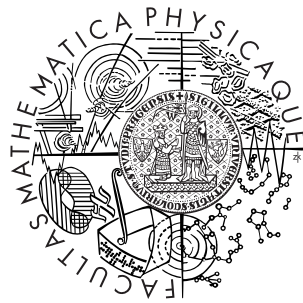


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Miroslav Kuchta

**Modelování tečení v zemském plášti: aplikace
metody posunutých sítí ve sférické geometrii**

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Obecná fyzika

2008

Rád by som sa poďakoval Doc. RNDr. Ondřejovi Čadekovi, CSc. za príkladné vedenie mojej práce, početné konzultácie a ľudský prístup. Chcem sa poďakovať mojej rodine za podporu pri písaní. Vďaka tiež patrí skupine korektorov.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných zdrojov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa

Miroslav Kuchta

Obsah

1	Úvod	6
2	Rovnice tečenia v invariantnom tvare	7
2.1	Zákony zachovania	7
2.2	Reológia	7
2.3	Okrajové podmienky	8
3	Rovnice tečenia v sférických súradniciach	9
3.1	Rovnice 3D	9
3.2	Rovnice 2D	10
3.3	Okrajové podmienky axisymetrickej úlohy	11
4	Metóda posunutých sietí	12
4.1	Derivovanie na posunutých sietiach	12
4.2	Rovnica kontinuity na posunutých sietiach	15
4.3	Pohybová rovnica v smere \vec{e}_r na posunutých sietiach	16
4.4	Pohybová rovnica v smere \vec{e}_θ na posunutých sietiach	18
4.5	Okrajové podmienky na posunutých sietiach	20
5	Program v jazyku Matlab[®]	21
5.1	Bunky	21
5.2	Diskretizácia okrajových podmienok	22
5.3	Plnenie matice	23
5.4	Inverzia	27
6	Testy programu	28
6.1	Podmienenosť matice	28

6.2	Časová náročnosť	30
6.3	Riešenie pri bodovom rozložení hustoty objemových síl	31
6.4	Riešenie pri harmonickom rozložení hustoty objemových síl	31
6.5	Porovnanie s metódou spektrálneho rozkladu	33
7	Záver	36
A	Operátor ∇ v sférických súradniciach	37
A.1	Sférické súradnice	37
A.2	Komponenty ∇f , $\nabla \vec{v}$, $\nabla \cdot \vec{v}$, $\nabla \cdot \mathbf{T}$ v sférických súradniciach	38
B	Obsah priloženého CD	43

Název práce: Modelování tečení v zemském plášti: aplikace metody posunutých sítí ve sférické geometrii

Autor: Miroslav Kuchta

Katedra (ústav): Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto práca ukazuje použiteľnosť upravenej metódy posunutých sietí pri riešení rovníc popisujúcich tečenie v zemskom plášti v sférickej geometrii. V práci formulujeme rovnice v sférickej geometrii a ukazujeme ich zúženie pre prípad axisymetrickej sférickej geometrie. Navrhujeme spôsob ošetrenia singularít na póloch a hraničných podmienok na osi symetrie. Ďalej upravujeme metódu posunutých sietí v dvojrozmernej kartézskej geometrii pre potreby axisymetrickej sférickej geometrie. Metódu implementujeme do programu v jazyku Matlab[®]. Program testujeme na príkladoch s konštantnou viskozitou.

Klíčová slova: metóda posunutých sietí, Stokesov problém, axisymetrická sférická geometria

Title: Mantle flow modeling: application of a staggered grid method in a spherical geometry

Author: Miroslav Kuchta

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: This work shows the applicability of modified staggered-grid method in solving the governing equations of mantle flow in spherical geometry. In the thesis we formulate the governing equations in spherical domain and show their restriction into axisymmetrical spherical domain. We propose the way to treat the pole singularities and boundary conditions on the axis of symmetry. Further we modify staggered-grid method in two dimensional Cartesian domain for the purposes of axisymmetrical spherical domain. We implement the method into code in Matlab[®] programming language. We use problems with constant viscosity to test the program.

Keywords: staggered-grid method, Stokes problem, axisymmetrical spherical geometry

Kapitola 1

Úvod

Počítačové modely nám umožňujú získať predstavu o geologických procesoch v zemskom vnútri, ktoré nemožno priamo pozorovať. Modely sú založené na numerickom riešení parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré popisujú deje zahŕňajúce tečenie magmy, lávy a rôznych druhov hornín. Rádovo meniaci sa viskozita týchto látok predstavuje problém, s ktorým sa v technickej praxi využívané nástroje riešenia rovníc, napr. metóda konečných prvkov, často nedokážu úspešne vysporiadať. Vhodným nástrojom sa ukazuje byť metóda posunutých sietí [2] a [3]. Metóda umožňuje efektívne a detailné štúdium deformácií zemského plášťa v kartézskej geometrii. Pre celý rad dejov, v ktorých je nutné uvažovať sférický tvar Zeme (javy s globálnou povahou, napr. zanorovanie oceánskych dosiek do zemského plášťa), však kartézska geometria predstavuje obmedzenie.

Cieľom tejto práce je navrhnuť analógiu metódy posunutých sietí v sférickej geometrii a implementovať ju do počítačového programu.

Kapitola 2

Rovnice tečenia v invariantnom tvare

2.1 Zákony zachovania

Tečenie v zemskom plášti popisujeme ako tečenie nestlačiteľnej kvapaliny s veľkou viskozitou. Dej sa riadi systémom rovníc:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$-\nabla \pi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \Delta \rho \vec{g} = 0, \quad (2.1.2)$$

kde \vec{v} je vektor rýchlosti, π je tlak, $\boldsymbol{\sigma}$ je deviatorická časť tenzora napätia, $\Delta \rho$ je odchýlka od strednej hodnoty hustoty objemových síl a \vec{g} je vektor gravitačného zrýchlenia. Rovnica (2.1.1) je rovnica kontinuity nestlačiteľnej kvapaliny a vyjadruje zákon zachovania hmotnosti. Rovnice (2.1.2) sú pohybovými rovnicami nestlačiteľnej kvapaliny a vyjadrujú zákon zachovania hybnosti. Neznámymi v systéme rovníc (2.1.1), (2.1.2) sú: skalárne pole tlaku π predstavuje jednu neznámu, vektorové pole rýchlosti \vec{v} predstavuje tri neznáme a tenzorové pole napätí $\boldsymbol{\sigma}$ predstavuje šesť neznámych, keďže na základe zákona zachovania momentu hybnosti platí $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$. Pre celkovo desať neznámych máme v systéme iba štyri rovnice.

2.2 Reológia

Aby bolo možné systém rovníc (2.1.1) a (2.1.2) riešiť, je nutné doplniť šesť skalárnych rovníc. Tieto predstavujú reologické vlastnosti tečúcej kvapaliny. V našom modeli uvažujeme

vzťah medzi deviatorickou časťou tenzora napätia $\boldsymbol{\sigma}$ a tenzorom rýchlosti deformácie $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ v tvare

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \eta(\nabla\vec{v} + \nabla^T\vec{v}), \quad (2.2.1)$$

kde η je viskozita. Viskozita môže byť funkciou druhého invariantu tenzora rýchlosti deformácie [2], ale v rámci nášho modelu považujeme viskozitu za konštantu.

2.3 Okrajové podmienky

Rovnice (2.1.1), (2.1.2) a (2.2.1) tvoria systém parciálnych diferenciálnych rovníc, ktorý možno riešiť, ak určíme okrajové podmienky. Charakter úlohy dáva tušiť, že tieto budeme špecifikovať na sférických plochách. Okrajové podmienky zadávame v rýchlostiach

$$\vec{v} = \vec{v}^{BC}, r = R \quad (2.3.1)$$

alebo v silách

$$(-\pi\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}) \cdot \vec{n} = \vec{\tau}^{BC}, r = R, \quad (2.3.2)$$

kde R je polomer hraničnej sférickej plochy, \mathbf{I} je identický tenzor, \vec{n} je vonkajšia normála plochy a $\vec{\tau}^{BC}$ je vonkajšia plošná sila.

Kapitola 3

Rovnice tečenia v sférických súradniciach

3.1 Rovnice 3D

Rovnice (2.1.1), (2.1.2) a (2.2.1) sú zapísané v invariantnom tvare. Rozpisom operátora ∇ do sférických súradníc (podrobnejšie viď. Dodatek A) dostávame rovnicu kontinuity v tvare

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (3.1.1)$$

a pohybové rovnice v tvare

$$\begin{aligned} \vec{e}_r : & -\frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \Delta \rho g_r = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta : & -\frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta) + \Delta \rho g_\theta = 0, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi : & -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta) + \Delta \rho g_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

V reologickom vzťahu (2.2.1) dosadíme za tvar tenzora $\nabla\vec{v}$

$$\nabla\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \sin \theta \right) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi \cos \theta \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \end{bmatrix}.$$

3.2 Rovnice 2D

V našej úlohe budeme rovnice systému (2.1.1), (2.1.2) a (2.2.1) riešiť v axisymetrickom priblížení. Axisymetrické priblíženie predstavuje z hľadiska geometrie riešiť úlohu v rovine určenej osou symetrie, tj. zemskou osou a ľubovoľným bodom plášťa. Rovnice popisujúce priestorové tečenie teda musíme zúžiť do roviny.

Keďže je rovina ľubovoľná, riešenie musí byť nezávislé na otočení o uhol φ . Preto musia byť v 3D sférických rovniciach všetky členy obsahujúce deriváciu podľa φ nulové. Uvažujeme tiež, že v smere \vec{e}_φ nepôsobí na kvapalinu žiadna sila. Následne je teda nulová aj \vec{e}_φ komponenta pohybovej rovnice. Konečne položíme $v_\varphi \equiv 0$.

