

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



David Einšpigel

Ledové měsíce velkých planet

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika, obor obecná fyzika

2010

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za výborné vedení, za jeho ochotu, lidský přístup a podnětné rady. Děkuji taktéž svým rodičům za neustálou podporu mých studií.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 19. 5. 2010

David Einšpigel

Obsah

Úvod	5
1 Úvod do světa ledových měsíců	6
1.1 Obecně o ledových měsících	6
1.2 Jupiterovy měsíce – Ganymede, Callisto a Europa	7
1.3 Saturnovy měsíce – Titan, Enceladus, Mimas a Iapetus	10
1.4 Ostatní ledové měsíce	14
2 Tepelná bilance ledových měsíců	16
2.1 Odhad teploty na povrchu měsíce	16
2.2 Model měsíce s radioaktivními zdroji	18
2.3 Tepelné zdroje v plášti	20
Závěr	25
A Sférické harmonické funkce	26
Literatura	28

Název práce: Ledové měsíce velkých planet
Autor: David Einšpigel
Katedra (ústav): Katedra geofyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.
e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme ledové měsíce velkých planet. Nejprve formou rešerše shrnujeme současné poznatky o ledových měsících, dále se zabýváme tepelnou bilancí ledových měsíců. Pro vybrané satelity odhadneme povrchovou teplotu na základě Stefan-Boltzmannova zákona. Poté studujeme dvouvrstvý model zahříváný radioaktivními zdroji v jádře. Provedeme konkrétní výpočet pro Enceladus a zjistíme, že tyto zdroje jsou nedostatečné pro vysvětlení jeho tepelné aktivity. Nakonec zkoumáme rovnici vedení tepla pro dvouvrstvý model se zdroji v ledovém plášti a najdeme stacionární řešení pro dané okrajové podmínky.

Klíčová slova: ledové měsíce, rovnice vedení tepla, dvouvrstvý model

Title: Icy satellites of giant planets
Author: David Einšpigel
Department: Department of Geophysics
Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.
Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study icy satellites of giant planets. First we resume present knowledge about icy satellites, then we concentrate on thermal balance. Using the Stefan-Boltzmann law we estimate the surface temperature of some chosen satellites. Then we study a two-layer model heated by radiogenic elements in a core. Specifically, we perform a calculation for Enceladus and find that assumed heat are insufficient to explain its thermal activity. Finally we investigate the heat conduction equation for a two-layer model with sources in an icy mantle and find a stationary solution for given boundary conditions.

Keywords: icy satellites, heat conduction equation, two-layer model

Úvod

Sondy Galileo a Cassini nám v posledních letech poskytly řadu informací o Jupiteru, Saturnu a jejich satelitech. Velký zájem mezi laickou i odbornou veřejností vzbudily nově nabyté poznatky o ledových měsících těchto obrovských planet.

Proč právě ledové měsíce? Ukazuje se, že v případě některých z těchto satelitů můžou pod vnější ledovou krustou existovat podpovrchové oceány a ty mohou poskytovat vhodné podmínky pro vznik primitivního mimozemského života. Dalším důvodem jsou různá anomální chování některých měsíců, jejichž původ neumíme dostatečně vysvětlit, např. velká geologická aktivita v okolí jižního pólu na Enceladu nebo záhadné rozložení povrchových teplot na Mimasu.

Cílem této práce je poskytnout českému čtenáři současné znalosti o ledových měsících a dále ho seznámit se základními fyzikálními vztahy pro určení tepelné bilance ledových měsíců. Pokusíme se odhadnout povrchovou teplotu na základě insolace měsíce a dále budeme řešit rovnici vedení tepla pro dvouvrstvý model ledového měsíce.

Stručně si popíšeme strukturu práce. Kapitola 1 je rešerší současných znalostí o ledových měsících. Kapitola 2 se pak zabývá tepelnou bilancí ledových měsíců. Nejdříve provedeme odhad povrchové teploty na základě slunečního ozáření, dále budeme uvažovat dvouvrstvý model měsíce a hledat stacionární řešení rovnice vedení tepla se zdroji. V příloze A uvádíme základní definice a vztahy pro sférické harmonické funkce, které představují užitečný nástroj, řešíme-li úlohu ve sférických souřadnicích.

Kapitola 1

Úvod do světa ledových měsíců

V této kapitole shrnujeme současné poznatky o ledových měsících, přičemž hlavním zdrojem této rešerše byla kapitola z *Treatise on Geophysics* [3]. Některé další podrobnosti a nejnovější poznatky byly čerpány z [5, 10, 12].

1.1 Obecně o ledových měsících

Ledové měsíce velkých planet (Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu) představují velice rozmanitý a zajímavý svět. Tyto měsíce jsou z podstatné části tvořeny vodou v pevném skupenství a vzájemně se velice liší ve velikosti, tvaru, stupni diferencovanosti, vzniku a geologické aktivitě. Největší z nich (Titan, Ganymede, Callisto¹) jsou větší než Měsíc nebo Merkur. Některé měsíce jsou zcela diferencované, u jiných je led smíchán s jinými látkami, obecně však můžeme říci, že ledové měsíce jsou složeny z jádra tvořeného sloučeninami železa a křemičitanu (dále budeme v práci označovat jako „skálu“ coby analogii v anglické literatuře používaného „rock“) a vnější vrstvy tvoří voda v pevném, popřípadě kapalném skupenství (dále budeme označovat jako „led“). Na základě poměru skály a ledu pak variuje průměrná hustota měsíců v rozmezí přibližně $1000 - 3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Na snímcích pořízených sondami Galileo a Cassini můžeme pozorovat, že některé měsíce jsou hustě pokryté krátery, a tudíž již miliardy let geologicky

¹Jména ledových měsíců jsou převzata z řecké mytologie. Protože téměř neexistuje česká literatura o ledových měsících, rozhodl jsem se, že jména budu psát v nejrozšířenější anglické transkripci, přičemž rody budu používat podle mytologie. Tedy měsíce v ženském rodě, které budou v textu zmíněny, budou Io, Callisto, Europa, Rhea a Dione. Ostatní měsíce budou rodu mužského.

neaktivní, zatímco u jiných měsíců vidíme různé útvary svědčící o současné aktivitě a možnosti existence podpovrchových oceánů. Zájem laické i odborné veřejnosti o ledové měsíce vzbuzuje zejména fakt, že uvnitř těchto oceánů mohou existovat podmínky vhodné pro vznik života.

