

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Vrba
Základy teorie vln tsunami
Katedra geofyziky MFF UK
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich Novotný, CSc.
Studijní program: Geofyzika
2008

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne

Jan Vrba

Obsah

1 Úvod.....	4
1.1 Místo vzniku tsunami.....	4
1.2 Příčiny vzniku tsunami.....	4
1.3 Základní vlastnosti tsunami.....	5
1.4 Výstražné systémy.....	5
1.5 Katastrofické tsunami v dějinách.....	6
2 Příklady velkých tsunami....	8
2.1 Lisabon 1755.....	8
2.2 Sumatra 2004.....	9
3 Základní rovnice hydrodynamiky... ..	13
3.1 Rovnice kontinuity	13
3.2 Eulerova rovnice.....	14
3.3 Bernoulliho rovnice.....	17
3.4 Nestlačitelná kapalina.....	18
3.5 Nevířivé proudění nestlačitelné kapaliny.....	19
4 Vlny na povrchu dokonalé nestlačitelné kapaliny.....	20
4.1 Základní rovnice.....	20
4.2 Gravitační vlny.....	22
5 Závislost mořské hloubky a amplitudy vlny.....	29
6 Závěr.....	31

Název práce: Základy teorie vln tsunami

Autor: Jan Vrba

Katedra (ústav): Katedra geofyziky MFF UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

e-mail vedoucího: on@karel.troja.mff.cuni.cz

Tato práce je pojata jako rešerše o vlnách tsunami. Nezabíhá do odborného pojednání či modelování, měla by čtenáři se základy matematické analýzy objasnit základy o vzniku a šíření těchto vln. V úvodní části jsou popsána místa a příčiny vzniku tsunami, jejich vlastnosti a výčet katastrofických tsunami počínaje rokem 1775 (Lisabon) a konče zemětřesením a následnými tsunami v roce 2004 u Sumatry.

V kapitole 2 jsou blíže popsány katastrofické tsunami z roku 1775 (Lisabon), neboť šlo o pravděpodobně největší tsunami v Evropě a tsunami vzniklé zemětřesením v blízkosti Sumatry v roce 2004, protože šlo o jednu z největších katastrof v novodobých dějinách.

Kapitola 3 se zabývá odvozením základních rovnic hydrodynamiky. Jsou to rovnice kontinuity, Eulerova rovnice, Bernoulliho rovnice a Laplaceova rovnice pro proudění nevířivě nestlačitelné kapaliny. Tyto rovnice slouží jako výchozí body pro kapitolu 4. V kapitole 4 jsou nejdříve ustanoveny hraniční podmínky, odpovídající reálnému případu vln na hladině, a podle nich jsou následně upraveny základní rovnice hydrodynamiky. Druhá část se již věnuje gravitačním vlnám, mezi něž patří i vlny tsunami. Zde jsou odvozeny vztahy pro rychlost v závislosti na hloubce vody a periodě zdroje (tedy periodě otřesů zemětřesení). Závěrečná 5. kapitola stručně zkoumá závislost mezi změnou hloubky vody a amplitudou vlny a také mezi amplitudou a vzdáleností od zdroje.

Klíčová slova: tsunami, rovnice hydrodynamiky, vlny na vodě, disperzní rovnice, amplitudy tsunami

Title: Foundations of the theory of tsunami waves

Author: Jan Vrba

Department: Department of Geophysics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague

Supervisor: Doc. RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

Supervisor's e-mail address: on@karel.troja.mff.cuni.cz

This work represents a review of tsunami waves. It does not contain scientific details or modelling, but the reader with basic knowledge of mathematical analysis should obtain information about the origin and propagation of these waves. In the first part of the text, the places and causes of tsunami generation are described, as well as its characteristics and examples of catastrophic tsunamis starting in 1775 (Lisbon) and finishing with the earthquake and subsequent tsunami in 2004 near Sumatra.

Chapter 2 describes two catastrophic tsunamis in details: 1) the tsunami of 1775 (Lisbon), because it was probably the biggest tsunami in Europe in human history; 2) tsunami induced by the earthquake near Sumatra in 2004, because it was one of the recent biggest catastrophes. Chapter 3 deals with derivation of the basic hydrodynamics equations, in particular the equation of continuity, Euler's and Bernoulli's equations, and the Laplace equation for motion of the irrotational incompressible liquid. These equations are starting points for chapter 4. The latter chapter begins with formulation of the boundary conditions that correspond to the problem of water surface waves. In accordance with these conditions, the basic hydrodynamic equations are then modified. The second part of this chapter deals with gravity waves, which include also the tsunami waves. The relations for the velocity as a function of water depth and period of the source (earthquake) are derived here. Finally, in chapter 5 the dependences of amplitudes on changes in sea depth and on the distance from the origin are briefly analyzed.

Keywords: tsunami, hydrodynamic equations, water waves, dispersion equation, amplitudes of tsunami

1.Úvod

Mnohá zalidněná pobřeží zejména v Chile, Peru, Japonsku a na Havaji byla opakovaně devastována velkými vlnami o výšce až dvaceti metrů. Tyto vlny byly v minulosti obvykle nazývány přílivovými vlnami ačkoli s přílivem neměly nic společného. Ve většině případů je vznik těchto vln spojen se silným zemětřesením.

V Jižní Americe vznikl pro tyto vlny název *maremoto*, avšak japonský název *cunami*¹ (anglický přepis *tsunami*) se stal mezinárodním názvem pro vlny způsobené zemětřesením. *Cunami* v japonštině znamená „vlna v přístavu“.

1.1 Místo vzniku tsunami

Největší tsunami, zvláště v Tichém oceánu, vznikají v některém podmořském příkopu jako Atacama (Chile), Tuscarora (Japonsko), Mindanao a Aleuty. Související zemětřesení mají obvykle epicentra blízko těchto příkopů směrem k pevnině.

Přinejmenším dvě velká zemětřesení s epicentrem na pevnině byla doprovázena tsunami u nejbližšího pobřeží. Jedná se o zemětřesení v Chile roku 1922 a v Turecku v roce 1939. Velké zemětřesení 3. června 1932 v Mexiku, které způsobilo velké tsunami, mělo rovněž s velkou pravděpodobností epicentrum na pevnině.

1.2 Příčiny vzniku tsunami

Příčiny vzniku tsunami nejsou plně vysvětleny. Ne všechny tsunami jsou způsobeny zemětřesením, a také ne všechny místní vlny nezbytně souvisejí s tsunami. Vznik tsunami se nejčastěji vysvětluje pohybem desek zemské kůry pod hladinou moře. Jsou známy případy, kdy se během velkých zemětřesení desky zemské kůry vertikálně přemístily až o 1 metr a některé z nich ovlivnily pohyb desek do vzdálenosti stovek kilometrů. Lze si představit že k něčemu podobnému dochází i na mořském dně. Pohybem desky se rozvlní vodní sloupec nad deskou a tsunami se pak šíří na všechny strany. Avšak ne každé podmořské zemětřesení musí nutně vyvolat tsunami.

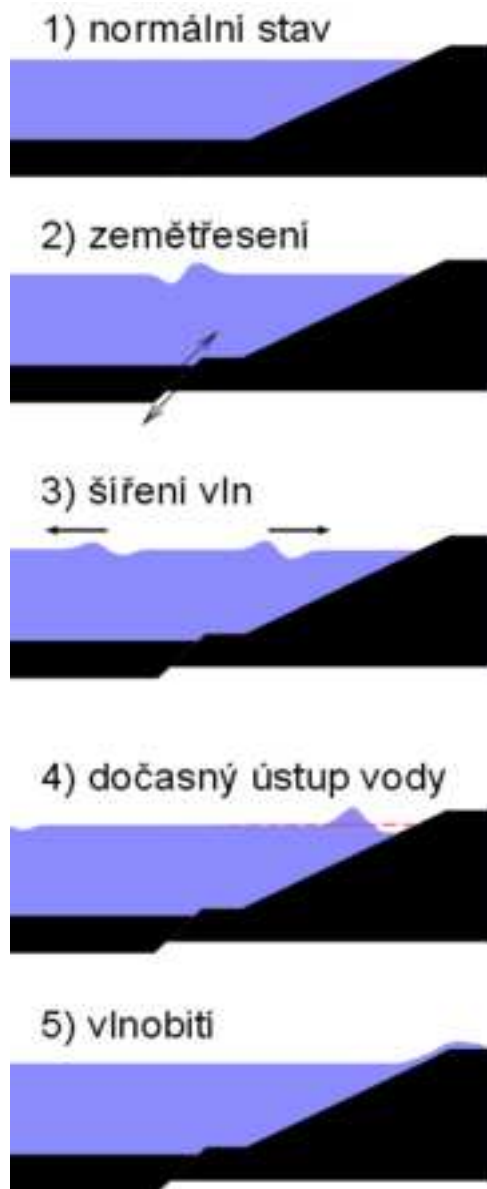
Tsunami mohou rovněž vzniknout velkým sesuvem půdy jak pod mořskou hladinou tak s pobřeží do moře. Tento sesuv může, ale také nemusí, být iniciován zemětřesením. Vznik tsunami sesuvem půdy pomáhá vysvětlit souvislost se zemětřesením s epicentrem na pevnině a tsunami vzniklými s delším časovým odstupem od zemětřesení.

Existuje řada dalších více nebo méně spekulativních vysvětlení vzniku tsunami. Pro zajímavost uvádím, že Charles F. Richter z Kalifornského institutu technologie se domníval,

¹ Japonština nemá rody; po konzultaci s panem Hideo Okuyama a panem Květoslavem Krejčím budu považovat, že *cunami* je v češtině ženského rodu.

že tsunami by mohla rovněž vzniknout jako rezonance vody v hlubokých mořských příkopech s mechanismem příbuzným mechanismu vyvolávající seiches² [13].

1.3 Základní vlastnosti tsunami



Energie tsunami závisí na její rychlosti a čtverci výšky (některé z uváděných vlastností a příslušné vzorce budou odvozeny v dalších kapitolách). Vlnová délka tsunami je velká, v řádu od padesáti do několika set kilometrů. Vlna s tak dlouhou vlnovou délkou se chová i na širém oceánu jako vlna na mělké vodě. Protože rychlost vlny je obecně v mělkých vodách určena vztahem \sqrt{gd} , kde g je tíhové zrychlení a d hloubka, tsunami získá na hlubokém moři rychlost až 700 km h^{-1} . U pobřeží se vlna výrazně zpomalí a její amplituda výrazně vzroste. Zatímco na hlubokém moři je tsunami těžko pozorovatelná (obvyklá výška je v cm a desítkách cm), u pobřeží nahromaděná kinetická energie zvedá vlnu až do výšky 30 metrů a více. Díky velmi dlouhé vlnové délce může tsunami putovat tisíce kilometrů bez větších ztrát energie, jelikož nepodléhá vlnové interferenci [7].

