planitia*, *Noachis Terra*, *Terra Sabaea*, *Utopia Planitia* a *Terra Cimmeria*. Podrobněji viz [17].

4.2 Geoid a topografie Marsu

Podívejme se na geoid Marsu (obr. 4.2) a porovnejme ho s topografií. Za-

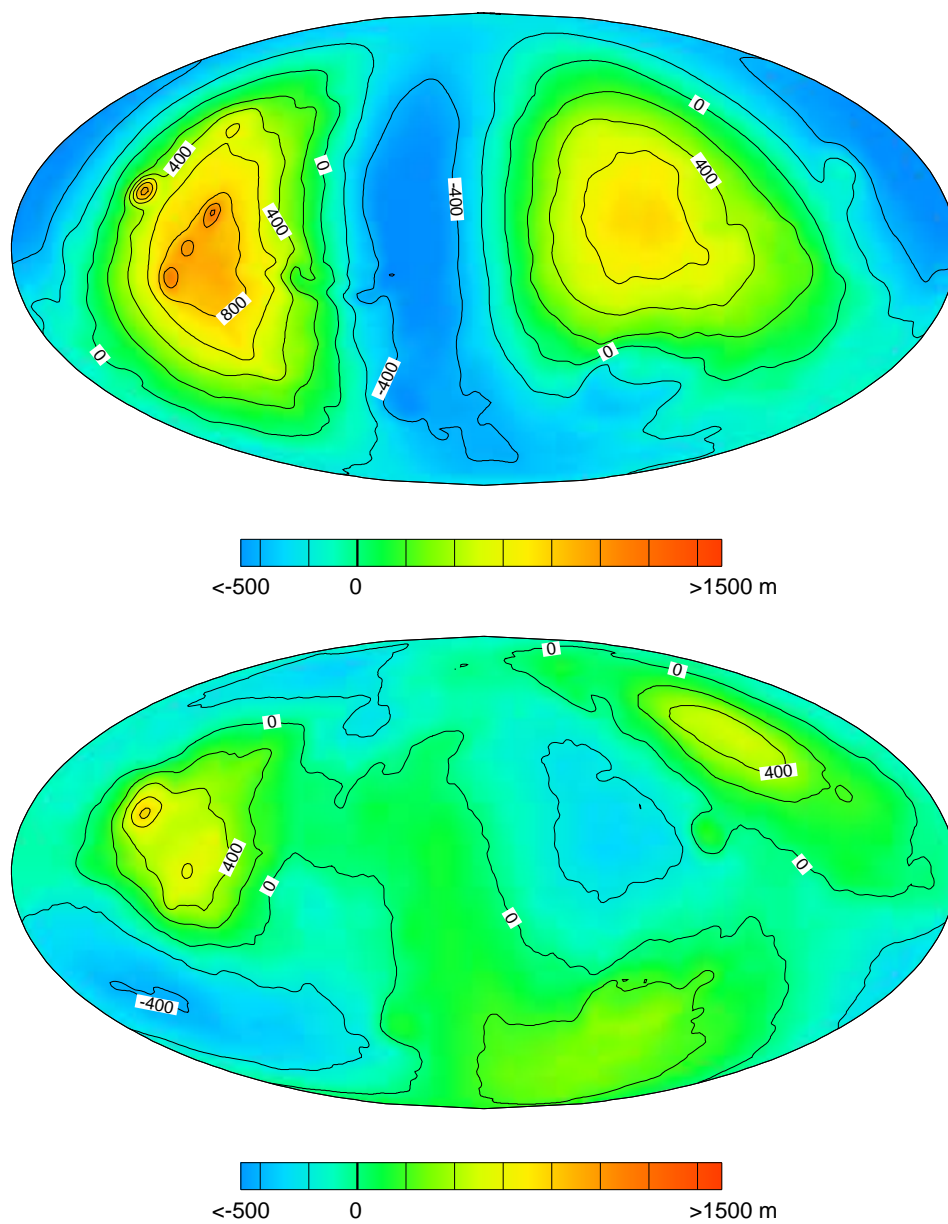


Obrázek 4.2: Geoid Marsu ($j = 2 - 85$).