V případě některých měsíců (Europa, Enceladus) již máme k dispozici měření, která dokazují existenci podpovrchových oceánů. Vzhledem k tomu, že teploty na povrchích ledových měsíců se pohybují zhruba kolem 80 – 110 K a sluneční insolace je minimální, musí existovat zdroje tepla uvnitř měsíců, které podpovrchové oceány udržují. Těmito zdroji tepla jsou zejména slapové síly a radioaktivní rozpady v jádře měsíce. Další fakt, který může ovlivnit vznik kapalné vody, je například přítomnost těkavých prvků, jako je třeba čpavek, které významně snižují teplotu tání vody.

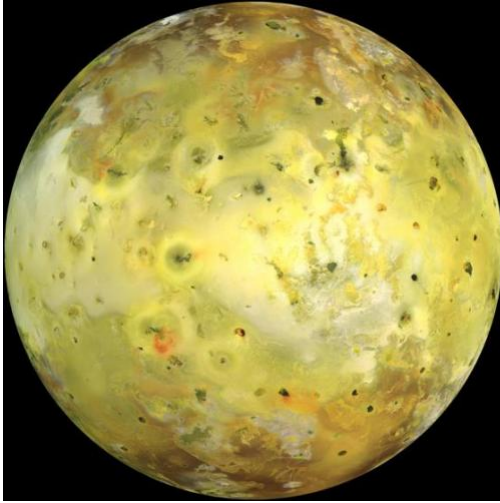
V další části si blíže popíšeme vybrané ledové měsíce.

1.2 Jupiterovy měsíce – Ganymede, Callisto a Europa

V současnosti je známo celkem 62 Jupiterových měsíců, z nichž nejvýznamnější jsou tzv. Galileovy měsíce. Jedná se o čtyři největší měsíce objevené roku 1610 Galileem Galileim. Tyto čtyři měsíce jsou Io, Europa, Ganymed a Callisto.

Io (obr. 1.1) není ledovým měsícem, přesto však stojí za zmínku. Io obíhá kolem Jupitera nejbližší z Galileových měsíců a je tudíž nejvíce namáhána slapovými silami. Tyto slapové síly jsou tak silné, že v pevném povrchu způsobují změny výdutě mezi apocentrem a pericentrem až 100 metrů. Pro srovnání, slapové síly na Zemi způsobují změnu vodní hladiny o pouhých 18 metrů. Takto velké slapové síly způsobují velkou povrchovou aktivitu a vytvářejí množství vulkánů chrlící sloučeniny síry. Io je vůbec vulkanicky nejaktivnější těleso v celé sluneční soustavě.

Ganymede (obr. 1.2) je se středním poloměrem 2634 km největší satelit v sluneční soustavě (větší než Merkur). Sonda Galileo odhalila, že Ganymede má jako jediný měsíc sluneční soustavy vlastní magnetické dipólové pole. Ačkoli přítomnost permanentního magnetismu není zcela vyloučena, mnohem pravděpodobnější interpretací je dynamo v kovovém jádře. Z naměřených dat dále vyplývá, že vedle svého magnetického pole má Ganymede i indukované magnetické pole způsobené Jupiterovou magnetosférou. Toto indukované pole naznačuje možnost existence podpovrchového oceánu.



Obrázek 1.1: Io (všechny obrázky v této kapitole jsou převzaty z [11])



Obrázek 1.2: Ganymede

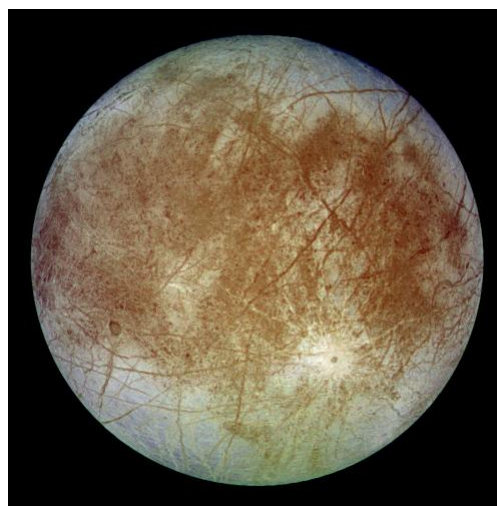
Z naměřených gravitačních dat lze usuzovat, že Ganymede je diferencovaný a má tři vrstvy – kovové jádro, plášť z křemičitanů a vnější ledový plášť. Jak již bylo řečeno výše, existenci podpovrchový oceán nelze vyloučit, nicméně teplo získané z radioaktivních rozpadů a slapového tření by samo o sobě nebylo dostatečné k udržení oceánu z čisté vody. Předpokládá se přítomnost látek snižujících teplotu tání vody, nicméně přímé důkazy neexistují.

Povrch Ganymeda tvoří dva rozdílné typy terénu. Zatímco tmavá strana je hustě poseta krátery a zůstává nezměněna 4 miliardy let, světlá strana s četnými prasklinami a trhlinami je mnohem mladší. Příčina tohoto jevu není dosud objasněna.

Callisto (obr. 1.3), od Jupitera nejvzdálenější Galileův měsíc, má střední poloměr 2403 km a hmotnost asi 70 % hmotnosti Ganymeda. Je tedy překvapivé, že ač je Callisto velikostně srovnatelná s Ganymedem, její vnitřní struktura i povrch jsou zcela odlišné. Povrch Callisty je posetý krátery nejvíce ze všech těles sluneční soustavy, což naznačuje, že na Callistě nikdy nedošlo k tektonické či vulkanické aktivitě. Naměřená gravitační data naznačují, že těleso je pouze částečně diferencované, na druhou stranu magnetická data předpokládají přítomnost tenké (10 km) vrstvy slané vody v hloubce asi 150 km. Tento zdánlivý rozpor lze vysvětlit tím, že vnitřek měsíce je tvořen směsí skály a ledu, přičemž množství skály směrem ke středu stoupá.