Příchod tsunami je doprovázen dočasným ústupem vody. Čelo vlny je pozorovatelné z břehu, její výška je předzvěstí toho, co přijde během následujících minut. I když vlna na pobřeží zpomalí až stokrát, má stále vlnovou délku v řádu kilometrů. Během několika minut hladina moře stoupne o desítky metrů a po několika minutách zase opadne. Ohromné množství proudící vody páchá na pobřeží rozsáhlé škody.

Obr.1 Průběh příchodu vln cunami k pobřeží.
(wikipedia.cz)

1.4 Výstražné systémy

Mnoho měst na pobřeží Tichého oceánu, hlavně v Japonsku, USA a Kanadě, má výstražný systém a připravené evakuační plány pro případ tsunami. Tsunami mohou být předpovězeny seismologickými observatořemi rozmístěnými po celém světě a vývoj a postup

² Seiches je název pro stacionární vlny vyvolané zemětřesením.

tsunami je sledován satelity z oběžné dráhy. Ačkoli tsunami je zničující pohroma, na přechod přes Tichý oceán z Japonska na západní pobřeží USA by potřebovala okolo 18 hodin, takže obyvatelstvo může být varováno s dostatečným předstihem, pokud je tsunami zaznamenáno a včas jsou varovány příslušné úřady.

Jeden z varovných systémů je projekt CREST (*Consolidated Reporting of Earthquakes and Tsunamis*) na západním pobřeží Severní Ameriky a na Havaji. Náhlá tsunami ale nemůže být předpovězena žádným podobným systémem.

1.5 Katastrofické tsunami v dějinách

1. listopadu roku 1755 okolo 9:30 ráno, asi dvacet minut po prvním otřesu půdy, vlna tsunami zasáhla portugalské pobřeží. Výška vlny se pohybovala v různých částech pobřeží od 6 m do 15 m. Tsunami se šířila z centra vzniku na všechny strany a na pobřeží Madeiry dosáhla výšky 4,5 m. Tsunami způsobila problémy v anglických a francouzských přístavech a byla pozorována dokonce až v Holandsku [2].

8. srpna 1868 tsunami, která následovala zemětřesení, zdevastovala město Arica v Peru (dnešní Chile), pobřeží Havaje, a vyvolala problémy v Japonsku a na Novém Zélandě. Největší vlna přišla do přístavu Arica čtyři hodiny po zemětřesení a zcela zdemolovala přístav a město. Tsunami dosáhla výšky téměř 15 m.

9. května 1877 nastala podobná situace, kdy ničivé zemětřesení postihlo peruánské město Iquique (dnešní Chile). Na vzdálených pobřežích Japonska tsunami dosáhla výšky více než 6 m, v Austrálii a na Novém Zélandě tsunami dosáhla výšky rovněž 6 m.

V roce 1883 explodoval sopečný ostrov Krakatoa v Indonésii. Série velkých tsunami o výšce přes 40 m (u pobřeží) se šířila celým světem. Tsunami byly pozorovány v Indickém, Tichém i Atlantickém oceánu. Pozorovatelné byly dokonce i v průlivu La Manche.

15. června 1896 zasáhla japonský ostrov Honšú obrovská tsunami. Rybáři, kteří byli pouhých 30 km od pobřeží, ji vůbec nezaznamenali, ale na ostrově zabila 28 tisíc lidí a zničila 275 km pobřeží.

V roce 1908 zasáhlo Itálii, v oblasti Messinského průlivu, zemětřesení o síle 7,5 stupně Richterovy škály. Zemětřesení a desetimetrová vlna tsunami za sebou zanechaly přes 75 000 obětí. Epicentrum se nacházelo v Messinské úžině. Messinská úžina je 42 km dlouhým průlivem, který spojuje Tyrhenské a Jonské moře a odděluje ostrov Sicílii od Kalábrie na italské pevnině. V nejužším místě je pouze 3,5 km široká a 115 m hluboká, v jiných částech dosahuje hloubek až 1240 m. Vrty, které byly prováděny v Messinském průlivu v souvislosti s připravovaným mostem mezi Sicílií a pevninou, bylo zjištěno, že pod úžinou se nacházejí 3 zlomy zemské kůry [14].

2. března 1933 vzniklo zemětřesení východně od pobřeží hlavního japonského ostrova Honšú. Zemětřesení bylo středně silné, avšak tsunami byla zničující. Výška vlny přesáhla 21 metrů.

1. dubna 1946 zemětřesení střední síly o epicentru blízko Aleutského příkopu vyvolalo obrovskou vlnu tsunami o výšce 30 m. Tsunami zničila pevně stavěný čtyřicetimetrový maják na ostrově Unikal, u Havajských ostrovů se výška tsunami pohybovala od 9 do 15 m. Více než 150 tisíc lidí přišlo o život a téměř 500 domů bylo zcela zničeno.

Zemětřesení z 12. července 1993 o síle 7,8 stupně Richterovy škály vyvolalo tsunami, která na malém japonském ostrově Okuširi poblíž ostrova Hokkaido zabila přes 200 lidí a stovky dalších zranila.

Ráno 26. prosince 2004 vzniklo gigantické zemětřesení v oblasti asi 160 km západně od ostrova Sumatra. Síla zemětřesení je uváděna od 8,9 stupně Richterovy škály až do 9,5 stupně Richterovy škály. Následná vlna tsunami zasáhla pobřeží Thajska, Myanmaru, Malajsie a Indonésie, Srí Lanky, Indie, Bangladéše a Maledív. Později tsunami zasáhla i další ostrovy v Indickém oceánu (Madagaskar, Seychely, Réunion, Mauritius) a také východní pobřeží Afriky (Somálsko, Tanzanie, Keňa).

2. Příklady velkých tsunami

2.1 Lisabon 1755

Uprostřed 18. století byl Lisabon, hlavní město Portugalska, jedním z nejhezčích a nejbohatších měst v Evropě. Lisabon té doby byl čtvrtým největším městem v Evropě za Londýnem, Paříží a Neapolí. Lisabonský přístav ležící na celé řadě námořních cest se stal zdrojem bohatství města. Výhodná poloha a příjemné podnebí vytvořilo z Lisabonu v té době jedno z nejlepších míst pro život. Lisabonští námořníci hráli významnou roli při kolonizaci. Díky kolonizaci a úspěšnému obchodu si Lisabon vytvářel dostatek prostředků na rozvoj města a stavbu pozoruhodných budov [2].

Lisabonské zemětřesení nastalo 1. listopadu ve svátek Všech svatých roku 1755 a je považováno za jedno z nejsilnějších zemětřesení, které kdy bylo v Evropě. Zemětřesení začalo okolo 9:30 místního času, epicentrum leželo v Atlantickém oceánu v mělké vodě u Mysu Sv. Vincenta zhruba 220 km jihozápadně od Lisabonu. Polohou epicentra zemětřesení byly splněny všechny podmínky pro jeho devastující účinky. Co nezničilo zemětřesení, zničila tsunami nebo následný požár. Obrovský požár, který zničil velkou část Lisabonu (mnoho staveb bylo dřevěných), vznikl od převrácených svíček v kostelech a od ohňů pobořených topidel v lidských obydlích.

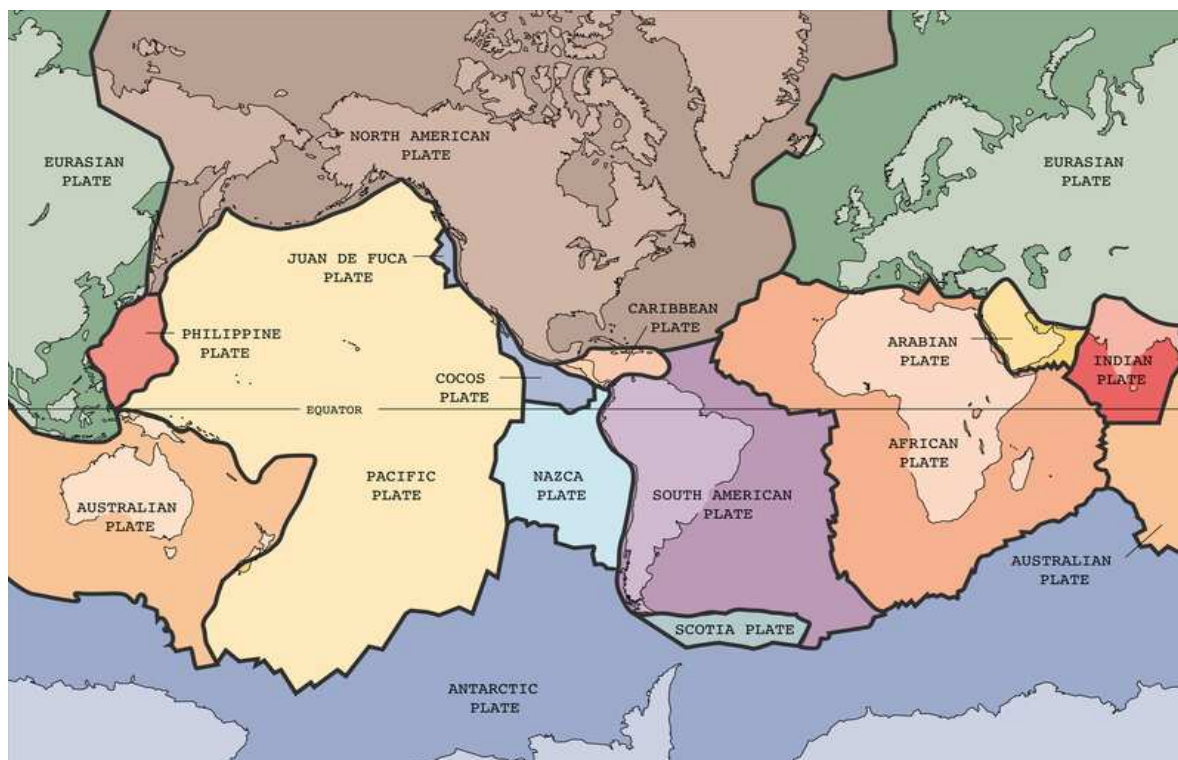
Zemětřesení bylo doprovázeno obrovskou tsunami, která způsobila velké škody na pobřeží Portugalska, jihozápadního Španělska a západního Maroka.

O síle zemětřesení svědčí záznamy o kmitání zavěšených předmětů ve velkých vzdálenostech od epicentra a pozorování seiche na jezerech ve vzdálených zemích jako je Finsko, severní Afrika a část Severní Ameriky. Všechny tyto jevy ukazovaly, že se jednalo o velice silné zemětřesení s vysokým magnitudem, podle současných stupnic mezi osmým a devátým stupněm Richterovy škály.