Pri úprave zúžených rovníc využívame poznatok, že stopa deviatorickej časti tenzora napätia je nulová, (2.1.1) $\Leftrightarrow tr(\nabla\vec{v}) = 0 \stackrel{(2.2.1)}{\Leftrightarrow} tr\left(\frac{\sigma}{2\eta}\right) = 0 \Rightarrow \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi} = 0$. Pohybové rovnice a rovnicu kontinuity ďalej pre násobíme výrazom $r^3 \sin \theta$, aby sme sa vyhli singularitám na póloch, ktoré by spôsobil výraz $\frac{1}{\sin \theta}$. Ďalej pri úprave \vec{e}_θ komponenty pohybovej rovnice využijeme konkrétne vyjadrenie vektora gravitačného zrýchlenia $\vec{g} = g_r \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\theta$. Rovnice, s ktorými budeme pracovať v ostatnej časti práce, majú napokon tvar:

Rovnica kontinuity

$$r^3 \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial r} + r^2 \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + 2r^2 \sin \theta v_r + r^2 v_\theta \cos \theta = 0. \quad (3.2.1)$$

Komponenta pohybovej rovnice v smere \vec{e}_r

$$-r^3 \sin \theta \frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{\partial(r^3 \sin \theta \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(r^2 \sin \theta \sigma_{r\theta})}{\partial \theta} + \rho g_r r^3 \sin \theta = 0. \quad (3.2.2)$$

Komponenta pohybovej rovnice v smere \vec{e}_θ

$$-r^2 \sin \theta \frac{\partial \pi}{\partial \theta} + \frac{\partial(r^3 \sin \theta \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial(r^2 \sin \theta \sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\theta} r^2 \cos \theta + \sigma_{\theta\theta} r^2 \cos \theta = 0. \quad (3.2.3)$$

Reologický vzťah

$$\sigma = \eta \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r}(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{2}{r}(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r) & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{v_r}{r} + 2\frac{v_\theta}{r} \cot \theta \end{bmatrix}.$$

3.3 Okrajové podmienky axisymetrickej úlohy

Okrajové podmienky potrebné na riešenie systému rovníc (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3) špecifikujeme na dvoch typoch hraníc.

Prvým typom hraníc sú hranice v smere poludníkov. Jedná sa o kružnice, ktoré vznikli zúžením sférických hraničných plôch. V tomto prípade zadávame v analógii s rovnicami (2.3.1) a (2.3.2) okrajové podmienky v rýchlostiach

$$v_r = v_r^{BC}, r \in \{r_{in}, r_{out}\}, \quad (3.3.1)$$

$$v_\theta = v_\theta^{BC}, r \in \{r_{in}, r_{out}\}, \quad (3.3.2)$$

alebo v napätiach

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{BC}, r \in \{r_{in}, r_{out}\}, \quad (3.3.3)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{BC}, r \in \{r_{in}, r_{out}\}, \quad (3.3.4)$$

kde r_{in} , r_{out} označujeme polomer vnútornej a vonkajšej kružnice.

Druhým typom hranice je zemská os. Na rozdiel od prvého typu zemská os nie je fyzická hranica. Okrajové podmienky, ktoré na nej špecifikujeme, sú dané symetriou úlohy. V našej úlohe požadujeme, aby bolo riešenie zrkadlovo symetrické voči zemskej osi. Pre jednotlivé veličiny táto požiadavka predstavuje podmienky v tlaku

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3.5)$$

v rýchlostiach

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3.6)$$

$$v_\theta = 0, \quad (3.3.7)$$

a v silách

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3.9)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0. \quad (3.3.10)$$

Kapitola 4

Metóda posunutých sietí

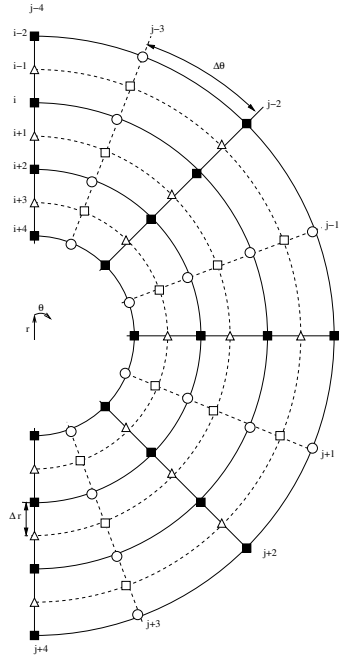
System rovníc (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) a reologický vzťah na strane 11 riešime pomocou metódy posunutých sietí [2]. V kartézskej geometrii je prednosťou metódy stabilita pri v priestore dramaticky meniacej sa viskozite. Metódu aplikujeme do zúženej sférickej geometrie. Diskretizačná sieť je zobrazená na obr. 4.1. Posunuté siete tvorí dvojica sietí, hlavná sieť na obrázku označená plnými čiarami vzdialenými o Δr a prerušovanými čiarami vzdialenými o $\Delta\theta$ označená posunutá sieť. V uzloch hlavnej siete, plných štvorcoch, predpisujeme viskozitu $\eta_{(r_i, \theta_j)}$, hustotu objemových síl $\rho_{(r_i, \theta_j)}$ a $r\theta$ -komponentu deviatorickej časti tenzora napätia $\sigma_{r\theta(r_i, \theta_j)}$. V uzloch posunutej siete, prázdnych štvorcoch, predpisujeme hodnoty tlaku $\pi_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}$, rr -komponenty deviatorickej časti tenzora napätia $\sigma_{rr(r_{i+1}, \theta_{j+1})}$ a $\theta\theta$ -komponenty deviatorickej časti tenzora napätia $\sigma_{\theta\theta(r_{i+1}, \theta_{j+1})}$. V priesečníkoch hlavnej a posunutej siete, prázdnych kruhoch a prázdnych trojuholníkoch predpisujeme r -komponentu vektora rýchlosti $v_{r(r_i, \theta_{j+1})}$, resp. θ -komponentu vektora rýchlosti $v_{\theta(r_{i+1}, \theta_j)}$.

4.1 Derivovanie na posunutých sietiach

Rovnice (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3) budeme diskretizovať v posunutých sietiach. Musíme teda formulovať výrazy pre derivácie jednotlivých veličín. Derivácie r -komponenty rýchlosti v_r podľa r a θ počítame v bodoch r_{i+1}, θ_{j+1} (prázdne štvorce), resp. r_i, θ_j (plné štvorce). Platí:

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})} = \frac{v_{r(r_i, \theta_{j+1})} - v_{r(r_{i+2}, \theta_{j+1})}}{2\Delta r}, \quad (4.1.1)$$

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)_{(r_i, \theta_j)} = \frac{v_{r(r_i, \theta_{j+1})} - v_{r(r_i, \theta_{j-1})}}{2\Delta\theta}. \quad (4.1.2)$$



Obrázek 4.1: Posunutú sieť v sférickéj geometrii.

Derivácie θ -komponenty rýchlosti v_θ podľa r a θ počítame v bodoch r_i, θ_j (plné štvorce), resp. r_{i+1}, θ_{j+1} (prázdne štvorce). Platí:

$$\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{(r_i, \theta_j)} = \frac{v_\theta(r_{i-1}, \theta_j) - v_\theta(r_{i+1}, \theta_j)}{2\Delta r}, \quad (4.1.3)$$

$$\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})} = \frac{v_\theta(r_{i+1}, \theta_{j+2}) - v_\theta(r_{i+1}, \theta_j)}{2\Delta \theta}. \quad (4.1.4)$$

Derivácie tlaku π podľa r a θ počítame v bodoch r_i, θ_{j+1} (prázdne kruhy), resp. r_{i+1}, θ_j (prázdne trojuholníky). Platí

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial r}\right)_{(r_i, \theta_{j+1})} = \frac{\pi(r_{i-1}, \theta_{j+1}) - \pi(r_{i+1}, \theta_{j+1})}{2\Delta r}, \quad (4.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial \theta}\right)_{(r_{i+1}, \theta_j)} = \frac{\pi(r_{i+1}, \theta_{j+1}) - \pi(r_{i+1}, \theta_{j-1})}{2\Delta \theta}. \quad (4.1.6)$$

Komponenty rr , $\theta\theta$ -deviatorickej časti tenzora napätia vyjadríme v bodoch r_{i+1}, θ_{j+1} , (prázdne štvorce). Komponentu $r\theta$ potom v bodoch r_i, θ_j , (plné štvorce). S použitím

reologického vzťahu dostávame

$$(\sigma_{rr})_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})} = 2\eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{v_r(r_i, \theta_{j+1}) - v_r(r_{i+2}, \theta_{j+1})}{2\Delta r}, \quad (4.1.7)$$

$$\eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \left[\frac{2}{r_{i+1}} \left(\frac{v_\theta(r_{i+1}, \theta_{j+2}) - v_\theta(r_{i+1}, \theta_j)}{2\Delta\theta} + \frac{v_r(r_i, \theta_{j+1}) + v_r(r_{i+2}, \theta_{j+1})}{2} \right) \right], \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{r\theta})_{(r_i, \theta_j)} &= \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{v_\theta(r_{i-1}, \theta_j) - v_\theta(r_{i+1}, \theta_j)}{2\Delta r} + \\ &+ \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{v_r(r_i, \theta_{j+1}) - v_r(r_i, \theta_{j-1})}{2\Delta\theta} - \frac{v_\theta(r_{i-1}, \theta_j) + v_\theta(r_{i+1}, \theta_j)}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Symbolom $\eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A$ označujeme priemernú viskozitu v danom bode. Platí teda

$$\eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A = \frac{1}{4} (\eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} + \eta_{(r_{i+2}, \theta_{j+1})} + \eta_{(r_i, \theta_j)} + \eta_{(r_i, \theta_{j+2})}).$$

Derivácie rr -komponenty deviatorickej časti tenzora napätia podľa r a θ počítame v bodoch r_i, θ_{j+1} (prázdne kruhy), resp. r_{i+1}, θ_j (prázdne trojuholníky). Analogicky sa vyčísľujú aj derivácie $\theta\theta$ -komponenty deviatorickej časti tenzora napätia podľa r a θ . Platí

$$\left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right)_{(r_i, \theta_{j+1})} = \frac{\sigma_{rr}(r_{i-1}, \theta_{j+1}) - \sigma_{rr}(r_{i+1}, \theta_{j+1})}{2\Delta r}, \quad (4.1.10)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} \right)_{(r_{i+1}, \theta_j)} = \frac{\sigma_{rr}(r_{i+1}, \theta_{j+1}) - \sigma_{rr}(r_{i+1}, \theta_{j-1})}{2\Delta\theta}. \quad (4.1.11)$$

Derivácie $r\theta$ -komponenty deviatorickej časti tenzora napätia podľa r a θ počítame v bodoch r_{i+1}, θ_j (prázdne trojuholníky), resp. r_i, θ_{j+1} (prázdne kruhy). Platí

$$\left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \right)_{(r_{i+1}, \theta_j)} = \frac{\sigma_{r\theta}(r_i, \theta_j) - \sigma_{r\theta}(r_{i+2}, \theta_j)}{2\Delta r}, \quad (4.1.12)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \right)_{(r_i, \theta_{j+1})} = \frac{\sigma_{r\theta}(r_i, \theta_{j+2}) - \sigma_{r\theta}(r_i, \theta_j)}{2\Delta\theta}. \quad (4.1.13)$$