čněme v oblasti Tharsis: geoid i topografie zde dosahují maxima, v plášti pod touto oblastí tedy nepředpokládáme výrazné hustotní anomálie. V oblasti pánve Hellas naopak nenajdeme žádnou podobnost topografie a geoidu, stejně tak v oblasti pánve Argyre. V oblasti impaktových pánví tedy očekáváme plášťové hustotní anomálie, jejichž gravitační pole kompenzuje gravitační pole povrchových útvarů.

Dalším vodítkem nám může být pohled na korelovanou a nekorelovanou část geoidu Marsu. Korelovaná část (obr. 4.3 nahoře) potvrzuje tvarovou odlišnost topografie a geoidu v oblastech obou impaktových pánví, stejně jako podobnost topografie a geoidu v oblasti Tharsis. Navíc se zdá, že dosahuje vyšší amplitudy i v oblasti Terra Sabaea. Při pohledu na nekorelovanou část geoidu (obr. 4.3 dole) nás nesmí překvapit nejvyšší amplituda v oblasti Tharsis, neboť rozklad na korelovanou a nekorelovanou část se děje ve smyslu L_2 normy - je tedy ortogonální ve smyslu této normy, nikoliv lokálně. Ob-

rázek nekorelované části pak opět ukazuje na odlišnost topografie a geoidu v oblasti impaktové pánve Hellas.

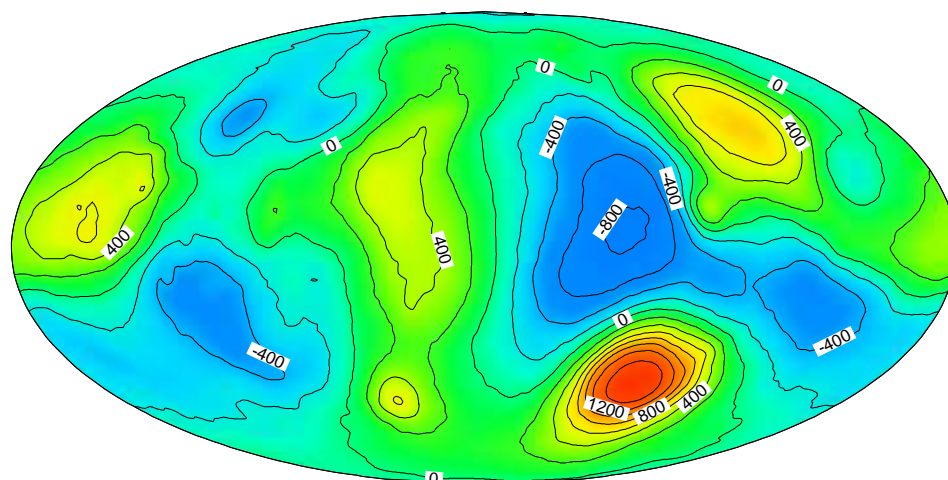
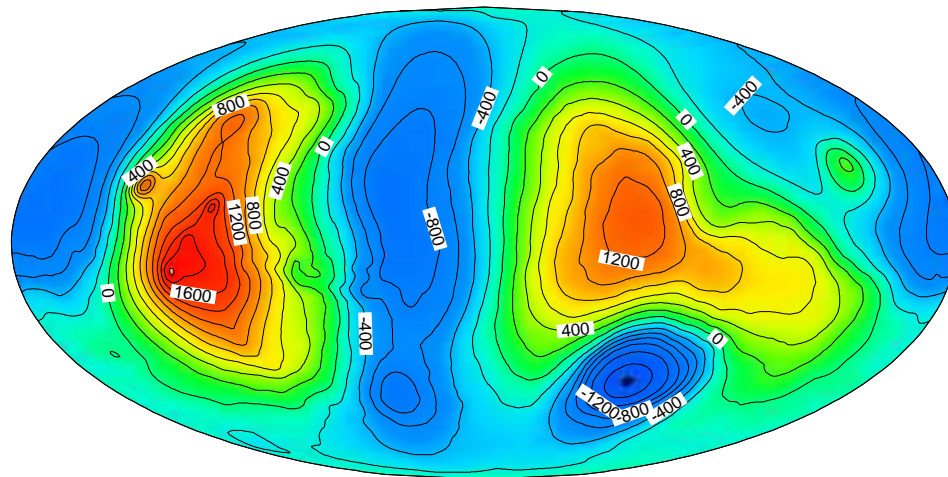


Obrázek 4.3: Korelovaná (nahore) a nekorelovaná (dole) část geoidu Marsu ($j = 2 - 85$).