Zemětřesení předcházely události, které kdyby byly pozorovány dnes, by pravděpodobně měly velkou šanci zemětřesení předpovědět. V některých částech Portugalska a Španělska před zemětřesením tekla kalná voda. V některých pramenech v Portugalsku a ve Španělsku opadla voda, snížil se tok vody v pramenech a kašnách. Bylo pozorováno neobvyklé chování volně žijících i domácích živočichů. V důsledku zemětřesení zemřelo v Lisabonu okolo 10 tisíc lidí a v celém Portugalsku pak na 30 tisíc lidí. Některé prameny dokonce uvádějí ztráty na životech až 60 tisíc.

Poslední týdny roku 1755 provázelo západní Evropu velké množství seismických aktivit. Silné zemětřesení 5. prosince 1755 ve Švýcarsku a v okolí Rýna dosáhlo v epicentrální oblasti makroseismické intenzity 7. stupně. Poznamenejme, že makroseismická stupnice popisuje účinky zemětřesení v místě pozorování, s rostoucí epicentrální vzdáleností tedy makroseismická intenzita obecně klesá. Naproti tomu Richterova stupnice charakterizuje celkovou energii uvolněnou v zemětřesném ohnisku, popisuje tedy jistou absolutní velikost zemětřesení.

Dnes již víme, že epicentrum Lisabonského zemětřesení u Sv. Vincenta je na rozhraní dvou největších litosférických desek euroasijské a africké (viz obr. 2).



Obr.2:Litosférické desky (wikipedia.cz)

2.2 Sumatra 2004

Toto zemětřesení vzniklo v Indickém oceánu v neděli 26.12.2004 krátce před osmou hodinou místního času o síle 8,9 (někdy se uvádí 9,1 až 9,5) RichtEROVY stupnice. Hypocentrum se nacházelo v oblasti západního pobřeží severní Sumatry v hloubce 30 km. Následná vlna tsunami, která zasáhla pobřeží Sumatry, Thajska, Nicobarských a Adamanských ostrovů, celé pobřeží Bengálského zálivu, ostrov Srí Lanku, Maledivy a s několikahodinovým zpožděním také východní pobřeží Afriky a Madagaskaru, zahubila více než 230 tisíc obyvatel. Po hlavním otřesu došlo v celé oblasti na sever k dalším desítkám zemětřesení s intenzitou větší než 5 stupňů RichtEROVY stupnice. Tyto otřesy však již nevyvolaly ničivou vlnu tsunami [15].

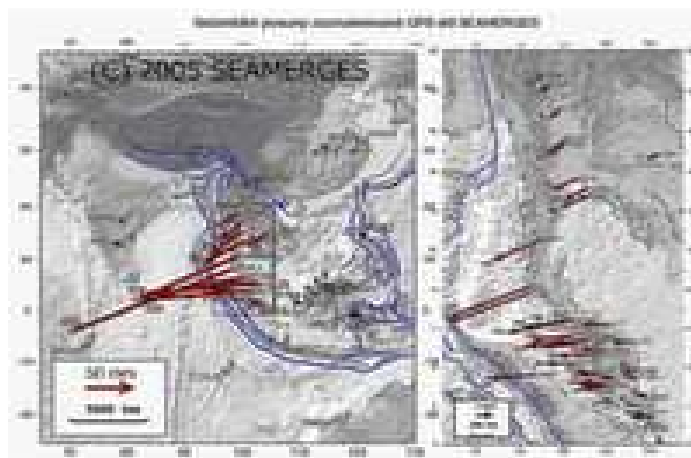


Obr.3: Hlavní státy postižené účinky tsunami dne 26.12. 2004 (wikipedia.cz). Kruhové izočáry se středy v epicentru znázorňují směr šíření vln.

Hlavní otřes a následné otřesy vznikly na kontaktu tří tektonických desek: australské, indické a sundské. Podle tektonického modelu došlo k pohybu desek podél zlomu v oblasti Sundského příkopu (západně od severní Sumatry). Zde dochází k subdukci indické tektonické desky pod sundskou. Maximální vertikální pohyb při hlavním otřesu byl -2 až +5 m a maximální horizontální pohyb byl 11 m. Tsunami, která zasáhla pobřeží Indonésie a jižní Asie, dosáhla v oblasti Sumatry, Nicobarských a Andamanských ostrovů výšky až 17 metrů. Pobřeží Thajska tsunami zasáhla asi po padesáti minutách, Srí Lanku po dvou hodinách a Indii asi za 2-3 hodiny.

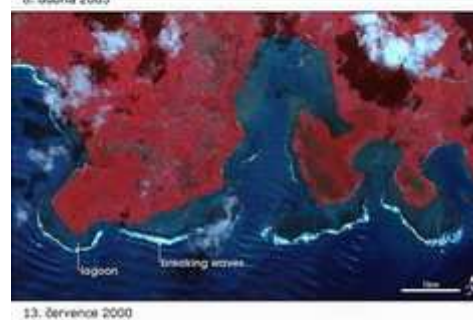
Vznik takto velké tsunami byl způsoben silou zemětřesení a také mechanismem otřesu, kdy došlo k vertikálnímu posunu tektonických desek. To vedlo ke vzniku několik metrů vysoké vlny. Na volné mořské hladině nezpůsobila žádné škody, ale při jejím příchodu k pevninskému okraji došlo k ústupu vodní hladiny a poté k příchodu vlny vysoké až 17 m.

Vědci z francouzského Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) a Ecole Normale Supérieure (ENS) odhalili trhlinu na mořském dně dlouhou přinejmenším 1000 km. Trhlina vznikla během zemětřesení. Vědci pod vedením Christopa Vignyho vyhodnotili údaje z 60 míst v jihovýchodní Asii monitorovaných satelitním navigačním systémem GPS s následujícími závěry: 400 km od epicentra zemětřesení došlo k posunu o 10 i více centimetrů. Ještě ve vzdálenosti kolem 3000 km jsou jasně patrné malé ale nebezpečné seismické skoky. Ohnisko deformace bylo lokalizováno zhruba 200 km severně od epicentra [5, 6].



Obr.4: Šipky ukazují posun litosférické desky (gnosis9.net)

Druhý otřes o síle 8,7 RichtEROVY stupnice byl zaznamenán 28. března 2005. Podle expertů se tím podstatně zvýšilo napětí ve zlomových liniích, takže další silné zemětřesení je nevyhnutelné. Mořské dno v oblasti je teď mnohem náchylnější ke vzniku trhlin a následných tsunami.



Obr.5 a 6:

Popis k obrázkům: Vlny tsunami vyvolané katastrofickým zemětřesením 26. prosince 2004 nejničivěji zasáhly severozápadní pobřeží indonéské Sumatry. Obě fotografie vlevo zachycují stejné místo - Gleebruk, městečko situované asi 50 kilometrů od Banda Aceh, správního střediska stejnojmenné provincie. Jak vidno z prvního snímku, mohutná síla vody strhla budovy, stromy, cesty, mosty, pláže a dokonce i ornou půdu. Zkáze unikly pouze zalesněné kopce v okolí. První z dvojice snímků vpravo dokumentuje změnu

terénu (zdvih) u jižního pobřeží indonéského ostrova Nias (125 kilometrů západně od Sumatry) po zemětřesení z 28. března 2005. Pobřežní korálové útesy jsou na snímku z 6. dubna 2005 odkryté. Pro srovnání je připojen i záběr z 13. července 2000. (gnosis9.net)

3. Základní rovnice hydrodynamiky

3.1 Rovnice kontinuity

Studium pohybu kapalin a plynů je obsahem *hydrodynamiky*. Protože jevy, uvažované v hydrodynamice, mají makroskopický charakter, proto se v hydrodynamice tekutina (tj. kapalina nebo plyn) považuje za kontinuum. To znamená, že libovolně malý objem tekutiny se stále chápe jako natolik velký, že ještě obsahuje velký počet molekul. Podle této představy, když budeme mluvit o nekonečně malých elementech objemu, pak tím vždy budeme rozumět „fyzikálně“ nekonečně malý objem, tj. objem, který je dostatečně malý ve srovnání s objemem tělesa, ale velký ve srovnání s mezimolekulárními vzdálenostmi. V tomto smyslu je třeba v hydrodynamice chápat výrazy „kapalná částice“ a „bod kapaliny“. Jestliže se například mluví o posunutí nějaké částice kapaliny, pak se tím rozumí nikoliv posunutí jednotlivé molekuly, ale posunutí celého elementu objemu, obsahujícího mnoho molekul, ale považovaného v hydrodynamice za bod [10].

Matematický popis stavu pohybující se kapaliny se uskutečňuje pomocí funkcí, určujících rozložení rychlosti kapaliny $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ a ještě jakýchkoliv dvou termodynamických veličin, například tlaku $p(x, y, z, t)$ a hustoty $\rho(x, y, z, t)$. Jak je známo, všechny termodynamické veličiny se určují z hodnot libovolných dvou z nich pomocí stavové rovnice látky. Proto zadání pěti veličin: tří složek rychlosti \mathbf{v} , tlaku p a hustoty ρ , plně popisuje stav pohybující se kapaliny.

Všechny tyto veličiny jsou v obecném případě funkcemi souřadnic x, y, z a času t . Zdůrazněme, že $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ je rychlost kapaliny v každém daném bodě x, y, z prostoru a v časovém okamžiku t , tj. vztahuje se k určitým bodům prostoru, ale nikoliv k určitým částicím kapaliny, které se přemísťují s časem v prostoru. Totéž platí o veličinách ρ a p .

Začneme odvozování základních hydrodynamických rovnic odvozením rovnice, která vyjadřuje zákon zachování hmoty v hydrodynamice.

Uvažujme nějaký objem prostoru V_0 . Množství (hmotnost) kapaliny v tomto objemu je $\int \rho dV$, kde ρ je hustota kapaliny a integrace se provádí přes objem V_0 . Elementem dS plochy, která ohraničuje uvažovaný objem, za jednotku času protéká množství kapaliny $\rho \mathbf{v} dS$. Vektor dS je v absolutní hodnotě roven velikosti elementu plochy a má směr její vnější normály. Tehdy je $\rho \mathbf{v} dS$ kladné, pokud kapalina vytéká z objemu, a záporné, pokud kapalina do něho vtéká. Celkové množství kapaliny, vytékající z objemu V_0 za jednotku času, je tedy

$$\oint \rho \mathbf{v} dS,$$

kde se integrace provádí přes celý uzavřený povrch, obklopující uvažovaný objem.