Obrázek 1.3: Callisto



Obrázek 1.4: Europa

Toto jádro je obklopeno zmíněným oceánem a vnější ledovou vrstvou.

Europa (obr. 1.4) obíhá kolem Jupitera jako druhý nejbližší Galileův měsíc. Je jenom o něco menší než Měsíc (střední poloměr 1565 km) a má poměrně velkou hustotu ($3018 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Z celkové hmotnosti tedy led a voda tvoří pouze 6 – 9 %. Ze získaných dat a snímků pořízených sondou Galileo můžeme říci, že Europa je diferencovaná a skládá se z kovového, na železo bohatého jádra, pláště z křemičitanů, oceánu slané vody a povrchového ledového pláště. K udržení podpovrchového oceánu stačí samotné slapové síly, které jsou sice o řád menší než na Io, ale přesto zcela dostačující.

Povrch Europy je velice mladý s minimem impaktních kráterů a množstvím prasklin a různých útvarů svědčících o tektonické aktivitě. Povrchová aktivita Europy je vysvětlována různými teoriemi. Například se uvažuje o modelu s tenkou vrstvou povrchového ledu, která je neustále narušována oceánem v důsledku slapových sil. Jiný model uvažuje, že na povrchu pláště z křemičitanů dochází v důsledku slapového namáhání k vulkanické činnosti podobně jako na Io. Při erupci pak dochází k velkému ohřevu vody, která proudí k povrchu a rozpouští led. Další model neuvažuje vulkanickou činnost, ale předpokládá, že konvekce v křemičitanovém plášti vytváří místa s vyšší teplotou, dochází k prosakování vody, vznikají hydrotermální místa a následně horká voda proniká k povrchu. Toto vysvětlení je zajímavé navíc v tom smyslu, že takové podmínky na rozhraní vnitřního pláště a oceánu jsou podobné těm, které panují na dně oceánů Země, a mohly by tak být

vhodné pro vznik primitivního života.

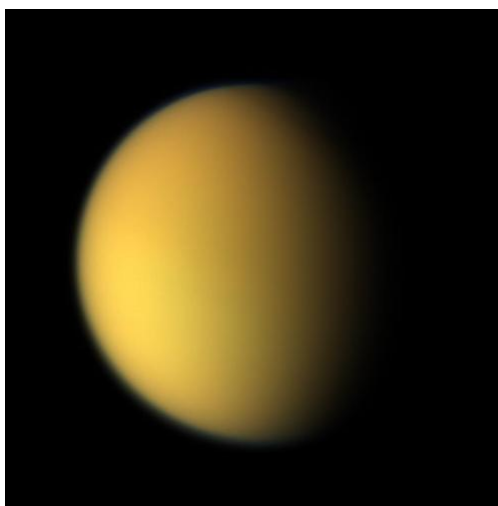
Nejsilnějším důkazem existence podpovrchového oceánu jsou magnetická data. Europa má silné indukované magnetické pole, které lze vysvětlit vrstvou slané vody s tloušťkou přesahující 10 km a vodivostí podobnou zemským oceánům.

1.3 Saturnovy měsíce – Titan, Enceladus, Mimas a Iapetus

Titan (obr. 1.5), po Ganymedu druhý největší měsíc sluneční soustavy, je mezi měsíci výjimečný, neboť má hustou neprůhlednou atmosféru, která znemožňuje přímé pozorování povrchu. Důležité informace o atmosféře a povrchu Titanu byly získány díky přistání sondy Huygens v květnu roku 2005.

Atmosféra Titanu sahá, až do výše 600 km. Skládá se z dusíku (přibližně 95 %), metanu (okolo 5 %) a malého množství dalších sloučenin uhlíku. Oranžové zabarvení Titanu poukazuje na výskyt dalších složitých sloučenin jako je např. tholin. Zajímavou otázkou Titanovy atmosféry je výskyt metanu, neboť energie ze slunečních paprsků by veškerý metan přeměnila ve složitější sloučeniny během 50 miliónu let. Musí tedy existovat nějaký zdroj metanu a jako nejpravděpodobnější se jeví kryovulkanismus, který by chrlil horkou vodu coby lávu. Nicméně důkazy pro tuto verzi zatím neexistují a objasnění tohoto problému je jeden z cílů právě probíhající mise Cassini. Atmosféra Titanu má poměrně složitou strukturu a je složena z vrstev obdobně jako atmosféra na Zemi. Byla pozorována oblaka v okolí jižního pólu a také rozsáhlá oblačnost na severním pólu. Předpokládá se, že metan zde plní roli zemské vody a dochází k metanovému cyklu stejně jako k vodnímu cyklu na Zemi. Údaje získané sondou Huygens napovídají, že dochází k periodickým srážkám, třebaže možná pouze jednou za několik desetiletí. Stejně tak dochází ke změnám ročních období s tím rozdílem, že rok na Titanu trvá sedm pozemských let vzhledem k periodě oběhu Saturnu kolem Slunce. Zkoumání atmosféry a klimatu na Titanu stále pokračuje.

Stejně jako atmosféra i povrch Titanu je obdobný povrchu Země. Při povrchové teplotě 94 K je led tvrdý jako horniny na Zemi a místo kapalné vody je na Titanu kapalný metan. Vyskytují se zde ledová pohoří a kopce (nejvyšší však dosahují pouze několika stovek metrů), síť kanálů a jezer s kapalným metanem a duny, podobné zemským písečným dunám, avšak tvořené z uhlovodíků. Impaktních kráterů je málo, i to svědčí o relativně mladém



Obrázek 1.5: Titan



Obrázek 1.6: Enceladus

povrchu.