Porovnáním pozorovaného geoidu (obr. 4.2) a rezidua (nekorelované části, obr. 4.3 dole), můžeme topografické útvary rozdělit na dvě skupiny [10]. První se vyznačuje různými znaménky v pozorovaném geoidu a reziduu - to je případ oblasti Terra Sabaea. Zde má pozorovaný geoid kladné znaménko, zatímco reziduum je zde záporné. Takové topografické útvary nazveme *překompenzované* (angl. overcompensated). Druhá skupina je charakterizována stejným znaménkem v pozorovaném geoidu i v reziduu - to je případ oblasti Tharsis, kde jsou pozorovaný geoid i reziduum kladné. Tyto útvary nazveme *nedokompenzované* (angl. undercompensated). Tyto termíny odpovídají stupni kompenzace topografie vzhledem k průměru na planetě. V případě překompenzované topografie je hodnota admitance v dané oblasti menší než průměrná hodnota - korelovaný geoid je lokálně větší (v případě kladné topografie) než geoid pozorovaný a musí být zmenšen lokálně záporným reziduem. Naopak v případě nedokompenzované topografie je hodnota admitance větší než planetární průměr - korelovaný geoid je menší než geoid pozorovaný a reziduum musí být kladné.

Na závěr se podívejme ještě na geoid buzený topografií (obr. 4.4 nahoře) a Bouguerův geoid (obr. 4.4 dole). Bouguerovým geoidem zde máme na mysli rozdíl pozorovaného geoidu a geoidu buzeného topografií - je to vlastně geoid buzený hustotními anomáliemi v plášti. Zjišťujeme, že pod oblastí Tharsis je velmi nevýrazná hustotní anomálie (oblast Tharsis nemá výrazný kořen). Naopak pod oblastí Terra Sabaea je vidět výrazná záporná hustotní anomálie (kořen), stejně tak pod pánví Hellas pozorujeme kladnou hustotní anomálii (antikořen).

Pokusme se shrnout výše popsaná pozorování: Pod oblastí Terra Sabaea a v oblasti impaktové pánve Hellas jsme pozorovali hustotní anomálie v plášti (kořeny, antikořeny), předpokládáme tedy, že topografie těchto oblastí by mohla být kompenzována izostaticky. Naopak pod oblastí Tharsis se výrazné hustotní anomálie neobjevily, topografie této oblasti bude tedy držena spíše velmi silnou elastickou vrstvou nebo silným vzestupným proudem v plášti.



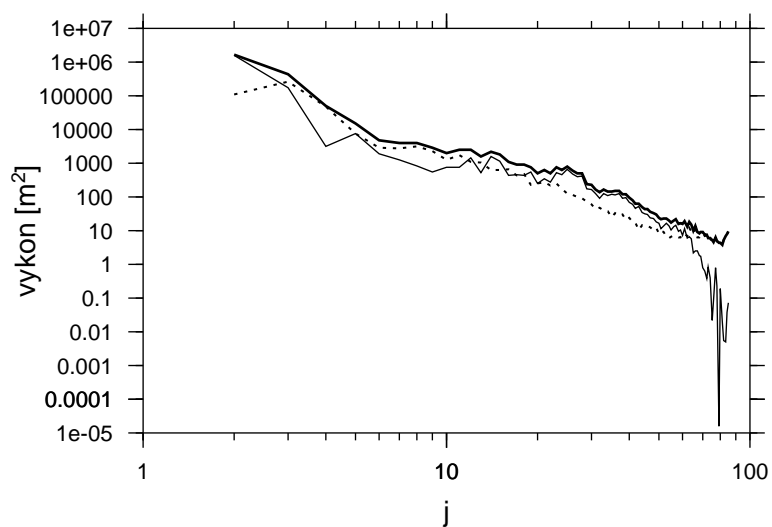
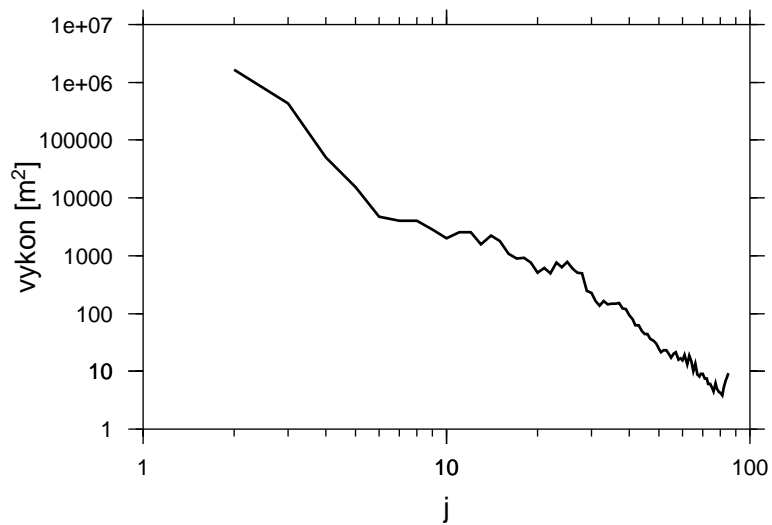
Obrázek 4.4: Geoid buzený topografií (nahore) a Bouguerův geoid Marsu (dole) ($j = 2 - 85$).