Na druhé straně se zmenšení množství kapaliny v objemu V_0 může zapsat ve tvaru

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Položíme-li rovnost mezi oběma výrazy, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} dS. \quad (1)$$

Integrál přes plochu vyjádříme s využitím Gaussovy věty pomocí integrálu přes objem (viz podrobnosti o Gaussově větě na konci tohoto paragrafu):

$$\oint \rho \mathbf{v} dS = \int \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV.$$

Odtud

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0$$

Zde jsme mohli záměnu derivace s integrálem bez problémů provést, jelikož předpokládáme, že hustota ρ je spojitou funkcí souřadnic a času. Protože poslední rovnice musí platit pro libovolný objem, musí se nule rovnat integrand, tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Tento vztah se nazývá *rovnice kontinuity*.

Použitím vzorce pro divergenci součinu lze rovnici (2) zapsat také ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (3)$$

Vektor

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (4)$$

se nazývá *hustotou toku kapaliny*. Jeho směr souhlasí se směrem proudění kapaliny a absolutní hodnota určuje množství kapaliny, která za jednotku času protéká jednotkou plochy proloženou kolmo k rychlosti.

Závěrem tohoto paragrafu uveďme obecné znění Gaussovy věty (Gaussovy-Ostrogradského věty) s příslušnými předpoklady [12].

Nechť funkce

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z) \quad \text{a} \quad \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}$$

jsou spojitě v uzavřeném tělese \bar{V} s orientovanou hranicí S , která je tvořena konečným počtem jednoduchých konečných po částech hladkých ploch (toto těleso nemusí být nutně jednoduše souvislé). Vnější normála \mathbf{n} , příslušná vnější straně hranice S , nechť má obvyklý směr vně tělesa. Pak

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P dy dz + Q dz dx + R dx dy),$$

nebo označíme-li $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ směrové kosiny (orientované) vnější normály,

$$\begin{matrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{matrix} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Budeme-li považovat funkce P , Q , R za složky nějakého vektoru $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ a zavedeme vektor $d\mathbf{S} = (dS \cos \alpha, dS \cos \beta, dS \cos \gamma)$, lze předchozí větu zapsat jednoduchým způsobem v symbolice vektorové analýzy ($dV = dx dy dz$):

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Fyzikální význam této rovnice je v tom, že tok vektoru \mathbf{A} uzavřenou plochou je roven objemovému integrálu z divergence tohoto vektoru.

V této kapitole předpokládáme, že všechny předpoklady pro užití Gaussovy věty jsou splněny.

3.2 Eulerova rovnice

Vydělme v kapalině nějaký objem V . Celková plošná síla, působící na vydělený objem ze strany okolní kapaliny, je rovna integrálu

$$\mathbf{F} = - \iint_S p \, d\mathbf{S},$$

kde p je tlak v kapalině a integrace se provádí přes povrch uvažovaného objemu ($d\mathbf{S}$ míří ve směru vnější normály, tj. v opačném směru než vnější tlak, proto bereme integrál se záporným znaménkem). Převedením plošného integrálu na integrál objemový dostáváme:

$$\iint_S p \, d\mathbf{S} = \iiint_V \text{grad } p \, dV.$$

V této vektorové rovnici jsme opakovaně použili Gaussovu větu, a to následujícím způsobem. Položme nejprve $P = p$, $Q = R = 0$. Pak Gaussova věta, uvedená v předchozím paragrafu, nabývá speciálního tvaru

$$\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} \, dV = \iint_S P \cos \alpha \, dS,$$

což je první složka zmiňované vektorové rovnice. Další složky dostaneme postupně dosazením $Q = p$, $P = R = 0$ a nakonec $R = p$, $P = Q = 0$.

Odtud je vidět, že na každý element objemu kapaliny dV působí síla $\mathbf{F}' = -dV \text{grad } p$ ze strany okolní kapaliny. Jinými slovy lze říci, že na jednotku objemu kapaliny působí síla $\mathbf{F}'' = -\text{grad } p$.

Nyní můžeme napsat pohybovou rovnici pro element objemu kapaliny, položíme-li rovnost mezi silou $\mathbf{F}'' = -\text{grad } p$ a součinem hmotnosti ρ jednotkového objemu kapaliny a jejího zrychlení $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p. \quad (5)$$

Zde vystupující derivace $d\mathbf{v}/dt$ neurčuje změnu rychlosti kapaliny v daném pevném bodu prostoru, ale určuje změnu rychlosti určité částice kapaliny přemísťující se v prostoru. Tuto derivaci je třeba vyjádřit pomocí veličin vztažených k pevným bodům v prostoru. K tomu poznamenejme, že změna rychlosti $d\mathbf{v}$ dané částice kapaliny v průběhu času dt se skládá ze dvou částí: ze změny rychlosti v daném bodě prostoru v průběhu času dt a z rozdílu rychlostí (ve stejný časový okamžik) ve dvou bodech oddělených vzdáleností $d\mathbf{r}$, kterou urazila uvažovaná částice za čas dt . První z těchto částí je rovna

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt,$$

kde se nyní derivace $\partial \mathbf{v}/\partial t$ bere při pevných x, y, z , tj. v daném bodu prostoru. Druhá část změny rychlosti je rovna

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \nabla) \mathbf{v}.$$

Tedy

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \nabla) \mathbf{v},$$

což po vydělení obou stran rovnosti veličinou dt dává

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}. \quad (6)$$

(Tímto způsobem definovaná derivace d/dt se nazývá derivací *materiálovou*, čímž se zdůrazňuje její vazba s přemísťující se částicí). Dosazením vztahu (6) do (5) dostáváme:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (7)$$

Toto je hledaná pohybová rovnice kapaliny, prvně odvozená *L. Eulerem* v roce 1755. Nazývá se *Eulerovou rovnicí* a je jednou z hlavních rovnic hydrodynamiky.

Jestliže se kapalina nachází v tíhovém poli, pak na každou jednotku jejího objemu působí ještě síla $\rho \mathbf{g}$, kde \mathbf{g} je tíhové zrychlení. Tuto sílu musíme přidat k pravé straně rovnice (5), takže (7) nabývá tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} . \quad (8)$$

Při odvozování pohybové rovnice jsme neuvažovali procesy disipace energie, které se mohou vyskytovat v tekoucí kapalině v důsledku vnitřního tření (viskozity) v kapalině a výměny tepla mezi jejími různými částmi. Proto všechno, co je vykládáno zde a v následujících paragrafech této kapitoly, se vztahuje pouze k takovým pohybům kapalin a plynů, při nichž procesy tepelné vodivosti a viskozity nejsou podstatné. O takovém pohybu budeme mluvit jako o pohybu *ideální kapaliny*.

Nepřítomnost tepelné výměny mezi jednotlivými částmi kapaliny (a samozřejmě také mezi kapalinou a tělesy, která se jí dotýkají) znamená, že pohyb probíhá adiabaticky, přičemž probíhá adiabaticky v každé části kapaliny. To znamená, že pohyb ideální kapaliny je třeba uvažovat jako adiabatický.

Při adiabatickém pohybu zůstává entropie každé části kapaliny konstantní při jejím přemísťování v prostoru. Označme písmenem s entropii vztaženou na jednotku hmotnosti kapaliny. Pak můžeme vyjádřit adiabatičnost pohybu rovnicí

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (9)$$

kde totální derivace podle času znamená, stejně jako ve (5), změnu entropie zadané přemísťující se části kapaliny. Tuto derivaci můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} s = 0 . \quad (10)$$

Toto je obecná rovnice vyjadřující adiabatičnost pohybu ideální kapaliny. S pomocí (2) je ji možno napsat ve tvaru „rovnice kontinuity“ pro entropii

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0 . \quad (11)$$

Součin $\rho s \mathbf{v}$ představuje *hustotu toku entropie*.

Rovnice adiabatičnosti obvykle nabývá mnohem jednoduššího tvaru. Jestliže, jak se obvykle stává, v nějaký počáteční časový okamžik je entropie stejná ve všech bodech objemu kapaliny, pak zůstává všude stejnou a neměnnou s časem i při dalším pohybu kapaliny. V těchto případech je tedy možné psát rovnici adiabatičnosti jednoduše ve tvaru

$$s = \text{konst} , \quad (12)$$

což budeme dále obvykle dělat. Takový pohyb se nazývá *izentropickým*.

Izentropičnost pohybu můžeme použít k tomu, abychom vyjádřili pohybovou rovnici (7) v trochu jiném tvaru. K tomu použijeme známý termodynamický vztah

$$dw = T ds + V dp ,$$

kde w je tepelná funkce jednotkové hmoty kapaliny, $V = 1/\rho$ je specifický objem a T je teplota. Protože je $s = \text{konst}$, jednoduše platí

$$dw = V dp = \frac{1}{\rho} dp$$

a tedy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} w . \quad (13)$$

Je užitečné uvést ještě jeden tvar Eulerovy rovnice, který obsahuje jen rychlost. Užitím známého vzorce z vektorové analýzy

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$$

je možné napsat (13) ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = - \text{grad} \left(w + \frac{w^2}{2} \right). \quad (14)$$

Provedeme-li na obou stranách této rovnice operaci rot, dostaneme rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}], \quad (15)$$

obsahující pouze rychlost.

K pohybovým rovnicím je třeba přidat hraniční podmínky, které musejí být splněny na stěnách ohraničujících kapalinu. Pro ideální kapalinu tato podmínka musí vyjadřovat prostě fakt, že kapalina nemůže proniknout za pevný povrch. To znamená, že na pevných stěnách se musí rovnat nule složka rychlosti kolmá k povrchu stěny:

$$v_n = 0 \quad (16)$$

(v obecném případě pohybujícího se povrchu musí být v_n rovno příslušné složce rychlosti povrchu).

Na rozhraní mezi dvěma kapalinami, které se nepromíchávají, musí platit podmínka rovnosti tlaků a podmínka rovnosti složek rychlosti kolmých k rozhraní obou kapalin (přičemž každá z těchto rychlostí je rovna rychlosti normálového pohybu samotného rozhraní).

Jak již bylo ukázáno na počátku paragrafu 1, stav pohybující se kapaliny je určen pěti veličinami: třemi složkami rychlosti \mathbf{v} a například tlakem p a hustotou ρ . Odtud plyne, že úplná soustava hydrodynamických rovnic musí obsahovat pět rovnic. Pro ideální kapalinu těmi rovnicemi jsou Eulerovy rovnice, rovnice kontinuity a rovnice, vyjadřující adiabatičnost pohybu.

3.3 Bernoulliho rovnice

Rovnice hydrodynamiky se značně zjednodušují v případě stacionárního proudění kapaliny. *Stacionárním* (nebo *ustáleným*) prouděním se rozumí takové proudění, při kterém v každém bodě prostoru, zaujímaném kapalinou, zůstává rychlost proudění konstantní v čase. Jinými slovy, \mathbf{v} je pouze funkcí souřadnic, takže $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. Rovnice (14) nyní přechází na tvar

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = - \text{grad } w. \quad (17)$$

Zavedme pojem *proudnic* jako čar, jejichž tečny ukazují směr vektoru rychlosti v bodě dotyku v daný časový okamžik; jsou určeny soustavou diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (18)$$

Při stacionárním pohybu kapaliny zůstávají proudnice neměnnými v čase a souhlasí s trajektoriemi částic kapaliny. Při nestacionárním proudění takový souhlas samozřejmě neexistuje: tečny k proudnici udávají směr rychlosti různých částic kapaliny v postupných bodech prostoru v určitý časový okamžik, zatímco tečny k trajektorii udávají směry rychlosti určitých částic v postupných časových okamžicích.