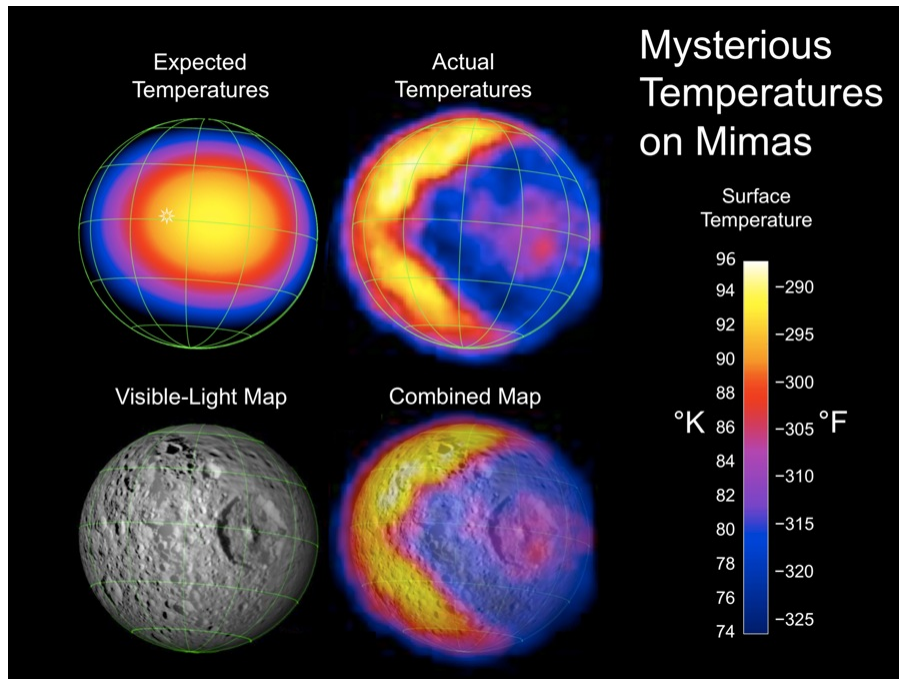
Titan je vnitřně diferencovaný minimálně na skalnaté jádro a vnější ledový plášť. Obecně se předpokládá existence podpovrchového oceánu mezi vnějším ledovým pláštěm a vstvyami tvořenými vysokotlakým ledem. Přímé důkazy neexistují, dá se ale předpokládat, že v nitru měsíce se nachází značné množství prvků jako je čpavek a metan, které výrazně snižují teplotu tání vody, což by udrželo podpovrchový oceán až do dnešních dnů. Enceladus (obr. 1.6) je se středním poloměrem 252 km výrazně menší než měsíce doposud diskutované. Očekávali bychom tedy, že se jedná o těleso již geologicky neaktivní stejně jako velikostně srovnatelný Mimas, další Saturnův satelit. Překvapivě je však Enceladus jedno z mála těles sluneční soustavy, které je nepochybně dodnes aktivní. Ještě překvapivější je fakt, že povrchová aktivita na Enceladu je výrazně asymetrická. Zatímco severní polokoule je neaktivní s množstvím impaktních kráterů, povrch jižní polokoule je výrazně mladší s četnými prasklinami a rýhami, z nichž některé tvoří zajímavou pravidelnou strukturu, tzv. tygří pruhy. Aktivita je nejvýraznější na jižním pólu, kde byla také naměřena nejvyšší povrchová teplota – až 90 K v oblastech tygřích pruhů. Povrchová teplota na rovníku se pohybuje přibližně v rozmezí 70 – 80 K. Sonda Cassini v roce 2008 pořídila snímky gejzírů tvořené vodní parou a ledovými krystalky v oblasti jižního pólu. Sonda dále odebrala vzorky z gejzírů a provedla jejich analýzu, která potvrdila přítomnost kapalné vody v nitru měsíce. Enceladus má tedy podpovrchový oceán.

Povaha tepelných zdrojů potřebných k současné povrchové aktivitě na Enceladu a k udržení podpovrchového oceánu zůstává neznámá. Jádro Enceladu ze silikátů tvoří 50 % hmotnosti měsíce, takže teplo uvolněné radioaktivními rozpady je zcela nedostačující. Nabízí se tedy slapová disipace, nicméně ani toto vysvětlení není uspokojivé, neboť již zmíněný Mimas se pohybuje blíže Saturnu s mnohem větší excentricitou a slapové síly by zde měly být až 10-krát větší než na Enceladu. Přesto je Mimas miliardy let neaktivní. Uvažují se různé modely, které by vysvětlily tento paradox. Například se započítává vliv orbitální rezonance Encelada s Dionou v poměru 2:1, což zvyšuje slapové síly, nicméně žádný takový model nedokáže zodpovědět otázku velké asymetrie mezi severním a jižním pólem. Jeden z kroků k vyřešení záhady Encelada bylo objevení čpavku během přeletů v létě roku 2008 [8]. Stále však zůstává řada nezodpovězených otázek.

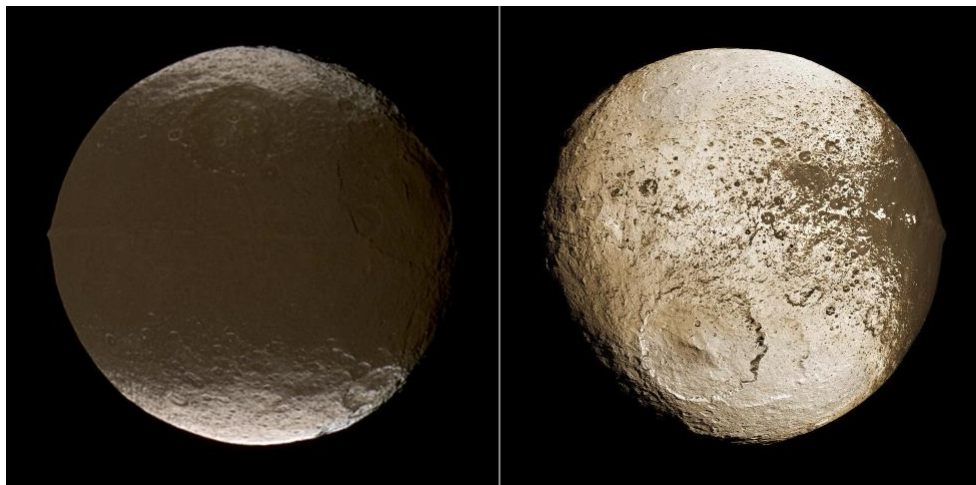
Jak již bylo řečeno, Mimas je velikostně srovnatelný s Enceladem (střední poloměr 198 km), přesto je odlišný. Jeho neaktivní povrch je silně posetý krátery, z nichž vyčnívá 140 km široký Herschelův kráter. Sonda Cassini nedávno (únor 2010) zmapovala teplotní pole na povrchu Mimase a získala překvapivé údaje. Teplotní rozložení je atypické a jedna strana je výrazně teplejší (viz obr. 1.7 a [7]). Původ této teplotní anomálie je neznámý.