4.3 Výkonová spektra, korelace a admitance

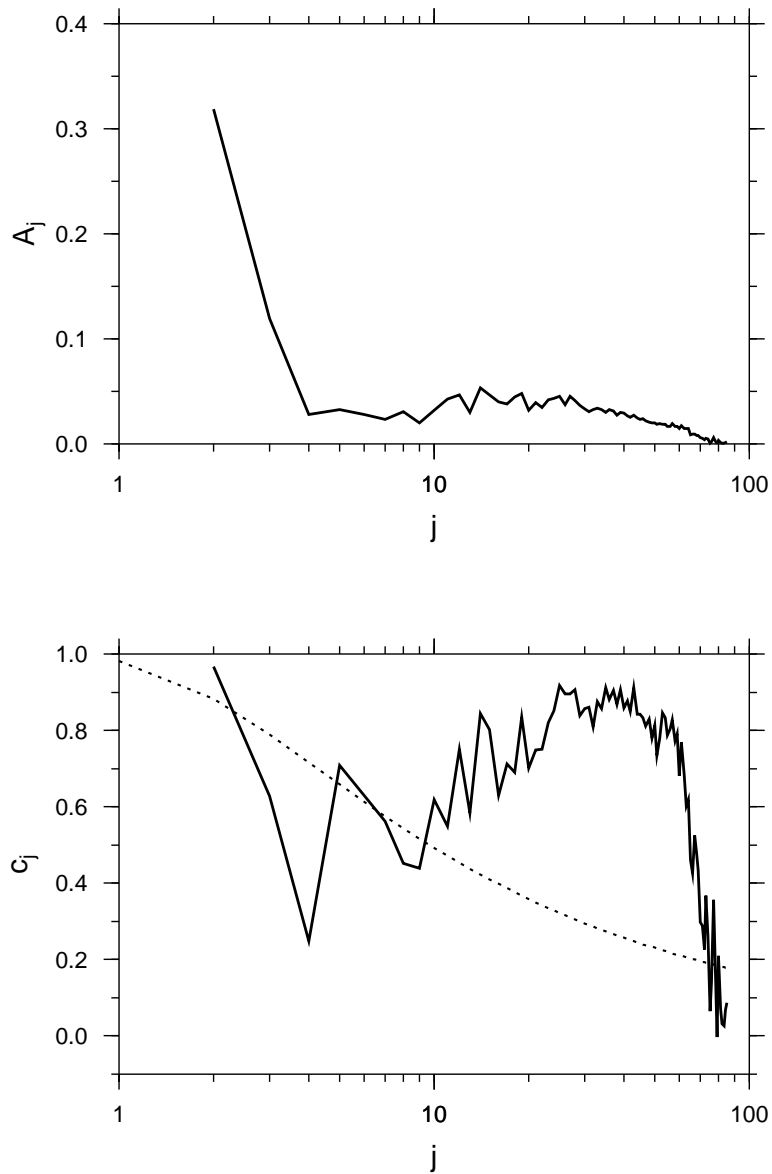
Ve výkonovém spektru geoidu (obr. 4.5 nahoře) lze přibližně vypočítat 3 úseky s různým sklonem - pro stupně $j = 2 - 6$ je pokles nejstrmější, pak se zmírňuje ($j = 6 - 30$) a pro $j > 30$ klesá zase rychleji. Zvláště výrazný je zlom kolem stupně 6, který by mohl naznačovat změnu kompenzačního mechanismu.