Vynásobme rovnici (17) jednotkovým vektorem tečny k proudnici v každém jejím bodě; tento jednotkový vektor označme \mathbf{l} . Projekce gradientu do nějakého směru je rovna, jak známo, derivaci v tomto směru. Proto hledaná projekce vektoru $\text{grad } w$ je $\partial w / \partial l$. Co se týče vektoru $[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$, ten je kolmý k rychlosti \mathbf{v} a proto jeho projekce do směru \mathbf{l} je rovna nule.

Tím z rovnice (17) dostáváme:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = 0$$

Odtud plyne, že veličina $\frac{v^2}{2} + w$ je konstantní podél proudnice:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{konst.} \quad (19)$$

Hodnota konst je obecně různá pro různé proudnice. Rovnice (19) se nazývá *Bernoulliho rovnici*. (Tuto rovnici odvodil pro nestlačitelnou kapalinu *D. Bernoulli* v roce 1738).

Jestliže proudění kapaliny probíhá v tíhovém poli, pak je na pravou stranu rovnice (16) třeba přidat ještě tíhové zrychlení \mathbf{g} . Zvolme směr tíže za směr osy z , přičemž kladné hodnoty z se počítají směrem nahoru. Pak je kosinus úhlu mezi směry \mathbf{g} a \mathbf{l} roven derivaci $-dz/dl$, takže projekce \mathbf{g} na \mathbf{l} je

$$-g \frac{dz}{dl}.$$

V důsledku toho nyní dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w + gz \right) = 0.$$

Bernoulliho rovnice tedy tvrdí, že podél proudnice zůstává konstantní součet

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{konst.} \quad (20)$$

3.4 Nestlačitelná kapalina

Ve velice častých případech proudění kapalin (a plynů) je jejich hustotu možno považovat za neměnnou, tj. konstantní v celém objemu kapaliny po celý čas pohybu. Jinými slovy, v těchto případech při pohybu nedochází ke zřetelnému stlačování nebo rozšiřování kapaliny. Takový pohyb se nazývá pohybem *nestlačitelné kapaliny*.

Obecné rovnice hydrodynamiky se výrazně zjednoduší při jejich aplikaci na nestlačitelnou kapalinu. Je pravda, že Eulerova rovnice nemění svůj tvar, jestliže v ní položíme $\rho = \text{konst.}$, až na to, že v rovnici (8) je možné vsunout ρ za znak gradientu:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (21)$$

Zato rovnice kontinuity nabývá při $\rho = \text{konst.}$ jednoduchý tvar

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (22)$$

Protože hustota není nyní neznámou funkcí, jak je tomu v obecném případě, je za základní rovnice hydrodynamiky nestlačitelné kapaliny možné vybrat rovnice obsahující pouze rychlost. Takovými rovnicemi jsou rovnice kontinuity (22) a rovnice (15):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]. \quad (23)$$

Bernoulliho rovnice také může být zapsána pro nestlačitelnou kapalinu v jednodušším tvaru. Rovnice (21) se liší od obecné Eulerovy rovnice (13) tím, že namísto ∇w v ní vystupuje $\nabla(p/\rho)$. Proto můžeme ihned napsat Bernoulliho rovnici, zaměníme-li v (20) tepelnou funkci podílem p/ρ :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.} \quad (24)$$

3.5 Nevířivé proudění nestlačitelné kapaliny

Výše bylo ukázáno, že základními rovnicemi hydrodynamiky nestlačitelné kapaliny je rovnice kontinuity ve speciálním tvaru (23) a rovnice (24). Tyto rovnice se dále zjednoduší, bude-li pohyb kapaliny nevířivý, tj. pokud platí

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

V tomto případě bude rovnice (23) splněna identicky a kromě toho lze rychlost vyjádřit jako gradient nějaké skalární funkce φ , která budeme říkat rychlostní potenciál:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Dosažením tohoto vztahu do rovnice kontinuity (23) dostáváme Laplaceovu rovnici pro rychlostní potenciál:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Tato Laplaceova rovnice bude základní rovnicí při studiu vln na vodě, kterými se budeme zabývat v následující kapitole. Bernoulliho rovnice, po jistých úpravách, bude sloužit jako hraniční podmínka.

4 Vlny na povrchu dokonalé nestlačitelné kapaliny

4.1 Hraniční podmínky

Vlnivý pohyb tekutiny je charakterizován kmitavým pohybem jejích částic. Pokud se tekutina sama jako celek nepohybuje, pohybují se při vlnivém pohybu její částice v blízkém okolí svých rovnovážných poloh. Z toho vyplývá rozdíl mezi vířivým a vlnivým pohybem tekutiny. Při vířivém pohybu unášejí víry hmotu tekutiny, na níž jsou vázány, zatímco při vlnivém pohybu tekutiny se nešíří hmota, ale šíří se **energie a fáze**. V přesnější teorii vln na vodě s konečnou amplitudou již trajektorie částic nejsou zcela uzavřené elipsy, ale částečně se posouvají. Dochází k tzv. Stokesovu driftu. Dochází tedy nejen k transportu energie a fáze, ale částečně i hmoty ve směru šíření vln. Pro naše výpočty se spokojíme s teorií, že při vlnivém pohybu tekutiny se hmota nešíří [1].

Příčiny vzniku vln jsou různé. Jsou-li částice při povrchu kapaliny vychýleny ze své rovnovážné polohy, například působením nárazových sil (větru), pak zemská tíže má snahu vrátit tyto částice do původních poloh, čímž vzniká kmitavý pohyb těchto částic. Hlavní příčinou těchto vln je zemská tíže, a proto jim říkáme **gravitační vlny**. Je-li hlavní silou, která se snaží přivést vychýlené částice do rovnovážné polohy, povrchové napětí (při jemném zčeření hladiny), takže působení tíže jako relativně malé zanedbáme, nazýváme vzniklé vlny **kapilárními**. Někdy uvažujeme vlny vyvolané významnou měrou obojím, mluvíme pak o gravitačně-kapilárních vlnách. Vlny vznikají též pohybem tuhého tělesa v kapalině (vlny za lodí). Přílivové a odlivové vlny jsou způsobeny přitažlivostí Měsíce a Slunce. Vlny mohou být též vyvolány zemětřesením (vlny tsunami) nebo podvodními jadernými výbuchy.

Uvažujeme homogenní, nestlačitelnou a dokonalou tekutinu. Její pohyb je obecně popsáno Eulerovými rovnicemi, rovnicí kontinuity, okrajovými a počátečními podmínkami. Jelikož je tíže silou konzervativní, zůstává nevířivým i kmitavý pohyb částic tekutiny v tíhovém poli, to znamená, že i jemu přísluší rychlostní potenciál.

Jelikož existuje potenciál rychlosti $\mathbf{v} = -\text{grad}\varphi'$, který označíme φ' , stačí místo Eulerových rovnic vzít jejich 1. integrál pro nestacionární pohyb, tj. časovou Bernoulliho rovnici. Pro nestlačitelnou tekutinu má rovnice (20) tvar

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho} = K(t), \quad (25)$$

Laplaceova rovnice má tvar

$$\Delta \varphi' = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0. \quad (26)$$

Rovnicemi (25) a (26) jsou obecně charakterizovány funkce φ' a p . Rovnici (25) můžeme psát ve vhodnějším tvaru, zahrneme-li funkci $f(t)$ do definice rychlostního potenciálu. Stačí zavést místo potenciálu φ' rychlostní potenciál φ vztahem

$$\varphi = \varphi' - \int_0^t f(t) dt + \frac{p_0}{\rho} t, \quad (27)$$

kde p_0 značí tlak působící na volnou hladinu. Funkce φ splňuje Laplaceovu rovnici stejně jako funkce φ' , tj.

$$\Delta \varphi = 0 \quad (28)$$

Místo rovnice (25) tedy máme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \quad (29)$$

Pohyb částic považujeme za pomalý, takže v rovnici (29) zanedbáme člen $v^2/2$. To znamená, že amplituda je malá ve srovnání s její vlnovou délkou. Zvolme soustavu souřadnic

tak, že rovina xy je totožná s volnou hladinou v rovnovážném stavu a osa z míří kolmo vzhůru, tj. $U=gz$, kde U je gravitační potenciál v daném bodě. Tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \quad (30)$$

Je-li tekutina ohraničena pevnými stěnami, potom vymizí normálová složka rychlosti, tj.

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (31)$$

Na volné hladině je $p=p_0$. Částice na povrchu leží v čase t ve vychýlené poloze na ploše, kterou označíme

$$z = \zeta(x, y, t), \quad (32)$$

což je rovnice volné hladiny v okamžiku t . Pak z rovnice (30) plyne pro volnou hladinu

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} + g\zeta = 0. \quad (33)$$

Částice na volné hladině se obecně pohybuje ve směru, který není rovnoběžný se žádnou osou souřadnic.

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v_y. \quad (34)$$

Předpokládejme, že amplituda vlny je malá ve srovnání s vlnovou délkou, a proto se tečná rovina vychýlené volné hladiny jen málo liší od roviny vodorovné. Hodnoty $\partial \zeta / \partial x$ a $\partial \zeta / \partial y$ jsou velmi malé. Poslední dva členy rovnice (34) tedy zanedbáme. Užijme-li ještě vztahu

$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ pro nevířivé proudění, dospíváme k rovnici

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}. \quad (35)$$

Do této rovnice dosadíme za ζ výraz plynoucí z rovnice (33) a dostaneme

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0. \quad (36)$$

Vzhledem k tomu, že ζ nabývá malých hodnot, můžeme rovnici (36) nahradit vztahem

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0. \quad (37)$$

Jelikož rychlostní potenciál φ je funkcí času, musíme obecně předepsat pro tuto funkci i podmínky počáteční. Je-li v okamžiku $t=0$ dána výchylka volné hladiny $\zeta(x, y, 0)$, plyne z rovnice (33), v níž položíme $z=0$ místo $z=\zeta$, ze stejných důvodů jako v rovnici (36), že je

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0, t=0} = g\zeta(x, y, 0) \equiv f_1(x, y) \quad (38)$$

Pokud se vychýlila volná hladina působením nárazových tlaků, přísluší vzniklému pohybu rychlostní potenciál, který je určen rovnicí $\varphi' = -\frac{\Pi}{\rho} + konst$, kde Π je impuls

nárazových tlaků. Přitom nárazové tlaky můžeme považovat za známé jen na volné hladině. Hodnota tohoto rychlostního potenciálu je však současně počáteční hodnotou φ_0 rychlostního

potenciálu φ příslušného následujícímu pohybu. Podle rovnice $\varphi' = -\frac{\Pi}{\rho} + konst$ máme

$$\varphi' = -\frac{\Pi}{\rho} \equiv f_2(x, y) \text{ pro } z=0, t=0 \quad (39)$$

Posledními dvěma rovnicemi, v nichž $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ jsou dané funkce souřadnic x a y , jsou formulovány počátečními podmínky.