Iapetus (obr. 1.8) je s poloměrem 734,5 km třetí největší Saturnův měsíc po Titanu a Rhee. Má střední hustotu pouze $1088 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, a tudíž dominuje ledová složka. Iapetus je pouze částečně diferencovaný a již dlouhou dobu geologicky neaktivní. Rovníkové pohoří, které se táhne téměř přes celý měsíc a dosahuje výšek 12 – 20 km, však napovídá, že Iapetus v minulosti byl vnitřně aktivní. Vzhledem k tomu, že pohoří je poseto krátery, dělo se tak v ranném stádiu měsíce. Možné vysvětlení je, že rovníkový hřeben je pozůstatek rychlé rotace v minulosti s periodou 16 hodin a že v tomto stádiu zchladl Iapetus dostatečně rychle, aby rovníkové vydutí zůstalo zachováno. V současnosti je Iapetus ve vázané rotaci s periodou téměř 80 dní.

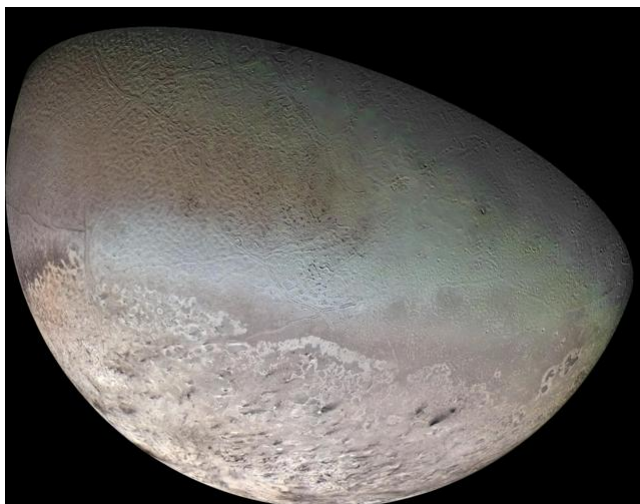
Další zajímavosti na povrchu Iapeta je Cassini Regio, oblast tvořící jednu hemisféru s extrémně nízkou odrazivostí (odráží 3 – 5 % světla, zatímco zbytek povrchu přibližně 50 %). V současnosti preferované vysvětlení spočívá v pomalé rotaci Iapeta, která způsobuje velký rozdíl povrchových teplot v důsledku insolace. Tmavý materiál absorbuje více tepla ze Slunce, zahřívá se a způsobuje sublimaci ledu, který se přesouvá do chladnějších oblastí. Tmavá oblast se tak stává stále tmavější a světlá světlejší. Je možné, že tento proces byl nastartován tím, že v minulosti došlo k expanzi tmavého materiálu z nitra Iapeta.



Obrázek 1.7: Mimas a jeho záhadné rozložení povrchových teplot



Obrázek 1.8: Tmavá a světlá strana Iapeta



Obrázek 1.9: Triton

1.4 Ostatní ledové měsíce

Triton (obr. 1.9) je s poloměrem 1353,4 km největší z Neptunových měsíců a celkově sedmý největší měsíc sluneční soustavy. Obíhá kolem Neptunu se sklonem 157° po retrogradní dráze, čímž se stává jedinečným mezi satelity takové velikosti. Předpokládá se, že Triton byl původně objekt z Kuiperova pásu, který byl Neptunem zachycen, čemuž odpovídá i fakt, že Triton má podobné složení jako Pluto. Během tohoto zachycení došlo k silnému vnitřnímu zahřátí a k diferenciaci měsíce na skalnaté jádro a ledový plášť.

Díky sondě Voyager 2 víme, že povrch Tritonu je velice mladý a navíc dochází k vulkanické aktivitě, takže Triton je jeden ze tří satelitů (spolu s Io a Enceladem), u kterého byla současná povrchová aktivita potvrzena. Gejzíru podobné erupce dusíku, které vytvářejí tenkou dusíkovou atmosféru, jsou však pravděpodobně způsobené zejména energií ze slunečního záření. Insolace je sice malá, ale stačí k zahřátí a ke zplynění podpovrchového dusíku, zvýšení tlaku a následné erupci. Vnitřní zdroje zde samozřejmě taktéž mohou hrát svoji roli. Skalnaté jádro Tritonu tvoří 72 % jeho hmotnosti a tudíž je zde podstatný zdroj tepla z radioaktivních rozpadů. Existence podpovrchového oceánu je pravděpodobná, pokud voda obsahuje malé množství čpavku. Vzhledem k nedostatku dat nevíme, zda tento oceán, pokud vůbec existuje, se nechází povrchoým ledem a vysokotlakým ledem, nebo zda je v kontaktu se silikátovým jádrem podobně jako v případě Europy.

O měsících Uranu a Neptunu nemáme v současnosti tolik informací jako o měsících Jupiteru a Saturnu a nechystá se ani žádná mise, která by tento svět prozkoumala. Sonda New Horizon je na cestě k Plutu a Cháronu, aby zjistila více informací o těchto tělesech podobných Tritonu.

Kapitola 2

Tepelná bilance ledových měsíců

V této kapitole budeme diskutovat tepelnou bilanci ledových měsíců. Nejdříve provedeme odhad povrchové teploty pomocí Stefan-Boltzmannova zákona, poté budeme vyšetřovat tepelný průběh v nitru ledového měsíce s tepelnými zdroji.