4.2 Rovnica kontinuity na posunutých sietiach

Rovnicu kontinuity (3.2.1) predpisujeme v bodoch r_{i+1}, θ_{j+1} , prázdnych štvorcoch, s pomocou vzťahov z podkapitoly 4.1. Platí

$$\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^1 v_r(r_i, \theta_{j+1}) + \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^2 v_r(r_{i+2}, \theta_{j+1}) + \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^3 v_\theta(r_{i+1}, \theta_{j+2}) + \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^4 v_\theta(r_{i+1}, \theta_j) = 0, \quad (4.2.1)$$

kde

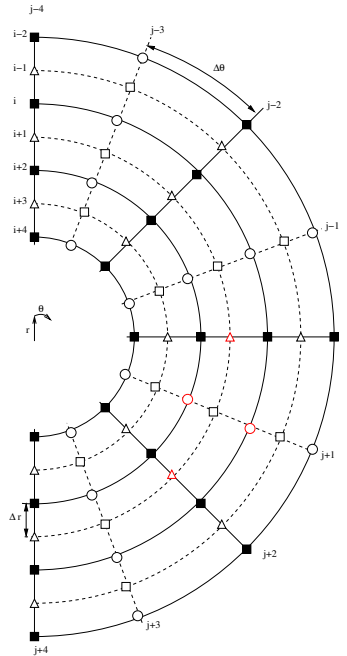
$$\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^1 = \left[\frac{r_{i+1}^3 \sin \theta_{i+1}}{2\Delta r} + r_{i+1}^2 \sin \theta_{i+1} \right], \quad (4.2.2)$$

$$\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^2 = \left[r_{i+1}^2 \sin \theta_{i+1} - \frac{r_{i+1}^3 \sin \theta_{i+1}}{2\Delta r} \right], \quad (4.2.3)$$

$$\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^3 = \left[\frac{r_{i+1}^2 \sin \theta_{i+1}}{2\Delta \theta} + \frac{r_{i+1}^2 \cos \theta_{i+1}}{2} \right], \quad (4.2.4)$$

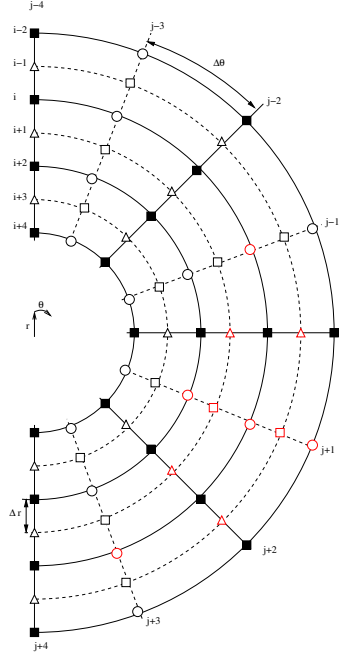
$$\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^4 = \left[\frac{r_{i+1}^2 \cos \theta_{i+1}}{2} - \frac{r_{i+1}^2 \sin \theta_{i+1}}{2\Delta \theta} \right]. \quad (4.2.5)$$

Diskretizovaná rovnica kontinuity je zobrazená na obr. 4.2.



Obrázek 4.2: Diskretizácia rovnice kontinuity.

4.3 Pohybová rovnica v smere \vec{e}_r na posunutých sietiach



Obrázek 4.3: Diskretizácia \vec{e}_r komponenty pohybovej rovnice.

Rovnicu (3.2.2) pre komponentu pohybovej rovnice v smere \vec{e}_r predpisujeme v bodoch r_i, θ_{j+1} , prázdnych kruhoch, s pomocou vzťahov z podkapitoly 4.1. Platí

$$\begin{aligned}
 & \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^1 \pi(r_{i-1}, \theta_{j+1}) + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^2 \pi(r_{i+1}, \theta_{j+1}) + \\
 & + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^3 v_r(r_i, \theta_{j+1}) + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^4 v_r(r_{i-2}, \theta_{j+1}) + \\
 & + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^5 v_r(r_{i+2}, \theta_{j+1}) + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^6 v_r(r_i, \theta_{j+3}) + \\
 & + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^7 v_\theta(r_{i-1}, \theta_{j+2}) + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^8 v_\theta(r_{i+1}, \theta_{j+2}) + \\
 & + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^9 v_r(r_i, \theta_{j-1}) + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^{10} v_\theta(r_{i+1}, \theta_j) + \\
 & + \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^{11} v_r(r_{i-1}, \theta_j) = -g_r r_i^3 \sin \theta_{j+1} \frac{\rho(r_i, \theta_{j+2}) - \rho(r_i, \theta_j)}{2},
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

kde

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^1 = -\frac{r_i^3 \sin \theta_{j+1}}{2\Delta r}, \tag{4.3.2}$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^2 = \frac{r_i^3 \sin \theta_{j+1}}{2\Delta r}, \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^3 = & -2\eta_{(r_{i-1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i-1}^3 \sin \theta_{j+1}}{2\Delta r 2\Delta r} - 2\eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1}^3 \sin \theta_{j+1}}{2\Delta r 2\Delta r} - \\ & - \eta_{(r_i, \theta_{j+2})} \frac{r_i \sin \theta_{j+2}}{2\Delta \theta 2\Delta \theta} - \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i \sin \theta_j}{2\Delta \theta 2\Delta \theta}, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^4 = 2\eta_{(r_{i-1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i-1}^3 \sin \theta_{j+1}}{2\Delta r 2\Delta r}, \quad (4.3.5)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^5 = 2\eta_{(r_{i-1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i-1}^3 \sin \theta_{j+1}}{2\Delta r 2\Delta r}, \quad (4.3.6)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^6 = \eta_{(r_i, \theta_{j+2})} \frac{r_i \sin \theta_{j+2}}{2\Delta \theta 2\Delta \theta}, \quad (4.3.7)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^7 = -\eta_{(r_i, \theta_{j+2})} \frac{r_i \sin \theta_{j+2}}{2\Delta \theta 2} + \eta_{(r_i, \theta_{j+2})} \frac{r_i^2 \sin \theta_{j+2}}{2\Delta \theta 2\Delta r}, \quad (4.3.8)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^8 = -\eta_{(r_i, \theta_{j+2})} \frac{r_i \sin \theta_{j+2}}{2\Delta \theta 2} - \eta_{(r_i, \theta_{j+2})} \frac{r_i^2 \sin \theta_{j+2}}{2\Delta \theta 2\Delta r}, \quad (4.3.9)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^9 = \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i \sin \theta_j}{2\Delta \theta 2\Delta \theta}, \quad (4.3.10)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^{10} = \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i \sin \theta_j}{2\Delta \theta 2} + \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i^2 \sin \theta_j}{2\Delta \theta 2\Delta r}, \quad (4.3.11)$$

$$\beta_{(r_i, \theta_{j+1})}^{11} = \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i \sin \theta_j}{2\Delta \theta 2} - \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i^2 \sin \theta_j}{2\Delta \theta 2\Delta r}. \quad (4.3.12)$$

Diskretizovanú \vec{e}_r komponentu pohybovej rovnice ukazuje obr. 4.3.

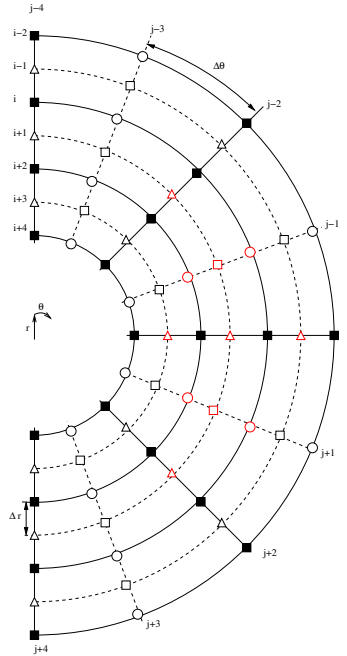
4.4 Pohybová rovnica v smere \vec{e}_θ na posunutých sietiach

Rovnicu (3.2.3) pre komponentu pohybovej rovnice v smere \vec{e}_θ predpisujeme v bodoch r_{i+1}, θ_j , prázdnych trojuholníkoch, s pomocou vzťahov z podkapitoly 4.1. Platí

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^1 \pi_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})} + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^2 \pi_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})} + \\
 & + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^3 v_{r_{(r_{i+2}, \theta_{j+1})}} + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^4 v_{r_{(r_{i+2}, \theta_{j-1})}} + \\
 & + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^5 v_{\theta_{(r_{i+3}, \theta_j)}} + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^6 v_{\theta_{(r_{i+1}, \theta_j)}} + \\
 & + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^7 v_{r_{(r_i, \theta_{j+1})}} + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^8 v_{r_{(r_i, \theta_{j-1})}} + \\
 & + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^9 v_{\theta_{(r_{i-1}, \theta_j)}} + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^{10} v_{\theta_{(r_{i+1}, \theta_{j+2})}} + \\
 & + \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^{11} v_{\theta_{(r_{i-1}, \theta_{j+2})}} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

kde

$$\gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^1 = -\frac{r_{i+1}^2 \sin \theta_j}{2\Delta\theta}, \tag{4.4.2}$$



Obrázek 4.4: Diskretizácia \vec{e}_θ komponenty pohybovej rovnice.

$$\gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^2 = \frac{r_{i+1}^2 \sin \theta_j}{2\Delta\theta}, \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^3 &= -\eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} \frac{r_{i+2}^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta\theta} - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1}^2 \cos \theta_j}{2\Delta r} + \\ &+ \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j+1}}{2\Delta\theta}, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^4 &= \eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} \frac{r_{i+2}^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta\theta} - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1}^2 \cos \theta_j}{2\Delta r} + \\ &+ \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2} - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j-1}}{2\Delta\theta}, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$\gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^5 = \eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} \frac{r_{i+2}^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2} + \eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} \frac{r_{i+2}^3 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta r}, \quad (4.4.6)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^6 = \\ &= -\eta(r_i, \theta_j) \frac{r_i^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2} - \eta_{(r_i, \theta_j)} \frac{r_i^3 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta r} + \eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} \frac{r_{i+2}^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2} - \\ & - \eta_{(r_{i+2}, \theta_j)} \frac{r_{i+2}^3 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta r} - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2\Delta\theta} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2\Delta\theta} - \\ & - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j+1}}{2\Delta\theta \Delta\theta} - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j-1}}{2\Delta\theta \Delta\theta}, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^7 &= \eta(r_i, \theta_j) \frac{r_i^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta\theta} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1}^2 \cos \theta_j}{2\Delta r} + \\ &+ \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j+1}}{2\Delta\theta}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^8 &= -\eta(r_i, \theta_j) \frac{r_i^2 \sin \theta_j}{2\Delta r 2\Delta\theta} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1}^2 \cos \theta_j}{2\Delta r} + \\ &+ \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2} - \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j-1}}{2\Delta\theta}, \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

$$\gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^9 = -\eta(r_i, \theta_j) \frac{r_i^2 \sin \theta_j}{2\Delta r^2} + \eta(r_i, \theta_j) \frac{r_i^3 \sin \theta_j}{2\Delta r^2 \Delta r}, \quad (4.4.10)$$

$$\gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^{10} = \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2\Delta \theta} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j+1}}{2\Delta \theta \Delta \theta}, \quad (4.4.11)$$

$$\gamma_{(r_{i+1}, \theta_j)}^{11} = -\eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \cos \theta_j}{2\Delta \theta} + \eta_{(r_{i+1}, \theta_{j-1})}^A \frac{r_{i+1} \sin \theta_{j-1}}{2\Delta \theta \Delta \theta}. \quad (4.4.12)$$

Diskretizovanú \vec{e}_θ komponentu pohybovej rovnice ukazuje obr. 4.4.