4.2 Gravitační vlny

Poznatky předešlého paragrafu budeme aplikovat na případ rovinných gravitačních vln. Nebudeme přihlížet k ohraničení tekutiny po stranách, takže z okrajových podmínek bereme v úvahu pouze poměry na dně a na volné hladině. Osu x položíme do směru šíření vlny, osa z míří svisle vzhůru. Předpokládáme, že každá částice tekutiny se pohybuje v rovině, rovnoběžné s rovinou xz , přičemž rychlost \mathbf{v} a tlak p nezávisí na souřadnici y . Předpokládejme, že ve všech rovinách rovnoběžných s xz probíhá pohyb tekutiny zcela stejným způsobem. Takový pohyb nazýváme rovinným pohybem, mluvíme tedy o rovinném problému.

Ze vztahu pro rychlostní potenciál $\mathbf{v} = -\text{grad}\varphi$, tj.

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (40)$$

je zřejmé, že funkce v_i a φ závisí stejným způsobem na čase. Předpokládáme tedy, že φ má tvar rovinné harmonické vlny šířící se ve směru osy x , ale jejíž amplituda obecně závisí na svislé souřadnici z ,

$$\varphi = f(z)e^{i(kx - \omega t)}, \quad (41)$$

kde k je vlnové číslo a ω kruhová frekvence vlny. Ve vzorci (41) považujeme úhlovou frekvenci ω za danou, neznámými jsou vlnové číslo k a amplitudová funkce f . Fyzikální význam konstanty k je např.: při konstantním t nabývá potenciál φ téže hodnoty v místech, která jsou od sebe vzdálena o $2\pi/k$. Tato vzdálenost je vlnová délka λ a máme tedy

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ popř. } k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (42)$$

Dosazením z rovnice (41) do (28) dostaneme pro $f(z)$ homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f(z) = 0. \quad (43)$$

Řešení této rovnice lze psát ve tvaru

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (44)$$

Pro rychlostní potenciál (41) dostáváme vyjádření

$$\varphi(x, z, t) = (Ae^{kz} + Be^{-kz})e^{i(kx - \omega t)} \quad (45)$$

Popřípadě můžeme zavést $e^{i(kx - \omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)$.

Nyní se budeme věnovat vlnám na konečné hloubce. Z okrajové podmínky (31), psané pro dno v hloubce $z=l$ pod volnou hladinou, plyne podmínka

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=l} = 0 \quad (46)$$

Nyní se budeme věnovat vlnám na konečné hloubce. U vln tsunami totiž platí, že poměr l/λ je konečné číslo. Hloubka dna $z=l$ je konečná. Pro rychlostní potenciál platí vztah (45). Dosadíme-li z rovnice (45) do podmínky pro dno (46), dostaneme rovnici

$$Ae^{-kl} - Be^{kl} = 0 \quad (47)$$

z níž můžeme vyjádřit jednu konstantu pomocí druhé. Místo toho si položíme novou konstantu C tak, že

$$A = \frac{1}{2} Ce^{kl}, \quad B = \frac{1}{2} Ce^{-kl}$$

Těmito vztahy je rovnice (46) splněna identicky. Potenciál φ má pak tvar

$$\varphi = \frac{1}{2} C (e^{k(z+l)} + e^{-k(z+l)}) e^{i(kx - \omega t)} = C \cosh k(z+l) e^{i(kx - \omega t)} \quad (48)$$

Zavedeme-li tento výsledek do zbývajících okrajových podmínek pro volnou hladinu dostaneme vztah $gk \sinh kl = \omega^2 \cosh kl$. Z této rovnice pro kruhovou frekvenci ω a periodu kmitů T plyne vyjádření

$$\omega = \sqrt{gk \operatorname{tgh} kl}, \quad (49)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g \operatorname{tgh} \frac{2\pi d}{\lambda}}}. \quad (50)$$

Pro rychlost c_2 šíření fáze vln na konečné hloubce odtud plyne

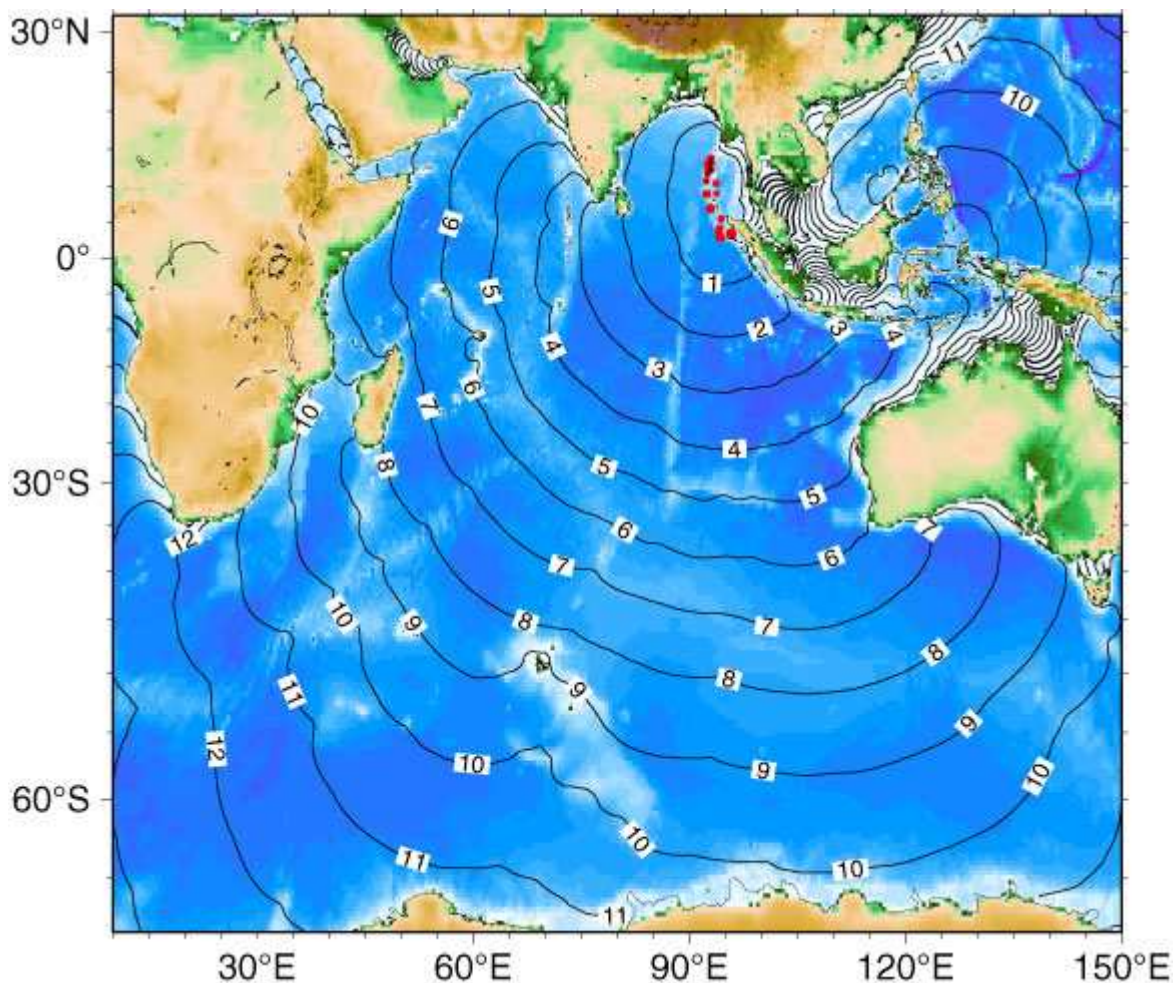
$$c_2 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{tgh} kl} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi d}{\lambda}} \quad (51)$$

Je-li kl malé, tj. poměr l/λ je malý, platí přibližně $\operatorname{tgh} kl \cong kl$, takže na velmi malé hloubce (ve srovnání s vlnovou délkou λ) pro rychlost c_3 z rovnice (51) plyne

$$c_3 = \sqrt{gl} \quad (52)$$

Z tohoto vzorce je patrné, že na mělké vodě je rychlost šíření vln nezávislá na vlnové délce. Nedochozí tedy k disperzi. Vlně, jejíž rychlost stanovena rovnicí (52), se někdy říká základní nebo též Lagrangeova vlna.

Na následujícím obrázku můžeme vidět aplikaci vztahu (52) v reálném případě, spočítaném pro zemětřesení a následné tsunami (Sumatra 2004).



Obr.7: Čáry ukazují, kam se vlna dostane za daný časový úsek po zemětřesení (hodnoty jsou znázorněny v hodinách) (wikipedia.org)

Druhý krajní případ nastává, když kl je veliké, tj. když $\frac{l}{\lambda} \rightarrow \infty$. Pak $\text{tgh } kl \cong 1$ a ihned je jasné, že ve vzorci (49) je jako limitní případ zahrnut vzorec

$$c_1 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{g\tau}{2\pi}, \quad (53)$$

kde τ je perioda vlnění.

Nyní vyšetříme případ, kdy l a λ jsou řádově stejné veličiny. Protože funkce $\text{tgh } x$ monotónně vzrůstá s rostoucím x , je ze vzorce (51) vidět, že rychlost šíření příslušných vln bude závislá na vlnové délce, a protože s rostoucí vlnovou délkou rychlost c_2 roste, jde o normální disperzi.

Dále vyšetříme tvar proudnic, trajektorií a volné hladiny. Za tímto účelem přejdeme od komplexního tvaru rychlostního potenciálu (48) ke tvaru reálnému. Ze dvou možností zvolíme tuto

$$\varphi = C \cosh k(z+l) \sin(kx - \omega t) \quad (54)$$

Odtud plyne pro složky rychlosti částic tekutiny

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = kC \cosh k(z+l) \cos(kx - \omega t) \\ v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = kC \sinh k(z+l) \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (55)$$

Tvaru proudnic přísluší diferenciální rovnice

$$dx : dz = \frac{v_x}{v_z} = \cosh k(z+l) \cos(kx - \omega t) : \sinh k(z+l) \sin(kx - \omega t)$$

její integrací dostáváme vztah

$$\sinh k(z+l) \cos(kx - \omega t) = konst \quad (56)$$

Toto je hledaná rovnice proudnic. Integrační konstanta na její pravé straně může nabývat všech reálných hodnot. Je-li rovna nule, je z rovnice (56) vidět, že příslušnou proudnici dostaneme anulováním prvního nebo druhého faktoru na její levé straně. Pak je buď $z=-l$ (proudnice probíhá kolem dna, což je vlastně již vyjádřeno okrajovou podmínkou (31) nebo (41), anebo $kx - \omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) při pevně zvoleném t . Odtud je vidět, že se proudnicové pole (v určitém okamžiku) skládá z jednotlivých oblastí o šířce $\pi/k = \lambda/2$.