2.1 Odhad teploty na povrchu měsíce

Uvažujme Slunce coby černé těleso, pro které platí Stefan-Boltzmannův zákon

$$U = \sigma T_S^4, \quad (2.1)$$

kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta a T_S teplota na povrchu Slunce. Celkový tepelný výkon vyzářený Sluncem je

$$\Phi_S = 4\pi r_S^2 U, \quad (2.2)$$

kde r_S je poloměr Slunce. Nyní chceme vědět, jaký je tepelný tok procházející měsícem ve vzdálenosti r od Slunce. Vyjdeme z faktu, že hustota tepelného toku, tj. tepelný tok na jednotku plochy, je konstantní

$$\frac{\Phi_S}{S_r} = \frac{\Phi_m}{S_m}, \quad (2.3)$$

Měsíc	α	$T_{vyp}[K]$	$T_{exp}[K]$
Enceladus	$0,81 \pm 0,04$	60 ± 3	75
Mimas	$0,49^{+0,05}_{-0,14}$	77^{+5}_{-2}	74 – 96
Ganymede	$0,32 \pm 0,04$	112 ± 2	110
Europa	0,55	101	102
Callisto	$0,2 \pm 0,4$	116 ± 15	134

Tabulka 2.1: Výpočet povrchové teploty z albeda

kde Φ_m je tok procházející měsícem, $S_r = 4\pi r^2$, $S_m = \pi r_m^2$, r_m je poloměr měsíce. Dosazením do (2.3) snadno dojdeme k výrazu

$$\Phi_m = \frac{\Phi_S S_m}{S_r} = \frac{\sigma T^4 \pi r_S^2 r_m^2}{r^2}. \quad (2.4)$$

Nyní uvažujme, že teplota na povrch měsíce je určena pouze insolací, tedy tepelné zdroje v nitru neexistují, či jsou zanedbatelné. Tepelný tok dopadající na povrch se rovná vyzářenému tepelnému toku

$$(1 - \alpha) \frac{\sigma T^4 \pi r_S^2 r_m^2}{r^2} = \epsilon \sigma T_m^4 4\pi r_m^2, \quad (2.5)$$

kde α je odrazivost (neboli albedo) měsíce, ϵ emisivita materiálu na povrchu (uvažujeme měsíc coby tzv. šedé těleso) a T_m teplota na povrchu. Snadno tak získáme výraz pro povrchovou teplotu

$$T_m = T_S \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha) r_S^2}{4\epsilon r^2}}. \quad (2.6)$$

Výpočty povrchových teplot konkrétních měsíců podle vzorce (2.6) obsahuje tabulka 2.1. Pro výpočty byly použity hodnoty albed z [2]. V posledním sloupci jsou uvedeny experimentálně zjištěné střední hodnoty povrchových teplot [5, 7, 12]. Vidíme, že v případě Enceladu je vypočtená teplota výrazně nižší než naměřená a je tudíž nutné hledat vnitřní tepelné zdroje. Co se týče Mimasu, vypočtená teplota odpovídá teplotě chladnější části. Teploty teplejší části jsou výrazně vyšší a původ tohoto jevu je neznámý. Vypočtené teploty pro Ganymede a Europu jsou téměř totožné s naměřenými, teplota Callisty je však vyšší, což je pravděpodobně důsledek většího výskytu látek, jež dobře absorbují teplo a mají menší emisivitu než čistý led (při výpočtu byla použita emisivita ledu $\epsilon = 0,97$ [13]).

2.2 Model měsíce s radioaktivními zdroji

V této podkapitole budeme diskutovat průběh teploty v nitru měsíce, který je zahříván pouze rozpadem radioaktivních prvků. Uvažujeme sféricky symetrický model měsíce složený ze silikátového jádra a vnějšího ledového pláště. Tento model má smysl pro malé či středně velké měsíce, u nichž není ledový plášť příliš tlustý, takže nedochází k další diferenciaci měsíce vznikem vrstev tvořených vysokotlakým ledem. Budeme hledat stacionární řešení rovnice vedení tepla, tedy předpokládáme, že teplota je pouze funkcí souřadnic, nikoliv času. V takovém případě máme rovnici

$$-k \Delta T(x, y, z) = Q(x, y, z), \quad (2.7)$$

kde k je součinitel tepelné vodivosti, T teplota a Q tepelné zdroje. Přechodem k sférickým souřadnicím dostaneme rovnici

$$-k \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} \right) = Q. \quad (2.8)$$

Rovnici vynásobíme r a substitucí $w = rT$ získáme obyčejnou diferenciální rovnici

$$-k \frac{d^2 w}{dr^2} = rQ. \quad (2.9)$$

Rovnici budeme řešit zvlášť pro jádro a zvlášť pro plášť. V jádře jsou rovnoměrně rozloženy radioaktivní zdroje, tedy Q je konstantní. Dvojitou integrací rovnice (2.9) dostaneme

$$w = -\frac{Q}{k_s} \left(\frac{r^3}{6} + Ar + B \right), \quad (2.10)$$

kde k_s je součinitel tepelné vodivosti pro silikáty. Konstanty určíme z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 = -\frac{Q}{k_s} B, \\ w(r_j) &= r_j T_r = -\frac{Q}{k_s} \left(\frac{r_j^3}{6} + Ar_j + B \right), \\ &\Downarrow \\ B &= 0, \\ A &= -\frac{T_r k_s}{Q} - \frac{r_j^2}{6}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde r_j je poloměr jádra a T_r teplota na rozhraní. Dosazením (2.11) do (2.10) a s uvážením, že $T = \frac{w}{r}$, dostáváme teplotní průběh v jádře

$$T_j(r \leq r_j) = T_r + \frac{Q}{6k_s}(r_j^2 - r^2). \quad (2.12)$$

V plášti nejsou žádné tepelné zdroje, tudíž pravá strana rovnice (2.9) je nulová a jednoduchou integrací zjistíme, že

$$w = Cr + D. \quad (2.13)$$

Opět určíme konstanty z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} w(r_j) &= r_j T_r = Cr_j + D, \\ w(r_m) &= r_m T_s = Cr_m + D, \\ &\Downarrow \\ C(r_m - r_j) &= r_m T_s - r_j T_r, \\ C &= \frac{r_m T_s - r_j T_r}{r_m - r_j}, \\ D &= r_m \left(T_s - \frac{r_m T_s - r_j T_r}{r_m - r_j} \right) = r_m r_j \frac{T_r - T_s}{r_m - r_j}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde r_m je poloměr měsíce a T_s teplota na povrchu. Pro teplotní průběh v plášti tak dostáváme výraz

$$T_p(r \geq r_j) = \frac{r_m T_s - r_j T_r}{r_m - r_j} + \frac{r_m r_j}{r} \frac{T_r - T_s}{r_m - r_j}. \quad (2.15)$$