4.5 Okrajové podmienky na posunutých sietiach

Z obrázkov obr. 4.2 až obr. 4.4 je vidno, že predpísanie rovníc kontinuity a pohybových rovníc v krajných bodoch siete na obr. 4.1 si vyžaduje dodefinovanie virtuálnych bodov, ktoré by ležali mimo skúmanú oblasť. Pomocou virtuálnych bodov je tiež možné diskretizovať rovnice okrajových podmienok z kapitoly 3.3. Počet okrajových podmienok závisí od toho, v ktorých reálnych vnútorných bodoch siete budeme požadovať splnenie rovníc (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3). Okrajové podmienky budeme podrobnejšie diskutovať v ďalšej kapitole.

Kapitola 5

Program v jazyku Matlab[®]

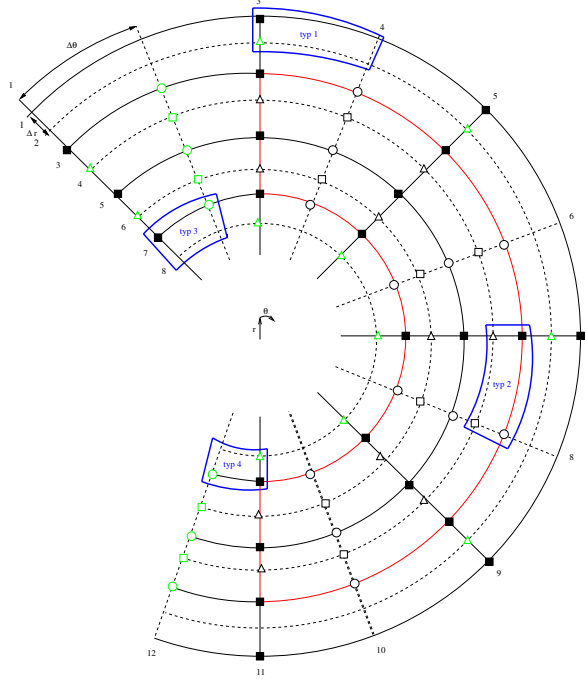
5.1 Bunky

Sieť reálnych bodov je tvorená $m \times n$ uzlami. Reálnu sieť je potrebné rozšíriť o uzly nutné k diskretizácii rovníc (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3) v krajných uzloch reálnej siete. Počet virtuálnych uzlov a tvar rozšírenej siete je daný tým, v ktorých vnútorných bodoch reálnej siete tieto rovnice predpíšeme. Konkrétny tvar rozšírenej siete použitej v programe ukazuje obr. 5.1

Rozšírenú sieť si rozčleníme na bunky. Bunka so súradnicami i_b, j_b obsahuje 4 uzly, ktoré sa v rámci bunky líšia vnútorným indexom k : $r_{2i_b-1}, \theta_{2j_b}$ (prázdne kruhy) majú $k = 1$, r_{2i_b}, θ_{2j_b} (prázdne štvorce) majú $k = 2$, $r_{2i_b}, \theta_{2j_b-1}$ (prázdne trojuholníky) majú $k = 3$ a $r_{2i_b-1}, \theta_{2j_b-1}$ (plné štvorce) s $k = 4$. Tvar siete vyžaduje zavedenie štyroch typov buniek podľa počtu neznámych, ktoré sa v nich počítajú (obr. 5.1):

1. **Typ 1** Bunky tvoria horný okraj rozšírenej siete. Počíta sa v nich θ -komponenta vektora rýchlosti $v_{\theta(r_{2i_b}, \theta_{2j_b-1})}$.
2. **Typ 2** Bunky vyplňajú vnútro siete. Počíta sa v nich θ -komponenta vektora rýchlosti $v_{\theta(r_{2i_b}, \theta_{2j_b-1})}$, tlak π predpísaný v uzle $\pi_{(r_{2i_b}, \theta_{2j_b})}$ a r -komponenta vektora rýchlosti $v_{r, (r_{2i_b-1}, \theta_{2j_b})}$.
3. **Typ 3** Bunka je súčasťou severného dolného rohu siete. Počíta sa v nej r -komponenta vektora rýchlosti $v_{r(r_{2i_b-1}, \theta_{2j_b})}$.
4. **Typ 4** Bunka je súčasťou južného horného rohu siete. Počítajú sa v nej θ komponenta vektora rýchlosti $v_{\theta(r_{2i_b}, \theta_{2j_b-1})}$ a r -komponenta vektora rýchlosti $v_{r(r_{2i_b-1}, \theta_{2j_b})}$.

Označme m_b počet buniek rozšírenej siete v smere \vec{e}_r a n_b počet buniek rozšírenej siete v smere \vec{e}_θ . Rozšírená sieť má potom celkom $2m_b \times 2n_b$ uzlov. Neznáme veličiny sa počítajú v $3[(m_b - 2)n_b + (n_b - 1)]$ uzloch. Ukážeme, že v odpovedajúcich uzloch vieme predpísať $3[(m_b - 2)n_b + (n_b - 1)]$ rovníc a tým problém riešenia rovníc (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3) na sieťach prevedieme na sústavu typu $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$.



Obrázek 5.1: Rozšírená diskretizačná sieť s bunkami pre 5×9 reálnych bodov.

5.2 Diskretizácia okrajových podmienok

V programe používame okrajové podmienky dané rovnicami (3.3.1), (3.3.2) a (3.3.5) až (3.3.7). Pre jednoduchosť sa pri diskretizácii obmedzíme na severný a vonkajší okraj hranice.

Okrajovú podmienku v normálovej zložke vektora rýchlosti danú rovnicou (3.3.1) predpisujeme v bodoch r_3, θ_{j+1}

$$v_{r(r_3, \theta_{j+1})} = v_{r(r_3, \theta_{j+1})}^{BC}. \quad (5.2.1)$$

Diskretizačné schéma podmienky je na obr. 5.2a. Okrajovú podmienku v dotyčnicovej

komponente vektora rýchlosti danú rovnicou (3.3.2) predpisujeme v bodoch r_2, θ_j

$$\frac{1}{2} (v_{\theta(r_2, \theta_j)} + v_{\theta(r_4, \theta_j)}) = v_{\theta(r_3, \theta_j)}^{BC}. \quad (5.2.2)$$

Diskretizačná schéma podmienky je na obr. 5.2b.

Okrajovú podmienku v tlaku plynúcu zo symetrie danú rovnicou (3.3.5) predpisujeme v bodoch r_{i+1}, θ_2

$$\frac{\pi(r_{i+1}, \theta_4) - \pi(r_{i+1}, \theta_2)}{2\Delta\theta} = 0. \quad (5.2.3)$$

Diskretizačná schéma podmienky je na obr. 5.3a. Okrajovú podmienku v normálovej zložke vektora rýchlosti plynúcu zo symetrie danú rovnicou (3.3.6) predpisujeme v bodoch r_i, θ_2

$$\frac{v_r(r_i, \theta_4) - v_r(r_i, \theta_2)}{2\Delta\theta} = 0. \quad (5.2.4)$$

Diskretizačná schéma podmienky je na obr. 5.3b. Okrajovú podmienku v dotyčnicovej zložke vektora rýchlosti plynúcu zo symetrie danú rovnicou (3.3.7) predpisujeme v bodoch r_{i+1}, θ_3

$$v_{\theta(r_{i+1}, \theta_3)} = 0. \quad (5.2.5)$$

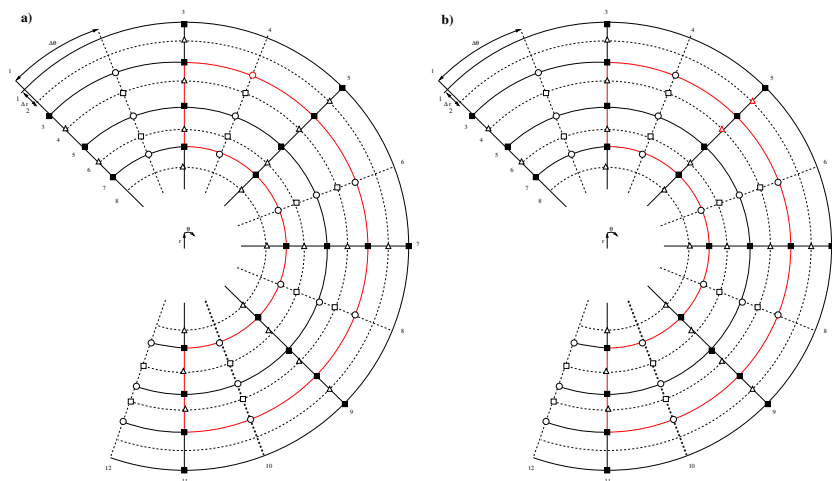
Diskretizačná schéma podmienky je na obr. 5.3c. V bodoch r_{i+1}, θ_1 predpisujeme rovnicu

$$v_{\theta(r_{i+1}, \theta_1)} = 0. \quad (5.2.6)$$

Táto podmienka neodzrkadluje fyzikálnu realitu. Predpisujeme ju namiesto zložitejších podmienok (napr. (3.3.10)), aby sme dosiahli potrebného počtu rovníc. Nakoľko je cieľom tejto práce ukázať schodnosť metódy posunutých sietí v sférickej geometrii, je táto voľba dostačujúca.