Nyní určíme tvar trajektorií. Jejich diferenciální rovnice dostaneme, položíme-li v rovnicích (53) $v_x = \frac{dx}{dt}$ a $v_z = \frac{dz}{dt}$. Omezíme-li se na aproximativní výpočet, můžeme uvedené rovnice psát ve tvaru

$$v_x = \frac{dx}{dt} = kC \cosh k(z_0 + l) \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = kC \sinh k(z_0 + l) \sin(kx_0 - \omega t)$$

Zde x_0, z_0 jsou souřadnice rovnovážné polohy částice. Integrací dospíváme k rovnicím

$$x - x_0 = -\frac{kC}{\omega} \cosh k(z_0 + l) \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$z - z_0 = \frac{kC}{\omega} \sinh k(z_0 + l) \cos(kx_0 - \omega t) \quad (57)$$

V těchto rovnicích jsme položili integrační konstanty rovné souřadnicím rovnovážné polohy částice x_0, z_0 . Vyloučením času t z posledních dvou rovnic dostáváme rovnici elipsy

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1$$

o poloosách

$$a = \frac{kC}{\omega} \cosh k(z_0 + l), \quad b = \frac{kC}{\omega} \sinh k(z_0 + l) \quad (58)$$

a výstřednosti

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{kC}{\omega} \quad (59)$$

Při vlnách o konečné hloubce se částice pohybují po elipsách, jejichž hlavní poloosa je rovnoběžná s vodorovnou osou x a vedlejší poloosa je svislá. Rozměry elips jsou závislé na hloubce uvažované částice pod povrchem tekutiny (tj. na z_0). Výstřednost všech elips je stejná, nezávislá na poloze částice. U dna ($z_0 = -l$) elipsy degenerují v úsečky, neboť $b=0$. Konečně, půjde-li o vlny na mělké vodě, tj. když $kl \rightarrow 0$, bude tím spíše i $k(z_0 + l) \rightarrow 0$, neboť z_0 je záporné, pak z (56) plyne $a \cong \frac{kC}{\omega}, b = 0$, a tedy i v tomto případě přejde elipsa na vodorovnou úsečku. Částice tekutiny budou, nezávisle na hloubce, kmitat ve vodorovném směru kolem svých rovnovážných poloh.

Z rovnice $\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}$ pro tvar volné hladiny plyne

$$\zeta = \frac{\omega C}{g} \cosh kl \cos(kx - \omega t) \quad (60)$$

Profilem vlny je kosinusovka o amplitudě $\frac{\omega C}{g} \cosh kl$, která se přemísťuje ve směru kladné osy x rychlostí $c_2 = \omega/k$.

Nyní si vezměme reálný případ vzniku tsunami. Dojde-li k zemětřesení, potom jsme schopni ze seismografu odečíst jednotlivé periody otřesů. Tyto otřesy iniciují vlny tsunami o stejné periodě. Je tedy vhodné při výkladu o těchto vlnách rozebrat závislost mezi rychlostí šíření c a periodou T popřípadě mezi rychlostí šíření c a úhlovou frekvencí ω .

$$c(\omega) \quad (61)$$

$$\omega = \omega(k) \quad (62)$$

Vyjdeme z této rovnice, ke které jsme došli dříve:

$$\omega = \sqrt{gk} \operatorname{tgh}(kl) \quad (63)$$

K rozepíšeme jako podíl úhlové frekvence a rychlosti

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (64)$$

umocníme

$$\omega^2 = g \frac{\omega}{c} \operatorname{tgh} \left(\frac{\omega}{c} l \right) \quad (65)$$

Zkrátíme úhlovou frekvenci a dostaneme výsledný vztah, z něhož budeme vycházet pro další výpočty

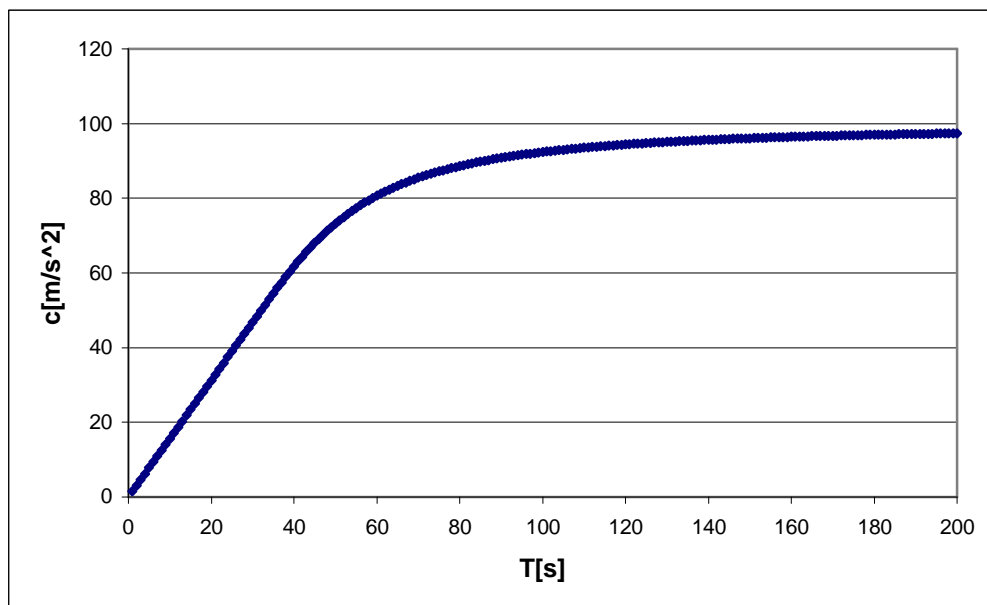
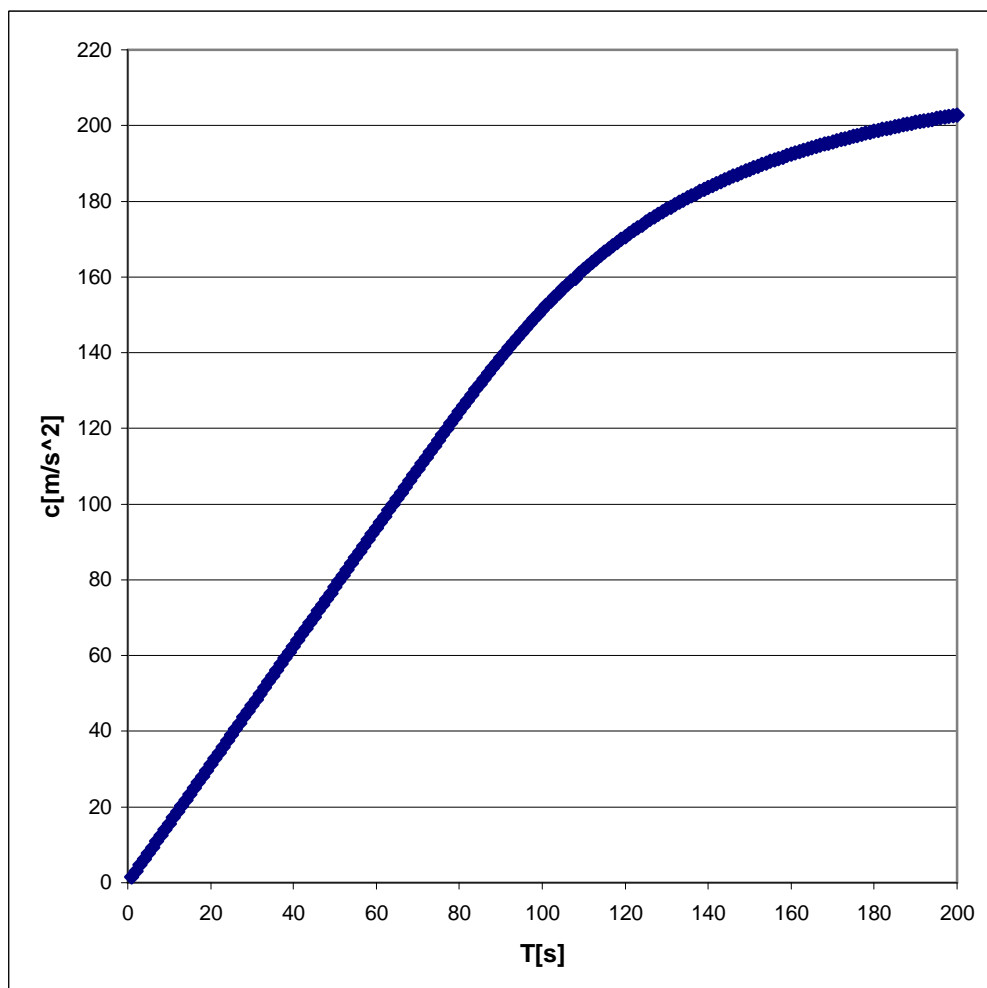
$$\frac{c\omega}{g} = \operatorname{tgh} \left(\frac{\omega}{c} l \right) \quad (66)$$

Nakonec úhlovou frekvenci vyjádříme jako podíl 2π a T , abychom mohli zobrazit závislost rychlosti a periody

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (67)$$

Rovnici (66) nelze analyticky vyřešit. Rychlost c nelze osamostatnit. Je tedy nutné použít numerických metod pro tuto závislost. Rovnici (66) položíme rovnou 0. Pro jednotlivá T (1,2,3,...200)s hledáme takové c , aby rozdíl levé a pravé strany rovnice (66) byl v absolutní hodnotě menší než vhodně zvolené ε .

Toto provedeme pro dvě zvolené hloubky. V našem případě $l_1=1000\text{m}$ a $l_2=5000\text{m}$. Spočítané výsledky najdeme ve dvou následujících grafech.

Graf č.1: Závislost rychlosti na periodě pro hloubku $l=1000\text{m}$ **Graf č. 2: Závislost rychlosti na periodě pro hloubku $l=5000\text{m}$** 

Koukneme-li na oba grafy, zjistíme, že závislost c na T je nejdříve téměř lineární a až od určité hodnoty T začíná růst funkce c zpomalovat. Pro $l=1000\text{m}$ tento zlom nastává zhruba pro $T=50\text{s}$, pro $l=5000\text{m}$ tento zlom nastává okolo 100s . V hlubších mořích tento zlom tedy nastává později než v mělkých mořích. To má za následek vyšší rychlost šíření vln na větší hloubce pro periody nad tyto zlomové hranice. Do těchto hranic je rychlost šíření pro různé hloubky zhruba stejná.