Porovnejme teď výkonové spektrum pozorovaného geoidu, geoidu korelovaného s topografií a geoidu nekorelovaného (obr. 4.5 dole). Kromě stupně 2 převažuje pro nízké stupně výkon nekorelované části (rezidua). Kolem stupně $j = 10$ se začínají obě komponenty vyrovnávat a přibližně od $j = 20$ začíná převažovat výkon korelované části. Prudký pokles výkonu korelované části v okolí $j = 70$ může být ovlivněn nejistotami dat na vyšších stupních.

Pohledem na admitanci (obr. 4.6 nahoře) zjistíme nejprudší změnu sklonu kolem stupně 4 - to přidává na váze naší domněnce, že kolem stupně 5 by mohla nastat nějaká změna v kompenzačním mechanismu, který generuje gravitační pole Marsu. Admitance na Marsu je na většině stupňů významně větší než na Zemi [11]. Korelace topografie a geoidu je významná (úroveň spolehlivosti přesahuje 98%) pro stupně $j = 10 - 70$ (obr. 4.6 dole).



Obrázek 4.5: Výkonové spektrum geoidu (nahore) a porovnání výkonových spekter (dole) geoidu pozorovaného (tučně), korelované části (slabě) a nekorelované části (tečkovaně).



Obrázek 4.6: Admitance (nahore) a korelace geoidu a topografie (dole). Tečkovaně je vykreslena úroveň spolehlivosti 98%.

Kapitola 5

Globální testy Airyho hypotézy izostáze a hypotézy elastické flexe

V této části otestujeme možnost uplatnění hypotézy izostáze a elastické flexe při kompenzaci topografie Marsu v globálním měřítku.

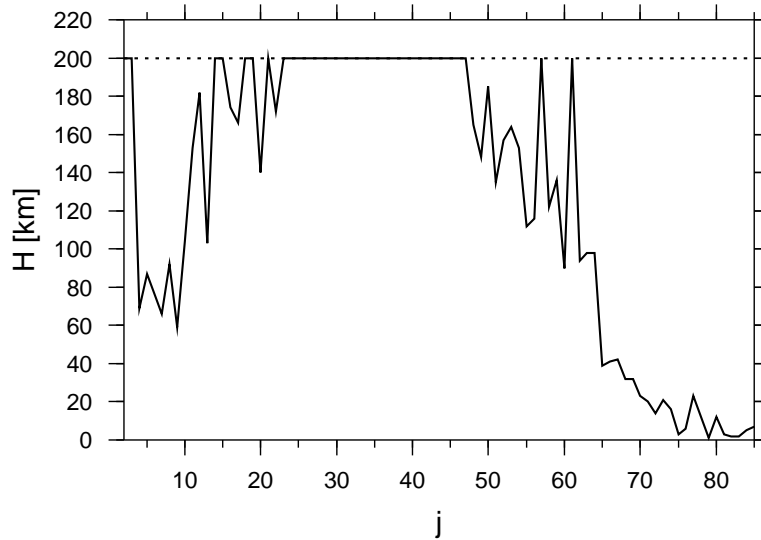
5.1 Izostatická hypotéza

Jednoduchý vztah mezi geoidem a hloubkou kompenzace (3.13) nabízí možnost vysvětlení pozorovaného geoidu pomocí izostatické kompenzace v jediné hloubce kompenzace H pro všechny stupně $[1, 10]$. Řešme obrácenou úlohu a pokusme se nalézt takovou hloubku kompenzace, která by nejlépe vysvětlila pozorovaný geoid. Pro každý stupeň j minimalizujeme funkci

$$S_j^{izo}(H) = \sum_{m=-j}^j \|h_{jm}^{pred}(H) - h_{jm}^{obs}\|^2 \quad (5.1)$$

kde $h_{jm}^{pred}(H)$ jsou koeficienty geoidu vypočtené podle (3.13) a h_{jm}^{obs} jsou koeficienty geoidu pozorovaného. Hodnoty H jsme uvažovali v rozmezí 1 – 200 km. Minimalizací jsme získali nejvhodnější hloubku kompenzace pro každý stupeň. Závislost optimální hloubky kompenzace H na stupni j je vynesena na obr. 5.1.