5.3 Plnenie matice

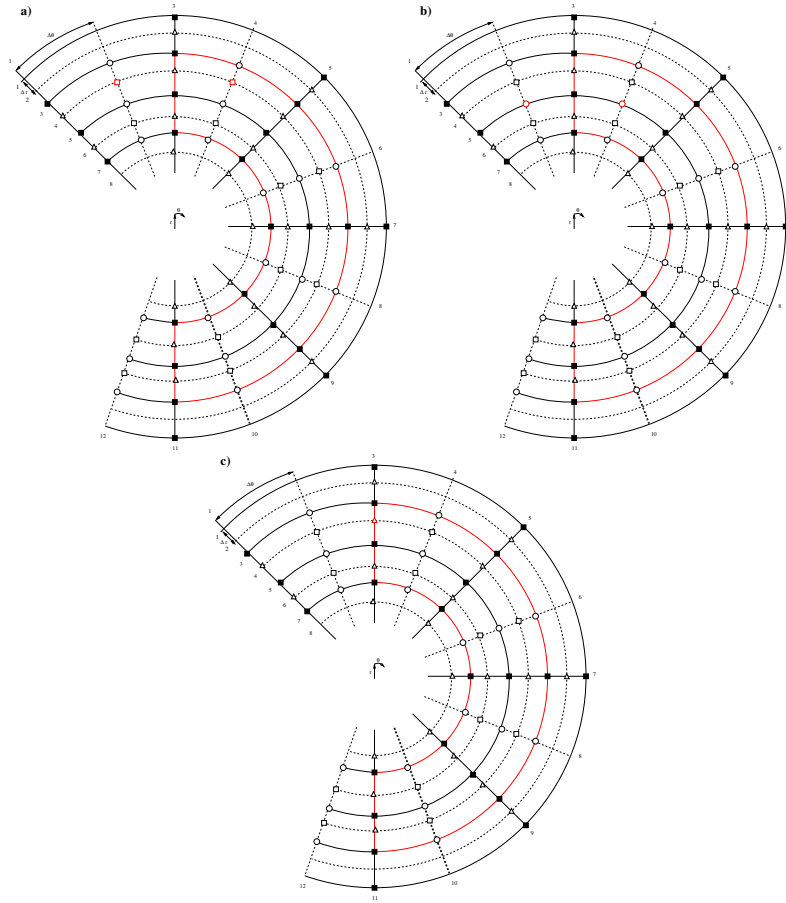
Poradie uzlov siete a teda aj poradie neznámych veličín vo vektore neznámych \vec{x} určuje indexačná funkcia. Jej vstupnými parametrami sú typ a súradnice bunky, v ktorých sa uzol nachádza a vnútorný index. Existuje aj inverzná funkcia, ktorá z poradia veličiny vo vektore riešenia určí typ veličiny a súradnice uzla, v ktorom bola predpísaná. Poradie bodu, v ktorom rovnicu predpisujeme, určuje riadok v matici \mathbf{A} a aj poradie hodnoty pravej strany rovnice vo vektore \vec{b} . Poradie neznámej použitej v danej rovnici určuje stĺpec v matici \mathbf{A} . Na takto jednoznačne určenú pozíciu v matici je potom zapísaná hodnota koeficientu stojaceho v rovnici pred neznámou. Vnútro siete je z hľadiska plnenia matice nezaujímavé, nakoľko vo vnútorných bodoch cyklicky predpisujeme rovnice



Obrázek 5.2: Schéma diskretizácie hraničných podmienok na vonkajšej hranici, **a)** normálová komponenta \vec{v} v r_3, θ_{j+1} , **b)** dotyčnicová komponenta \vec{v} v r_3, θ_j .

(4.2.1), (4.3.1) a (4.4.1). V programe je táto oblasť ošetrená funkciami *Intro* a *DIntro*. Celkovo tak predpíšeme $3(n_b - 3)(m_b - 3)$ rovníc. Okraje a rohy rozšírenej siete musia byť ošetrené samostatne:

- V severnom hornom rohu v programe ošetrenou funkciou *SU* predpisujeme rovnice v troch bunkách. V bunke so súradnicami $[1, 2]$ predpíšeme podmienku danú rovnicou (5.2.5). V bunke so súradnicami $[2, 1]$ predpíšeme podmienky dané rovnicami (5.2.4), (5.2.3) a (5.2.6). V bunke so súradnicami $[2, 2]$ predpíšeme podmienky dané rovnicami (5.2.1), (5.2.5) a rovnicu kontinuity (4.2.1). Predpísali sme teda sedem rovníc.
- Vonkajší okraj ošetruje funkcia *HornyLem*. V bunke so súradnicami $[1, j]$ predpíše podmienku (5.2.5), v bunke so súradnicami $[2, j]$ potom podmienku (5.2.1), rovnicu kontinuity (4.2.1) a pohybovú rovnicu (4.4.1). Výsledkom je $4(n_b - 3)$ predpísaných rovníc.
- Južný dolný roh a južný okraj sú ošetrené funkciou *JD*, resp. *PravyLem*, ktoré v bunkách so súradnicami $[2, n_b]$, resp. $[i, n_b]$ predpíšu podmienky (5.2.3), (5.2.4) a (5.2.5). Celkovo je predpísaných $3 + 3(m_b - 3)$ rovníc.
- Funkcia *SD* ošetrí južný horný okraj tak, že v bunke so súradnicami $[m_b, n_b]$ predpíše 2 podmienky dané rovnicami (5.2.4), (5.2.5).



Obrázek 5.3: Schéma diskretizácie hraničných podmienok na zemskej osi, **a)** v tlaku π v r_{i+1}, θ_3 , **b)** normálová komponenta \vec{v} v r_i, θ_3 , **c)** dotyčnicová komponenta \vec{v} v r_{i+1}, θ_3 .

- Vnútorý okraj je ošetrený funkciou *DolnyLem*, ktorá v bunkách so súradnicami $[m_b, j]$ predpíše podmienky (5.2.1) a (5.2.2), čo predstavuje $2(m_b - 3)$ rovníc.
- V severnom dolnom rohu funkcia *SD* predpíše v bunke so súradnicami $[m_b, 1]$ podmienku (5.2.4) a v bunke so súradnicami $[m_b, 2]$ podmienky (5.2.1) a (5.2.5).
- Severný okraj je ošetrený funkciou *LavyLem*. Táto predpíše celkom $6(m_b - 3)$ rovníc. V bunke so súradnicami $[i, 1]$ predpíše podmienky (5.2.4), (5.2.3) a (5.2.6). V bunke so súradnicami $[i, 2]$ predpíše podmienku (5.2.5), pohybovú rovnicu (4.3.1) a rovnicu kontinuity (4.2.1).

Časť programu, ktorá plní maticu sústavy, je zobrazená v list. 5.1. Ľahko sa presvedčíme, že program predpísal $3[(m_b - 2)n_b + (n_b - 1)]$ rovníc.

Listing 5.1: Plnenie matice.

```

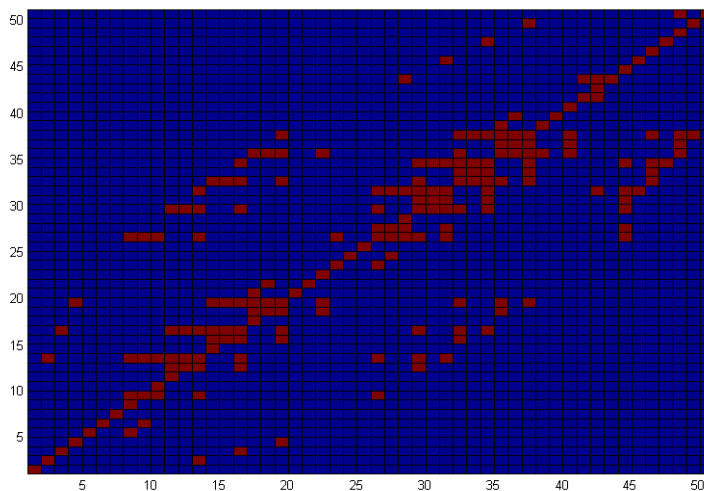
%severny horny roh
SU;
%lavy okraj
for i_b=3:(m_b-1)
    LavyLem(i_b ,1);
end
%severny dolny roh
JU;
%horny okraj
for j_b=3:(n_b-1)
    HornyLem(1 ,j_b );
end
%vnutro
for i_b=3:(m_b-2)
    for j_b=3:(n_b-1)
        Intro(i_b ,j_b );
    end
end
%vnutro na spodnym okrajom
for j_b=3:(n_b-1)
    DIntro(m_b-1,j_b )
end
%dolny okraj
for j_b=3:(n_b-1)
    DolnyLem(m_b ,j_b );
end
%juzny dolny roh
JD;
%pravy okraj
for i_b=3:(m_b-1)
    PravyLem(i_b ,n_b );
end
%juzny horny roh
SD;

```

5.4 Inverzia

Ukázali sme, že pre $3[(m_b - 2)n_b + (n_b - 1)]$ neznámych vieme predpísať v odpovedajúcich uzloch $3[(m_b - 2)n_b + (n_b - 1)]$ rovníc. Problém riešenia rovníc (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3) na sieťach vedie na sústavu typu $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Matica sústavy \mathbf{A} je pri voľbe poradia neznámych $v_{r(r_i, \theta_{j+1})}$, $\pi_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}$, $v_{\theta(r_{i+1}, \theta_j)}$ a poradia rovníc \vec{e}_r komponenta pohybovej rovnice, rovnica kontinuity, \vec{e}_θ komponenta pohybovej rovnice pásová (obr. 5.4, kde sú červenou farbou označené pozície v matici, ktorých hodnota sa zmenila oproti inicializovanej).

Sústavu riešime pomocou funkcie *linsolve*, ktorá je zabudovanou funkciou programu Matlab[®]. Funkcia *linsolve* využíva **LU** dekompozíciu s čiastočným pivotovaním.



Obrázek 5.4: Pásová matica siete s 5×9 reálnymi bodmi.

Kapitola 6

Testy programu

6.1 Podmienenosť matice

Podmienenosť matice \mathbf{A} je kľúčová vlastnosť pre správnosť a stabilitu riešenia sústavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Pri prvých testoch, kde sme uvažovali hraničnú podmienku iba v rýchlostiach na celej hranici, bola podmienenosť matice $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 5 \cdot 10^{17}$. Označme $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ programom spočítanú inverznú maticu k \mathbf{A} . Zlá podmienenosť matice sa prejaví v tom, že nie je splnená vlastnosť $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. V našom prípade sa dokonca ukázalo, že $\max_{ij} |(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A})_{ij} - \mathbf{I}_{ij}| \approx 1 \cdot 10^1$. V snahe nájsť možné lineárne závislé riadky sme maticu testovali skriptom zobrazenom v list. 6.1. Skript využíva metódu Singular Value Decomposition (ďalej SVD). Metóda SVD rozloží maticu \mathbf{M} na súčin matic \mathbf{USV} , kde \mathbf{U} a \mathbf{V} sú unitárne matice a \mathbf{S} má na diagonále nezáporné čísla tak, aby platilo $\mathbf{M} = \mathbf{USV}$. Funkcia *svd* v programe Matlab[®] navyše elementy \mathbf{S} usporiada zostupne. Počet čísel v \mathbf{S} , ktoré sa rádovo výrazne líšia od ostatných, ukazuje na rovnaký počet riadkov matice \mathbf{M} , ktoré môžu byť vytvorené ako lineárne kombinácie ostatných riadkov. Testom celej matice \mathbf{A} funkciou *svd* sme zistili, že taký riadok je práve jeden. Úlohou skriptu je tento riadok nájsť.