5 Závislost mořské hloubky a amplitudy vlny

V našich výpočtech budeme vycházet ze známého vzorce pro rychlost vlnění

$$v = Ae^{i\omega(t-x/c)} . \quad (68)$$

Objem dV má hmotnost

$$m = \rho dV . \quad (69)$$

Z předchozích vztahů vypočteme hustotu kinetické energie

$$E_{KIN} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho A^2 \left| e^{2i\nu(\omega t - x/c)} \right| . \quad (70)$$

Pro tok energie platí vztah

$$\frac{1}{2}\rho A^2 c dS \quad (71)$$

Platí, že tok energie v jednotlivých vlnoplochách musí být stejný

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 c S_1 dl = \frac{1}{2}\rho A_2^2 c S_2 dl \quad (72)$$

$$S_1 = 2\pi r_1 l , \quad S_2 = 2\pi r_2 l \quad (73)$$

Po úpravě dostaneme vztah

$$A_1^2 r_1 = A_2^2 r_2 \quad (74)$$

Dosadíme-li za $A_1 r_1$ jedničky

$$A_1 = 1 , \quad r_1 = 1 \quad (75)$$

dojedeme ke vztahu

$$A_2^2 = \frac{1}{r_2} \quad (76)$$

Mezi amplitudou a vzdáleností od vzniku vlny platí vztah nepřímé úměry k odmocnině ze vzdálenosti

$$A \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (77)$$

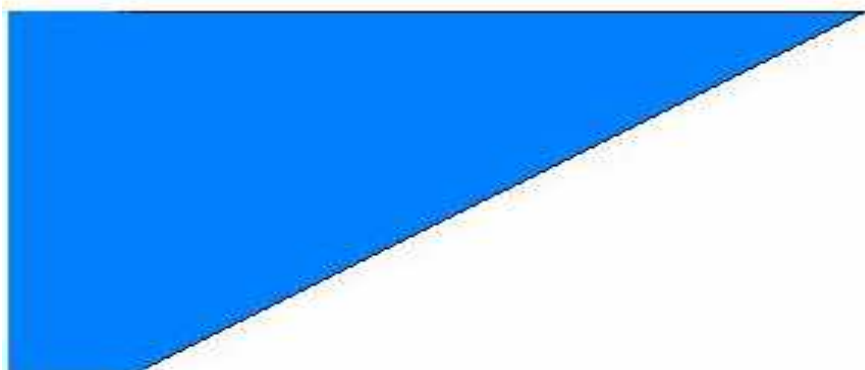
Pro výpočet závislosti amplitudy a hloubky použijeme následující postup.

$$\frac{1}{2}\rho A^2 v = K , \quad (78)$$

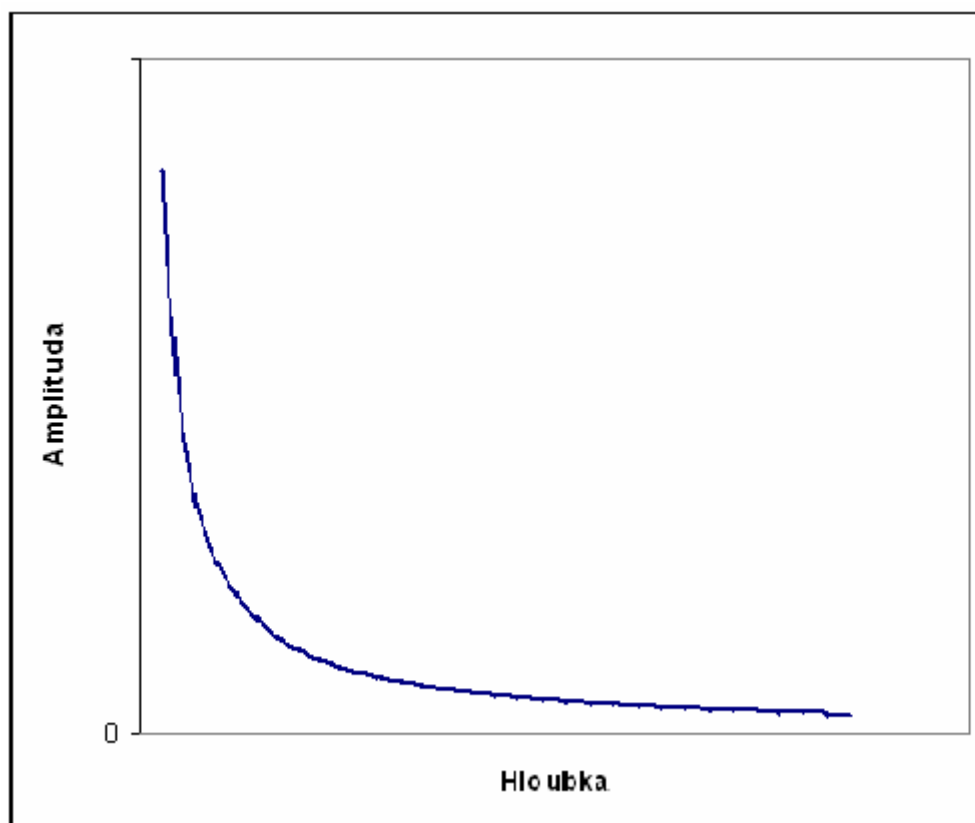
kde A je amplituda vlnění. Dále platí vztah $v = \sqrt{gh}$, kde h je hloubka. Dosadíme

$\frac{1}{2}\rho A^2 \sqrt{gh} = K$, z toho plyne pro amplitudu vztah $A^2 = \frac{2K}{\rho\sqrt{gh}}$. Platí tedy

$$A \sim \frac{K'}{\sqrt[4]{h}} \quad (79)$$



Obr.11: Předpokládaný tvar vodní masy u pobřeží



Graf.3: Závislost amplitudy na hloubce

6 Závěr

Tato práce je pojata jako rešerše o vlnách tsunami. Nezabíhá tedy do odborného pojednání či modelování, ale měla by čtenáři se základy matematické analýzy prozradit základy o vzniku a šíření těchto vln.

V úvodu je zhruba načrtnuto, čemu se práce dále věnuje. První kapitola rozebírá dvě z nejničivějších tsunami v dějinách. Roku 1755 zasáhla v té době jedno z nejmodernějších měst dané doby Lisabon. O 30 000 obětí se ani tak nezasadila síla samotné vlny, ale následný požár převážně dřevěných budov. Síla zemětřesení, které toto tsunami způsobilo, je odhadována mezi 8. a 9. stupněm RichtEROVY škály.

V roce 2004 zasáhlo obrovské tsunami, vyvolaném obrovským zemětřesením u Sumatry, Indonésii, Srí Lanku a Thajsko. Síla zemětřesení je odhadována okolo 9,1 stupně RichtEROVY škály. Tímto se zařadilo mezi největší zemětřesení vůbec. Toto tsunami si vyžádalo pře 230 000 obětí. Toto číslo ukazuje jednak na obrovskou sílu přírodního úkazu a také na nedostatečné pokrytí bezpečnostním výstražným systémem.

Kniha Zdeňka Kukala Katastrofy se zabývá katastrofou v Bengálském zálivu (1872). Jako příčinu vzniku uvádí neznámou. Nebo prý mohlo jít o bouřliví příliv. Všechny dostupné informace o katastrofě, při které zahynulo na 200 000 lidí, poukazují na to, že mohlo jít o vlnu tsunami.

V následující kapitole základní rovnice hydrodynamiky je nejdříve odvozena rovnice kontinuity a pohybová rovnice v hydrodynamice. Dále pak Bernoulliho rovnice, která je výchozím vztahem pro následující kapitolu.

Vlny na povrchu dokonalé nestlačitelné kapaliny je kapitola, ve které se odvozují konečné vztahy použitelné při práci s reálnými vlnami na mořské hladině. Zejména vztah $c_3 = \sqrt{gl}$ je velmi užitečný. Dá se z něj vyvodit za jak dlouho dorazí obávaná vlna tsunami od místa vzniku k obydleným pobřežím, kde hrozí ztráty na životech. A tím pádem je možné zvolit vhodný evakuační plán, který tyto ztráty dokáže eliminovat. Dále byla vypočítána závislost rychlosti vlny c na periodě otřesů zemětřesení. To je z praktického pohledu také velmi důležitá závislost, jelikož na seismogramech odečítáme právě periodu jednotlivých kmitů půdy.

V závěrečné kapitole je zkoumán zidealizovaný případ, kdy se tvar břehu až k pobřeží rovnoměrně, lineárně zvedá. Z následujícího grafu je vidět, jak se u pobřeží amplituda vlny rychle zvětšuje. To je jedna z charakteristik vln tsunami, kdy je na širém moři prakticky ne zaznamatelná a na pobřeží způsobí katastrofální škody. V této kapitole je také odvozen vztah amplitudy vlny a její vzdálenosti od místa vzniku.

Úplným závěrem bych chtěl poděkovat vedoucímu práce, docentovi Oldřichu Novotnému. Hlavně za pevné nervy, při hodinách strávených opravováním gramatických a věcných chyb

Seznam použité literatury

- [1] Brdička Miroslav, Samek Ladislav, Sopko Bruno; Mechanika kontinua; Academia 2000
- [2] Kozák Jan T., Moreira Victor S., Oldroyd David R.; Iconography of the 1755 Lisbon earthquake; Academia 2005
- [3] Kukul Zdeněk; Přírodní Katastrofy; Horizont 1982
- [4] Lidové noviny; (13.7. 2005, Zemětřesení roztrhlo mořské dno)
- [5] EkoList (14.7. 2005, Zemetrasenie a cunami v Ázii spôsobilo 1000-kilometrovou trhlinu na zemské kúre)
- [6] DEOS (14.7. 2005, Insight into the 2004 Sumatra-Andaman earthquake from GPS measurements)
- [7] cs.wikipedia.org/wiki/Tsunami
- [8] Langer J., Podolský J.; Teoretická mechanika-vybrané části přednášky OFYOO3
- [9] sumatra.navajo.cz
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifšic; Hidrodinamika. Nauka; Moskva 1986.
- [11] Feynman P. Richard, Leighton Robert B., Sands Matthew; Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady; Fragment 2000
- [12] Rektoris Karel a spol.; Přehled užití matematiky I, Prometheus 1995
- [13] Richter Charles F.; Elementary seismology; W.H. Freeman and Company 1958
- [14] messina.navajo.cz
- [15] www.sci.muni.cz/~herber/tsunami2004.htm