Pro různé stupně kolísá optimální hloubka kompenzace v rozsahu celého uvažovaného intervalu (1 – 200 km). Zjevně tedy neexistuje jednotná



Obrázek 5.1: Optimální hloubka kompenzace H v závislosti na stupni j . Tečkovaně je vyznačena horní hranice intervalu uvažovaných hloubek kompenzace.

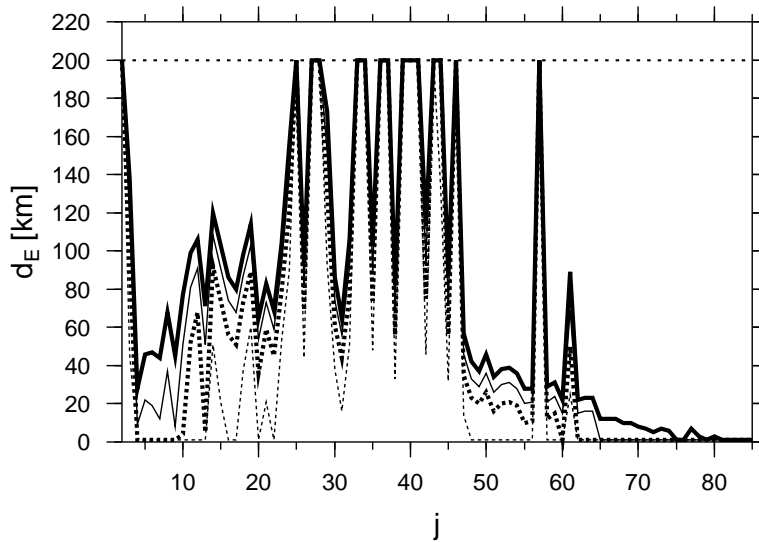
hloubka kompenzace, která by globálně vysvětlila pozorovaný geoid na všech vlnových délkách.

5.2 Hypotéza elastické flexe

Pro testování hypotézy elastické flexe jsme použili podobný postup jako v případě izostatické hypotézy. Opět jsme pro každý stupeň minimalizovali funkci

$$S_j^{elast}(T_c, d_E) = \sum_{m=-j}^j ||h_{jm}^{pred}(T_c, d_E) - h_{jm}^{obs}||^2 \quad (5.2)$$

kde $h_{jm}^{pred}(T_c, d_E)$ jsou koeficienty geoidu vypočtené podle (3.23) a h_{jm}^{obs} jsou koeficienty geoidu pozorovaného. Počítali jsme s možnými tloušťkami kůry T_c i elastické vrstvy d_E v rozmezí 1 – 200 km a hledali jsme optimální tloušťku elastické vrstvy, která by vysvětlila pozorovaný geoid. Závislost optimální tloušťky elastické vrstvy na stupni pro několik různých tloušťek kůry je zachycena na obr. 5.2.



Obrázek 5.2: Optimální tloušťka elastické vrstvy d_E v závislosti na stupni j pro různé tloušťky kůry - nejsilnější čarou tloušťka 10 km, směrem dolů pak tloušťky 50, 100 a 200 km. Tečkovaně je opět vyznačena horní hranice intervalu uvažovaných hloubek kompenzace.

Stejně jako v případě izostáze i pro elastickou flexi kolísá optimální parametr (zde tloušťka elastické vrstvy) v rozsahu celého uvažovaného intervalu a to i pro různé tloušťky kůry. Zjevně tedy ani elastickou flexí s konstantní tloušťkou elastické vrstvy nelze globálně vysvětlit pozorovaný geoid na všech vlnových délkách.