V danom prípade sa ukázal byť problematickým riadok odpovedajúci rovnici kontinuity. Podmienenosť matice sa dramaticky zlepšila, ak sme v rovnici predpísali 1 na diagonálu. Prakticky sme miesto rovnice kontinuity (2.1.1) pre nestlačiteľnú kvapalinu predpísali rovnicu kontinuity v tvare

$$\nabla \cdot \vec{v} + \pi = 0. \tag{6.1.1}$$

Ako ukazuje nasledujúci príklad z mechaniky kontinua, je voľba rovnice kontinuity v tomto tvare rozumná.

Rovnica kontinuity a reologický vzťah pre nestlačiteľné elastické látky majú tvar

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (6.1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\boldsymbol{\epsilon}, \quad (6.1.3)$$

kde \vec{u} je vektor posunutia, $\boldsymbol{\epsilon}$ je tenzor malých deformácií, $\boldsymbol{\sigma}$ je deviatorická časť tenzora napätia a η je Lamého koeficient. Rovnica kontinuity pre stlačiteľné elastické látky má tvar

$$\nabla \cdot \vec{u} + \frac{\pi}{K} = 0, \quad (6.1.4)$$

kde $K = \lambda + 2\eta/3$. Reologické vlastnosti stlačiteľných elastických látok popisuje vzťah

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta \left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u} + \frac{2}{3} \frac{\pi}{K} \mathbf{I} \right). \quad (6.1.5)$$

Rovnica kontinuity nestlačiteľných elastických látok (6.1.2) je analogická rovnici kontinuity nestlačiteľnej viskózne kvapaliny (2.1.1). Podobne reologický vzťah nestlačiteľných elastických látok (6.1.3) je analógiou reologického vzťahu nestlačiteľnej viskózne kvapaliny (2.2.1). Tvrdíme, že predpísaním rovnice kontinuity v tvare

$$\nabla \cdot \vec{v} + \frac{\pi}{K} = 0, \quad (6.1.6)$$

kde $K = \lambda + 2\eta/3$ a λ, η sú koeficienty viskozity, je možné v duchu analógie formálne zaviesť stlačiteľnosť do modelu tečenia viskózne kvapaliny. Nestlačiteľnej kvapaline sa bude model blížiť pre dostatočne veľké hodnoty K . Korekciu v reologickom vzťahu analogickú (6.1.5) neuvažujeme, nakoľko jej implementácia do programu je časovo náročná. Ukážeme, že pri voľbe rovnice kontinuity (6.1.6) a pri zanedbaní korekcie je pre dostatočne veľké hodnoty K spočítané riešenie správne, stabilné a dostatočne presné.

Diskretizovaná rovnica (6.1.6) má tvar

$$\begin{aligned} & \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^1 v_{r(r_i, \theta_{j+1})} + \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^2 v_{r(r_{i+2}, \theta_{j+1})} + \\ & + \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^3 v_{\theta(r_{i+1}, \theta_{j+2})} + \alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^4 v_{\theta(r_{i+1}, \theta_j)} + \frac{\pi_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}}{K} = 0, \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

kde koeficienty $\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^1$ až $\alpha_{(r_{i+1}, \theta_{j+1})}^4$ sú dané rovnicami (4.2.2) až (4.2.5). Predpísaním rovnice (6.1.7) v bodoch r_{i+1}, θ_{j+1} , prázdnych štvorcov, sa podmienenosť matice \mathbf{A} zlepšila (tab. 6.1), $\max_{ij} |(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{A})_{ij} - \mathbf{I}_{ij}| \approx 1.10^{-8}$. Pre $1.10^{-1} > \frac{1}{K} > 1.10^{-3}$ sa hodnoty riešení pri rôznych K líšia o 1.10^{-4} , pre $\frac{1}{K} < 1.10^{-3}$ sa hodnoty riešení líšia zanedbateľne.

Listing 6.1: Test matice metódou SVD.

```

function [M,N]=NAlyze
global Matrix control
for i=1:pocet_neznamych
    for j=1:pocet_neznamych
        if i<j
            [A,B,C]=svd(Matrix(i:j,i:j));
            [a,b]=size(B);
            M(i,j)=B(a,b);
        end
    end
end

```

$1/K$	$cond(\mathbf{A})$
0.1	$9 \cdot 10^5$
0.01	$9 \cdot 10^6$
0.001	$9 \cdot 10^7$
0.0001	$9 \cdot 10^8$
0.00001	$9 \cdot 10^9$
0.000001	$9 \cdot 10^{10}$

Tabulka 6.1: Podmienenosť matice v závislosti od hodnôt $1/K$ pre reálnu sieť s 5×7 uzlami.

Problém s podmienenosťou matice bol spôsobený nevhodnou voľbou okrajových podmienok. Jeden typ okrajovej podmienky na celej hranici nedáva riešeniu voľnosť, riešenie neexistuje, čo sa prejaví v zlej podmienenosti matice sústavy. Kombinácia okrajových podmienok rôznych typov vedie k dobre podmienenej matici.

6.2 Časová náročnosť

Doba výpočtu rastie exponenciálne s počtom uzlov reálnej siete. Závislosť ukazuje tab. 6.2, kde $m \times n$ označuje počet bodov reálnej siete, p označuje počet neznámych a t dobu výpočtu.

$m \times n$	p	$t[s]$
5×7	42	0.7
17×19	294	0.9
33×33	915	9.7
55×75	3273	362

Tabulka 6.2: Časová náročnosť výpočtu.

6.3 Riešenie pri bodovom rozložení hustoty objemových síl

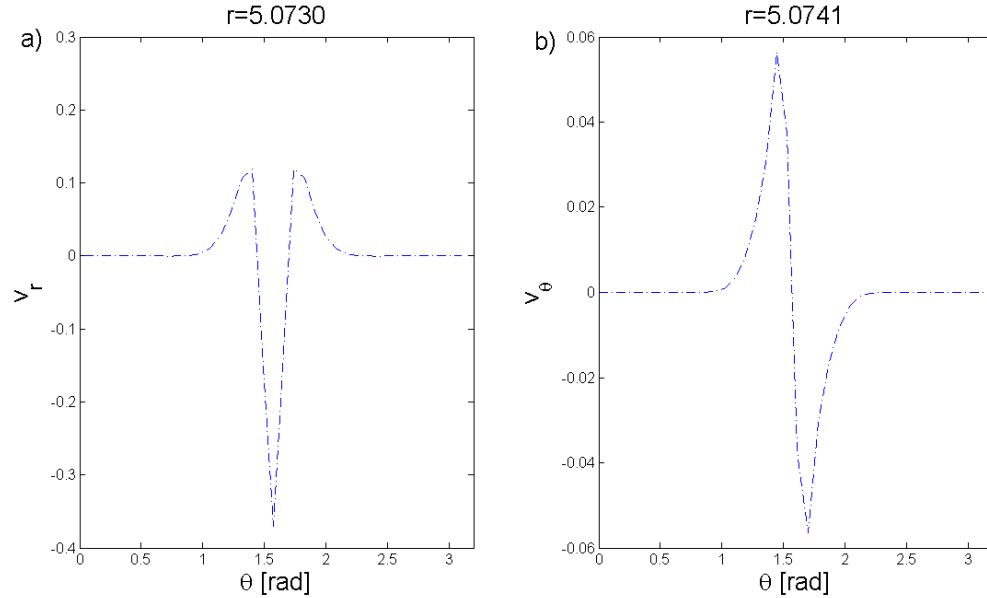
V tomto príklade zadávame na vnútornom okraji s polomerom $r_{in} = 4$ a vonkajšom okraji s polomerom $r_{out} = 6$ podmienky voľného preklzu a voľného toku v smere normály. Na oboch hraniciach sú normálová a dotyčnicová zložka vektora rýchlosti \vec{v} nulové. Hustotu objemových síl predpisujeme nulovú vo všetkých bodoch siete okrem bodu $r = 5, \theta = \pi/2$, kde platí $\rho = 50$. Ďalej uvažujeme zložku vektora gravitačného zrýchlenia $g_r = -1$, viskozitu $\eta = 1$ v celej oblasti a takmer nestlačiteľnú kvapalinu s $1/K = 1.10^{-6}$. Úlohu riešime na sieti s 55×75 uzlami.

Bod nenulovej hustoty leží na osy symetrie oblasti. Vzhľadom na okrajové podmienky očakávame, že sa v oblasti nenulovej hustoty budú tvoriť víry, resp. že riešenie bude mať zrkadlovú symetriu voči osi $\theta = \pi/2$. Táto vlastnosť riešenia sa prejaví tým, že na kružnici s $r = 5$ bude mať závislosť v_r od θ symetrický charakter a závislosť v_θ od θ antisymetrický charakter. Priebeh oboch funkcií je zobrazený na obr. 6.1. Tlakové a rýchlostné polia sú zobrazené na obr. 6.2. Grafické výstupy programu ukazujú očakávaný tvar riešenia.

6.4 Riešenie pri harmonickom rozložení hustoty objemových síl

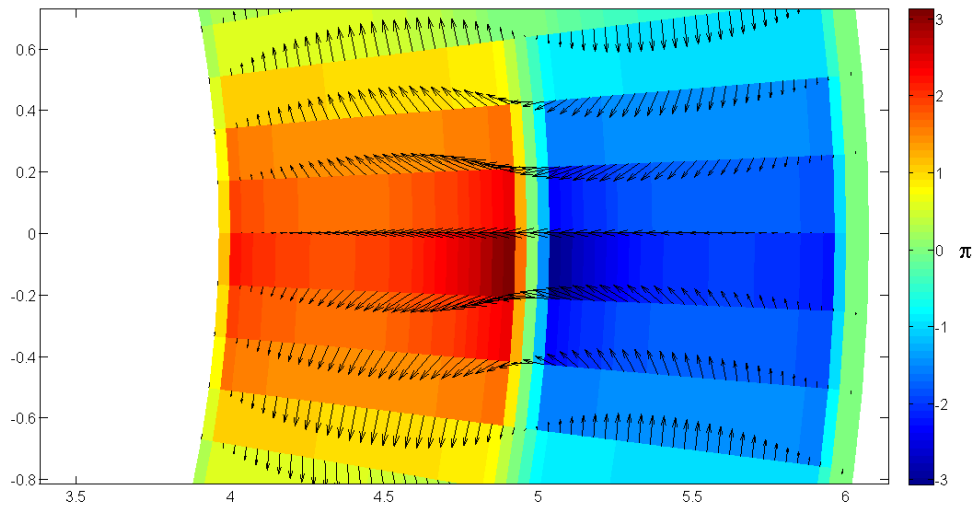
V druhom príklade zadávame na vnútornom okraji s polomerom $r_{in} = 4$ a vonkajšom okraji s polomerom $r_{out} = 6$ podmienky voľného preklzu a voľného toku v smere normály. Na oboch hraniciach sú normálová a dotyčnicová zložka vektora rýchlosti \vec{v} nulové. Hustotu objemových síl predpisujeme nulovú vo všetkých bodoch siete okrem kružnice s polomerom $r = 5$, kde platí $\rho = 20 \sin \theta$. Ďalej uvažujeme zložku vektora gravitačného zrýchlenia $g_r = -1$, viskozitu $\eta = 1$ v celej oblasti a takmer nestlačiteľnú kvapalinu s $1/K = 1.10^{-6}$. Úlohu riešime na sieti s 55×75 uzlami.