Povrchová teplota měsíce je známá. Předpokládejme dále spojitost tepelného toku, jenž je úměrný gradientu teploty $\vec{q} = -k \nabla T$, z čehož určíme teplotu na rozhraní

$$\begin{aligned} k_s \nabla T_j|_{r=r_j} &= k_i \nabla T_p|_{r=r_j}, \\ k_s \left(-\frac{Qr}{3k_s} \right) \Big|_{r=r_j} &= k_i \left(-\frac{r_m r_j}{r^2} \frac{T_r - T_s}{r_m - r_j} \right) \Big|_{r=r_j}, \\ \frac{Qr_j}{3} &= k_i \frac{r_m}{r_j} \frac{T_r - T_s}{r_m - r_j}, \\ &\Downarrow \\ T_r &= \frac{Qr_j^2}{3k_i r_m} (r_m - r_j) + T_s, \end{aligned} \quad (2.16)$$

kde k_i je součinitel tepelné vodivosti ledu.

Nejvyšší teplota v ledovém plášti je právě u rozhraní. Provedme tedy konkrétní výpočty. Potřebujeme znát poloměr jádra, který určíme jednoduchým způsobem

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi r_m^3 \rho &= \frac{4}{3}\pi r_j^3 \rho_s + \frac{4}{3}\pi (r_m^3 - r_j^3) \rho_i, \\ r_m^3 (\rho - \rho_i) &= r_j^3 (\rho_s - \rho_i), \\ r_j &= r_m \sqrt[3]{\frac{\rho - \rho_i}{\rho_s - \rho_i}},\end{aligned}\tag{2.17}$$

kde ρ je hustota měsíce, ρ_s hustota silikátů v jádře a ρ_i hustota ledu v plášti.

Zaměříme se na Enceladus. Jeho poloměr je 252 km, hustota $1610 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ [1] a průměrná povrchová teplota 75 K. Hustota silikátů je $\rho_s = 3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, hustota ledu $\rho_i = 960 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ [3], součinitel tepelné vodivosti ledu uvažujeme $k_i = 3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ [14]. Předpokládejme, že objemový tepelný výkon radioaktivních rozpadů je podobný jako v Zemi $Q = 1,8\cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$ [9]. Dosazením do vzorce (2.17) určíme poloměr jádra $r_j = 160 \text{ km}$ a dosazením do (2.16) teplotu na rozhraní $T_r = 94 \text{ K}$. Vidíme tedy, že radioaktivní zdroje jsou zcela nedostatečné pro roztavení ledu a vznik podpovrchového oceánu.

Použijme ještě jednou rovnici (2.16) a tentokrát spočítáme, jak velké by musely být zdroje, aby na rozhraní došlo k dosažení teploty tání ledu. Jednoduchou úpravou a dosazením zjistíme, že potřebný objemový tepelný výkon je $Q \geq 1,9\cdot 10^{-7} \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$, tedy o řád větší. V takovém případě by muselo být zastoupení radioaktivních prvků v jádru Enceladu abnormálně vysoké, což je ovšem nepravděpodobné. K vysvětlení aktivity Enceladu je tedy nutné uvažovat tepelné zdroje v ledovém plášti, což bude předmětem následující podkapitoly.

2.3 Tepelné zdroje v plášti

Hledejme opět stacionární řešení rovnice vedení tepla, tentokrát však budou teplota i tepelné zdroje funkcemi tří prostorových souřadnic:

$$-k \Delta T(r, \vartheta, \varphi) = Q(r, \vartheta, \varphi).\tag{2.18}$$

Chceme najít rozložení teplot v plášti měsíce, jenž má poloměr R_2 a poloměr jádra R_1 , za předpokladu, že známe tepelné zdroje. Okrajové podmínky pro naši úlohu jsou teplota na povrchu měsíce a tepelný tok na rozhraní

jádra a pláště, neboť hodnoty těchto veličiny můžeme určit (viz předchozí podkapitoly).

K řešení využijeme rozvoj do sférických harmonických funkcí (viz příloha A) a vyjádříme T a Q ve formě

$$T(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j T_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.19)$$

$$Q(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j Q_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.20)$$

Místo konkrétní funkce T tak budeme hledat koeficienty rozvoje T_{jm} .

Nejprve se zabýváme Laplaceovou rovnicí $\Delta T = 0$. Sférické harmonické funkce byly zkonstruovány právě tak, aby se řešení Laplaceovy rovnice dalo vyjádřit ve tvaru (2.19), kde koeficienty T_{jm} jsou rovny

$$T_{jm}(r) = A_{jm} r^j + B_{jm} \frac{1}{r^{j+1}}. \quad (2.21)$$

Řešení Poissonovy rovnice $\Delta T(\vec{r}) = -\frac{Q(\vec{r})}{k}$ na omezené oblasti Ω lze vyjádřit ve tvaru

$$T(\vec{r}) = -\frac{1}{k} \int_{\Omega} Q(\vec{r}') \mathcal{E}(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}', \quad (2.22)$$

kde $\mathcal{E}(\vec{r} - \vec{r}')$ je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice, které ve třech dimenzích vypadá takto

$$\mathcal{E}(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.23)$$

Oblast Ω bude v našem případě mezikoulí s poloměrem vnitřní koule R_1 a vnější koule R_2 . Adiční teorém nám říká, že výraz $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ z (2.23) můžeme rozepsat do tvaru