Kapitola 6

Závěr

Uvedli jsme přehled základních vztahů nezbytných pro práci s gravitačním polem a zavedli jsme sférické harmonické funkce. Poté jsme pracovali již jen s koeficienty rozvoje uvažovaných veličin (topografie, gravitační potenciál, příp. geoid) do báze tvořené těmito funkcemi. Dále jsme podrobně vyložili teorii základních kompenzačních mechanismů, které se uplatňují na Zemi (izostáze, elastická flexe, plášťové tečení).

Na základě analýzy topografie a gravitačního pole Marsu jsme se pokusili o předběžný odhad mechanismů, které se uplatňují v jednotlivých oblastech Marsu: V oblastech Terra Sabaea a impaktivní pánve Hellas předpokládáme izostatickou kompenzaci, v oblasti Tharsis spíše velmi silnou elastickou vrstvu nebo silný vzestupný proud v plášti. Z inverze gravitačního potenciálu jsme usoudili, že gravitační pole Marsu se nedá globálně vysvětlit na základě Airyho hypotézy izostáze s konstantní hloubkou kompenzace ani na základě hypotézy elastické flexe s konstantní tloušťkou elastické vrstvy.

Abychom získali lepší představu o vnitřní struktuře Marsu, bylo by vhodné zapojit ještě plášťové tečení a provést lokální analýzu, tedy vyřešit obrácené úlohy z kapitoly 5 pro jednotlivé oblasti Marsu. Inverzi založené na závěrech této práce bych se ráda věnovala v budoucnu.

Literatura

- [1] Arkani-Hamed, J. (1996), Analysis and interpretation of the surface topography and gravitational potential of Venus, *J. Geophys. Res.*, 101(E2), 4711–4724, doi: 10.1029/95JE03390.
- [2] Burša, M., a K. Pěč (1993), *Gravity Field and Dynamics of the Earth*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [3] Edmonds, A. R. (1960), *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [4] Hager, B. H., a R. W. Clayton (1989), Constraints on the structure of mantle convection using seismic observations, flow models, and the geoid, in *Mantle Convection: Plate Tectonics and Global Dynamics*, edited by W. R. Peltier, pp. 675–763, Gordon & Breach, New York, NY.
- [5] Jones, M. N. (1985), *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*, Research Studies Press Ltd., Letchworth, Hertfordshire, England.
- [6] Lambeck, K. (1988), *Geophysical Geodesy*, Oxford Univ. Press, New York, NY.
- [7] Le Stunff, Y., a Y. Ricard (1995), Topography and geoid due to lithospheric mass anomalies, *Geophys. J. Int.*, 122, 982–990.
- [8] Matas, J. (1995), Mantle Viscosity and Density Structure (Diplomová práce), Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha.
- [9] Novotný, O. (1998), *Motions, Gravity Field and Figure of the Earth*, Lecture notes, UFBA, Salvador, Bahia.

- [10] Pauer, M., K. Fleming, a O. Čadek (2006), Modeling the dynamic component of the geoid and topography of Venus, *J. Geophys. Res.*, *111*(E11012), doi:10.1029/2005JE002511.
- [11] Pauer, M. (2004), The Gravity Field of Venus and Its Relationship to the Dynamic Processes in the Mantle (Diplomová práce), Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha.
- [12] Ricard, Y., L. Fleitout, a C. Froidevaux (1984), Geoid heights and lithospheric stresses for a dynamic earth, *Ann. Geophys.*, *2*, 267–285.
- [13] Schubert, G., D. L. Turcote, a P. Olson (2001), *Mantle Convection in the Earth and Planets*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, England.
- [14] Turcotte, D. L., R. J. Willemann, W. F. Haxby, a J. Norberry (1981), Role of Membrane Stresses in the Support of Planetary Topography, *J. Geophys. Res.*, *86*(B5), 3951–3959.
- [15] van der Hilst, R. D., S. Widiyantoro, a E. R. Engdahl (1997), Evidence for deep mantle circulation from global tomography, *Nature*, *386*, 578–584, doi:10.1038/386578a0.
- [16] Varshalovich, D.A., A. N. Moskalev, a V. K. Khersonski (1989), *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific Publishing Co., Singapore.

Internetové stránky

- [17] <http://planety.astro.cz/mars/32/>
- [18] <http://pds.jpl.nasa.gov>