Hustota objemových síl má na kružnici s polomerom $r = 5$ harmonický priebeh.



Obrázek 6.1: Priebek komponent rýchlosti pri symetrickom bodovom rozložení ρ , **a)** závislosť v_r od θ v hĺbke 5,073, **b)** závislosť v_θ od θ v hĺbke 5,074.

Vzhľadom na okrajové podmienky očakávame harmonický priebek aj od funkcií vyjadrujúcich závislosť v_r od θ a v_θ od θ . Rozloženie hustoty objemových síl je ďalej symetrické voči osi $\theta = \pi/2$. Preto platia požiadavky na symetrie závislostí v_r od θ a v_θ od θ formulované v predchádzajúcej podkapitole. Priebek oboch funkcií je zobrazený na obr. 6.3. Tlakové a rýchlostné polia sú zobrazené na obr. 6.4. Grafické výstupy programu ukazujú očakávaný tvar riešenia.

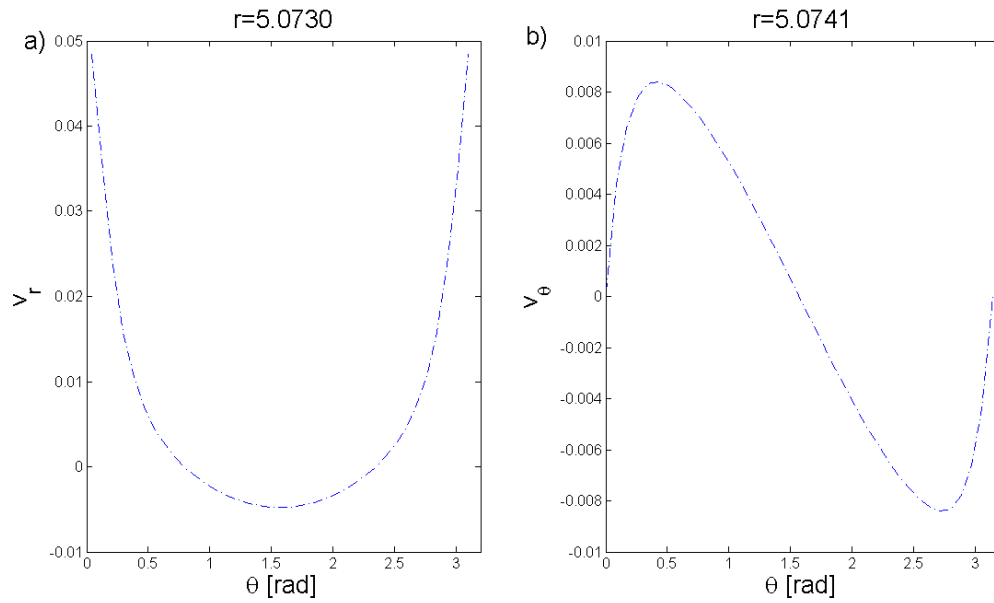


Obrázek 6.2: Tlakové a rýchlostné pole pri symetrickom bodovom rozložení ρ , výrez v oblasti osi $\theta = \pi/2$.

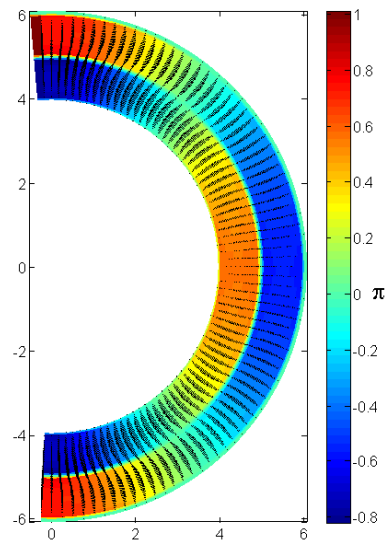
6.5 Porovnanie s metódou spektrálneho rozkladu

V tomto príklade zadávame na vnútornom okraji s polomerom $r_{in} = 4$ a vonkajšom okraji s polomerom $r_{out} = 6$ podmienky voľného preklzu a voľného toku v smere normály. Na oboch hraniciach sú normálová a dotyčnicová zložka vektora rýchlosti \vec{v} nulové. Hustota objemových síl má na každom poludníku priebeh $\rho = 3 \cos^2 \theta - 1$. Rozloženie hustoty objemových síl je spojité. Ďalej uvažujeme zložku vektora gravitačného zrýchlenia $g_r = -1$, viskozitu $\eta = 1$ v celej oblasti a takmer nestlačiteľnú kvapalinu s $1/K = 1 \cdot 10^{-6}$. Úlohu riešime na sieti s 33×33 uzlami.

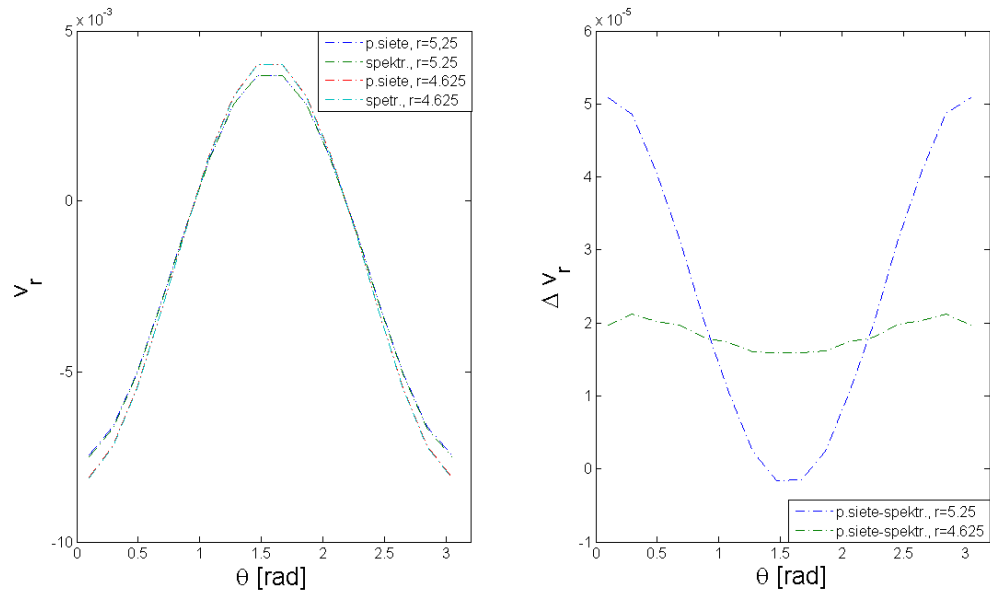
Riešenie spočítané naším programom porovnávame so spektrálnym riešením [1], ktoré pripravil Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc. Riešenia sa vzájomne líšia približne o 1%. Grafické porovnanie závislostí v_r od θ získaných naším programom a programom Doc. Čadeka ukazuje obr. 6.5. Tlakové a rýchlostné polia sú zobrazené na obr. 6.6.



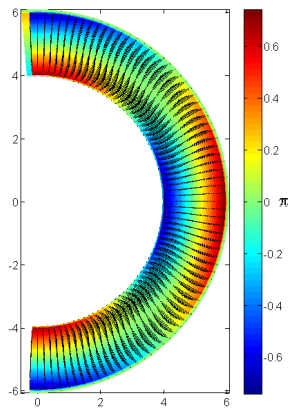
Obrázek 6.3: Priebeh komponent rýchlosti pri sinusovom rozložení ρ , **a)** závislosť v_r od θ v hĺbke 5,073, **b)** závislosť v_θ od θ v hĺbke 5,074.



Obrázek 6.4: Tlakové a rýchlostné pole pri sinusovom rozložení ρ .



Obrázek 6.5: Porovnanie so spektrálnym riešením, **a)** závislosti v_r od θ z metódy posunutých sietí a z metódy spektrálneho rozkladu v hĺbke 4,625 a 5,25, **b)** priebeh rozdielu riešení Δv_r v hĺbke 4,625 a 5,25.



Obrázek 6.6: Tlakové a rýchlostné pole pri spojitom rozložení ρ , sieť s 55×75 bodmi.

Kapitola 7

Záver

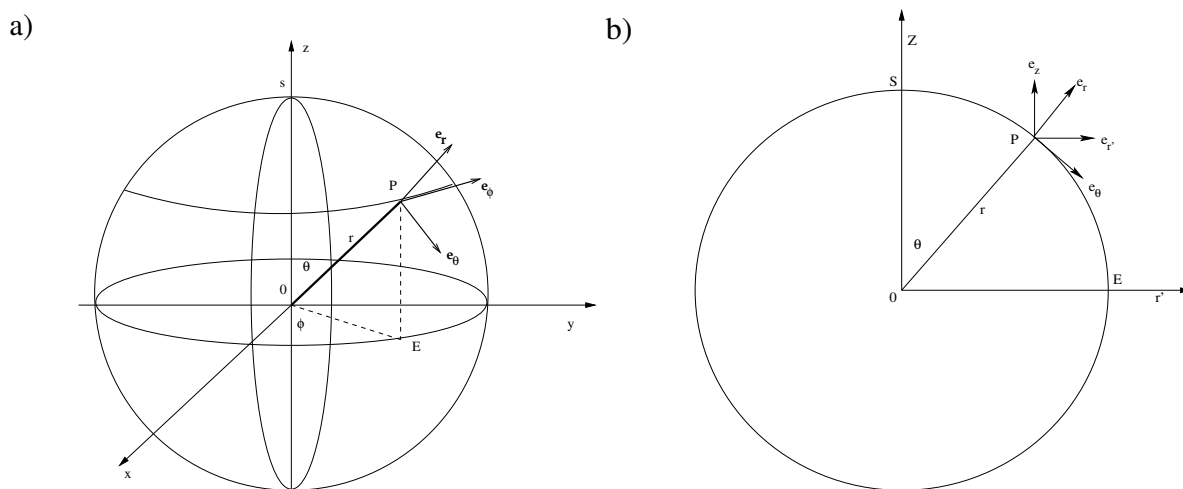
Rovnice tečenia v zemskom plášti sme vyjadrili v sférických súradniciach. Rovnice sme zúžili pre prípad axisymetrickej sférickej geometrie. Navrhli sme spôsob, akým obísť singularitu na póloch a formulovali sme hraničné podmienky na osi symetrie. Metódu posunutých sietí sme z kartézskej geometrie preniesli do geometrie sférickej. Vytvorili sme program v jazyku Matlab[®], ktorý príslušné rovnice tečenia rieši metódou posunutých sietí v sférickej geometrii. Program sme testovali na príkladoch s konštantnou viskozitou. Pre prípad spojitého rozloženia hustoty objemových síl sme riešenie porovnali so spektrálnym riešením, pričom obe riešenia boli vo veľmi dobrej zhode. Pre ďalšie overenie správnosti fungovania programu je potrebné program testovať na príkladoch s kombinovanou hraničnou podmienkou a nekonštantnou viskozitou. Tieto testy vyžadujú úpravy programu. Na základe vykonaných testov sa však zdá, že vylepšená verzia programu by sa mohla stať platným nástrojom modelovania tečenia v zemskom plášti.

Dodatek A

Operátor ∇ v sférických súradniciach

Apendix je spracovaný podľa [4].

A.1 Sféricke súradnice



Obrázek A.1: Zavedenie sférických súradníc.

Polohový vektor \vec{r} bodu P môžeme napísať v tvare

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad (\text{A.1.1})$$

kde r je veľkosť vektora \vec{r} . Potom platí

$$d\vec{r} = (dr)\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r). \quad (\text{A.1.2})$$

Z obrázku A.1b je zrejmé, že

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_{r'}, \quad (\text{A.1.3})$$

a

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_{r'}, \quad (\text{A.1.4})$$

kde $\vec{e}_{r'}$ je jednotkový vektor v smere r'

$$\vec{e}_{r'} = \cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r. \quad (\text{A.1.5})$$

Následne máme pre deriváciu \vec{e}_r rovnicu

$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta (d\theta) \vec{e}_{r'} + \sin \theta d\vec{e}_{r'} = \\ &= (d\theta) (-\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_{r'}) + \sin \theta (d\vec{e}_{r'}) = \\ &= (d\theta) \vec{e}_\theta + \sin \theta (d\vec{e}_{r'}) = (d\theta) \vec{e}_\theta + (d\varphi) \vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

V poslednom kroku sme využili vlastnosť, že $d\vec{e}_{r'} = (d\varphi) \vec{e}_\varphi$. Obdobným postupom sa dá ukázať platnosť nasledujúcich vzťahov

$$d\vec{e}_\theta = -(d\theta) \vec{e}_r + \cos \theta (d\varphi) \vec{e}_\varphi, \quad (\text{A.1.7})$$

$$d\vec{e}_\varphi = -\sin \theta (d\varphi) \vec{e}_r - \cos \theta (d\varphi) \vec{e}_\theta \quad (\text{A.1.8})$$

Dosadením rovnice (A.1.6) do (A.1.2) dostávame vzťah pre deriváciu polohového vektora

$$d\vec{r} = (dr)\vec{e}_r + r(d\theta)\vec{e}_\theta + r \sin \theta (d\varphi) \vec{e}_\varphi. \quad (\text{A.1.9})$$

A.2 Komponenty ∇f , $\nabla \vec{v}$, $\nabla \cdot \vec{v}$, $\nabla \cdot \vec{T}$ v sférických súradniciach

1. ∇f

Uvažujme skalárne pole $f = f(r, \theta, \varphi)$. Potom priamo z definície plynie, že

$$\begin{aligned} df &= (\nabla f) \cdot d\vec{r} = \\ &= [(\nabla f)_r \vec{e}_r + (\nabla f)_\theta \vec{e}_\theta + (\nabla f)_\varphi \vec{e}_\varphi] \cdot [(dr)\vec{e}_r + r(d\theta)\vec{e}_\theta + r \sin \theta (d\varphi) \vec{e}_\varphi]. \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

S využitím ortonormality báze môžeme písať

$$df = (\nabla f) \cdot d\vec{r} = (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r d\theta + (\nabla f)_\varphi r \sin \theta d\varphi. \quad (\text{A.2.2})$$

Rozpisom totálneho diferenciálu df na ľavej strane máme

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (\text{A.2.3})$$

Porovnaním rovníc (A.2.1) a (A.2.3) dostávame pre jednotlivé komponenty vektora ∇f vzťahy

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\text{A.2.4})$$

$$(\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\text{A.2.5})$$

$$(\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.2.6})$$

2. $\nabla \vec{v}$

Uvažujme rozklad vektora \vec{v}

$$\vec{v} = v_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + v_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + v_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi. \quad (\text{A.2.7})$$

Nech tenzor \mathbf{T} má vo sférických súradniciach tvar

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

a je definovaný vzťahom $\mathbf{T} := \nabla \vec{v}$. Potom platí

$$d\vec{v} = \mathbf{T} d\vec{r} = (dr) \mathbf{T} \vec{e}_r + r(d\theta) \mathbf{T} \vec{e}_\theta + r \sin \theta (d\varphi) \mathbf{T} \vec{e}_\varphi, \quad (\text{A.2.8})$$

resp. po rozpísaní pôsobenia tenzora

$$\begin{aligned} d\vec{v} = & \vec{e}_r (T_{rr} dr + T_{r\theta} r d\theta + T_{r\varphi} r \sin \theta d\varphi) + \\ & + \vec{e}_\theta (T_{\theta r} dr + T_{\theta\theta} r d\theta + T_{\theta\varphi} r \sin \theta d\varphi) + \\ & + \vec{e}_\varphi (T_{\varphi r} dr + T_{\varphi\theta} r d\theta + T_{\varphi\varphi} r \sin \theta d\varphi). \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

Z druhej strany máme pre deriváciu vektora \vec{v} s použitím rovníc (A.1.3) a (A.1.4) vzťah

$$\begin{aligned} d\vec{v} = & (dv_r) \vec{e}_r + v_r ((d\theta)\vec{e}_\theta + \sin\theta(d\varphi)\vec{e}_\varphi) + \\ & + (dv_\theta) \vec{e}_\theta + v_\theta (-(d\theta)\vec{e}_r + \cos\theta(d\varphi)\vec{e}_\varphi) + (dv_\varphi) \vec{e}_\varphi + \\ & + v_\varphi (-\sin\theta(d\varphi)\vec{e}_r - \cos\theta(d\varphi)\vec{e}_\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

ktorý rozpísaním totálnych diferenciálov $dv_r, dv_\theta, dv_\varphi$ a preusporiadaním členov prejde na tvar

$$\begin{aligned} d\vec{v} = & \vec{e}_r \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} dr + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) d\theta + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \sin\theta \right) d\varphi \right] + \\ & + \vec{e}_\theta \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} dr + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) d\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi \cos\theta \right) d\varphi \right] + \\ & + \vec{e}_\varphi \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} d\theta + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \right) d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2.11})$$

Porovnaním rovníc (A.2.9) a (A.2.11) určíme jednotlivé komponenty tenzora \mathbf{T}

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \sin\theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi \cos\theta \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot\theta \end{bmatrix}.$$

3. $\nabla \cdot \vec{v}$

Skalár $\nabla \cdot \vec{v}$ určíme s pomocou znalosti komponent $\nabla \vec{v}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{tr}(\nabla \vec{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{v_\theta}{\theta} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \cot\theta. \quad (\text{A.2.12})$$

Prerovnaním derivácií môžeme rovnicu (A.2.12) písať v tvare

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.2.13})$$

4. $\nabla \cdot \mathbf{T}$

Pre stanovenie komponent vektora $\nabla \cdot \mathbf{T}$ využijeme vzťah

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{e}_r = \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \vec{e}_r)}_I - \underbrace{\text{tr}((\nabla \vec{e}_r) \mathbf{T}^T)}_{II} \quad (\text{A.2.14})$$

Výraz označovaný ako I je divergencia vektora $\mathbf{T}^T \vec{e}_r$. Podľa bodu 2. teda platí

$$I = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.2.15})$$

Výraz II obsahuje tenzor $\nabla \vec{e}_r$, ktorý vyhodnotíme podľa bodu 1.

$$\nabla \vec{e}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}.$$

Pre komponentu vektora $\nabla \cdot \mathbf{T}$ v smere \vec{e}_r teda platí

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{T_{\varphi\varphi} + T_{\theta\theta}}{r}. \quad (\text{A.2.17})$$

Obdobným postupom, kde uvažujeme konkrétne tvary jednotlivých bázových vektorov $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ dostaneme aj ostatné dve komponenty vektora $\nabla \cdot \mathbf{T}$.

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{e}_\theta = \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \vec{e}_\theta)}_I - \underbrace{\text{tr}((\nabla \vec{e}_\theta) \mathbf{T}^T)}_{II}. \quad (\text{A.2.18})$$

$$I = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.2.19})$$

$$\nabla \vec{e}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cot \theta}{r} \end{bmatrix}.$$

Komponenta vektora $\nabla \cdot \mathbf{T}$ v smere \vec{e}_θ je

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\varphi\varphi} \cot \theta}{r}. \quad (\text{A.2.20})$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{e}_\varphi = \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{T}^T \vec{e}_\varphi)}_I - \underbrace{\text{tr}((\nabla \vec{e}_\varphi) \mathbf{T}^T)}_{II}. \quad (\text{A.2.21})$$

$$I = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{\varphi r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\varphi\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.2.22})$$

$$\nabla \vec{e}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \cot \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Komponenta vektora $\nabla \cdot \mathbf{T}$ v smere \vec{e}_φ je

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{\varphi r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\varphi \theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\varphi r} + T_{\theta r} \cot \theta}{r}. \quad (\text{A.2.23})$$

Dodatek B

Obsah priloženého CD

Na priloženom CD sa nachádzajú úplné zdrojové kódy v jazyku Matlab[®] nášeho programu na riešenie rovníc tečenia v zemskom plášti metódou posunutých sietí v sférickej geometrii. Obsah priloženého CD zobrazuje tab.B.1:

Adresár	Význam funkcií
BC	Okrajové podmienky
Index	Indexačné funkcie
LemyRohy	Ošetrovanie okrajov
Pomocne	Pomocné funkcie
RHO	Zadanie rozloženia ρ
RKM1M2	Pohybové rovnice, rovnica kontinuity
Run	Spúšťací skript
Zobrazovanie	Triedenia a vizualizácia výsledkov

Tabulka B.1: Obsah priloženého CD.

Literatura

- [1] ČADEK, O. Spherical tensor approach to the solution of mantle stress problem. *Studia geophys. geod.*, 33 (1989), 177–197.
- [2] BĚHOUNKOVÁ., M. *Global and regional scale modeling of dynamic processes in the Earth's mantle*. PhD thesis, Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, 2007.
- [3] GERYA, T. V., AND YUEN, D. A. Characteristics-based marker-in-cell method with conservative finite-differences schemes for modeling geological flows with strongly variable transport properties. *Phys. Earth Planet. Interiors*, 140 (2003), 293–318.
- [4] LAI, M. W., RUBIN, D., AND KREMPL, E. *Introduction to continuum mechanics*, 3rd ed. Butterworth-Heinemann, Woburn, Massachusetts, 1993, kap. 2D3, pp. 63–67.