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^j Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.24)$$

pro $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$ a

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \left(\frac{r}{r'}\right)^{j+1} Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.25)$$

pro $|\vec{r}| < |\vec{r}'|$, kde * značí komplexní sdružení. Dosaďme (2.19) a (2.24) do (2.22) a dostaneme

$$\begin{aligned}
T(\vec{r}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j T_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \\
&= \frac{1}{kr} \int_{\Omega} Q(r', \vartheta', \varphi') \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^j Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{jm}(\vartheta, \varphi) d\vec{r}' \\
&= \frac{1}{kr} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \int_{\Omega} Q(r', \vartheta', \varphi') \left(\frac{r'}{r}\right)^j Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') d\vec{r}' Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \\
&\Downarrow \\
T_{jm}(r) &= \frac{1}{kr(2j+1)} \int_{\Omega} Q(r', \vartheta', \varphi') \left(\frac{r'}{r}\right)^j Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') d\vec{r}'. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Toto platí pro $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$. Analogicky, použitím (2.25) bychom získali výraz pro $|\vec{r}| < |\vec{r}'|$

$$T_{jm}(r) = \frac{1}{kr(2j+1)} \int_{\Omega} Q(r', \vartheta', \varphi') \left(\frac{r}{r'}\right)^{j+1} Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') d\vec{r}'. \tag{2.27}$$

Dále rozepíšeme i tepelné zdroje ve tvaru (2.20) a užijeme relaci ortonormality (A.5). Nejprve pro $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$

$$\begin{aligned}
T_{jm}(r) &= \frac{1}{kr(2j+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^k \int_{\Omega} \left(\frac{r'}{r}\right)^j Q_{kn}(r') Y_{kn}(\vartheta', \varphi') Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') d\vec{r}' \\
&= \frac{1}{kr(2j+1)} \int_{R_1}^r \left(\frac{r'}{r}\right)^j Q_{kn}(r') \delta_{kj} \delta_{nm} r'^2 dr' \\
&\Downarrow \\
T_{jm}(r) &= \frac{1}{k(2j+1)r^{j+1}} \int_{R_1}^r (r')^{j+2} Q_{jm}(r') dr'. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

A analogicky pro $|\vec{r}| < |\vec{r}'|$

$$T_{jm}(r) = \frac{r^j}{k(2j+1)} \int_r^{R_2} (r')^{-j+1} Q_{jm}(r') dr'. \tag{2.29}$$

V dalším výkladu si pro zjednodušení zápisu rovnic provedeme označení

$$I_{jm}^1(r) = \int_{R_1}^r (r')^{j+2} Q_{jm}(r') dr', \quad (2.30)$$

$$I_{jm}^2(r) = \int_r^{R_2} (r')^{-j+1} Q_{jm}(r') dr'. \quad (2.31)$$

Hledané řešení rovnice (2.18) vyhovující daným okrajovým podmínkám je superpozicí řešení Poissonovy rovnice a homogenní Laplaceovy rovnice

$$T_{jm}(r) = \frac{1}{k(2j+1)r^{j+1}} I_{jm}^1(r) + \frac{r^j}{k(2j+1)} I_{jm}^2(r) + A_{jm} r^j + B_{jm} \frac{1}{r^{j+1}}, \quad (2.32)$$

kde konstanty A_{jm} a B_{jm} určíme z okrajových podmínek. Známou povrchovou teplotu $\mathcal{T}(\vartheta, \varphi)$ rozložíme do sférických harmonických funkcí a můžeme napsat první podmínku

$$\frac{1}{k(2j+1)} \left[\frac{I_{jm}^1(R_2)}{R_2^{j+1}} + R_2^j I_{jm}^2(R_2) \right] + A_{jm} R_2^j + \frac{B_{jm}}{R_2^{j+1}} = \mathcal{T}_{jm}. \quad (2.33)$$

Druhá podmínka bude tepelný tok proudící z jádra. Ten si můžeme položit nule, protože uvažujeme dvouvrstvý model, který je vhodný pro malé či středně velké měsíce typu Enceladu, a v takovém případě je teplo produkované radioaktivními rozpady v jádře malé, jak jsme viděli v předchozí podkapitole. Protože potřebujeme zdroje alespoň o řád větší, můžeme tepelný tok z jádra zanedbat. To znamená, že v bodě R_1 bude nulová derivace

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(2j+1)} \left[\frac{-(j+1)}{R_1^{j+2}} I_{jm}^1(R_1) + \frac{1}{R_1^{j+1}} \frac{dI_{jm}^1}{dr}(R_1) + j R_1^{j-1} I_{jm}^2(R_1) + R_1^j \frac{dI_{jm}^2}{dr}(R_1) \right] + \\ + j A_{jm} R_1^{j-1} - (j+1) \frac{B_{jm}}{R_1^{j+2}} = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Z (2.33) a (2.34) tak získáme hledané výrazy pro konstanty

$$A_{jm} = \frac{j+1}{2j+1} (\mathcal{T}_{jm} - X_{jm}^1) \frac{1}{r^j}, \quad (2.35)$$

$$B_{jm} = \frac{X_{jm}^2}{j+1} r^{j+2} + \frac{j}{2j+1} (\mathcal{T}_{jm} - X_{jm}^1) r^{j+1}, \quad (2.36)$$

kde jsme provedli označení

$$X_{jm}^1 = \frac{1}{k(2j+1)} \left[\frac{I_{jm}^1(R_2)}{R_2^{j+1}} + R_2^j I_{jm}^2(R_2) \right], \quad (2.37)$$

$$X_{jm}^2 = \frac{1}{k(2j+1)} \left[\frac{-(j+1)}{R_1^{j+2}} I_{jm}^1(R_1) + \frac{1}{R_1^{j+1}} \frac{dI_{jm}^1}{dr}(R_1) + \right. \\ \left. + j R_1^{j-1} I_{jm}^2(R_1) + R_1^j \frac{dI_{jm}^2}{dr}(R_1) \right]. \quad (2.38)$$

Zrekapitulujem si nyní, k čemu jsme dospěli. Hledali jsme stacionární řešení rovnice vedení tepla (2.18) na mezikouli, přičemž předepsané okrajové podmínky byly povrchová teplota na vnější sféře a nulový tepelný tok na vnitřní sféře. Využili jsme rozvoje do sférických harmonických funkcí a našli řešení pro koeficienty rozvoje T_{jm} (2.32), kde konstanty A_{jm} a B_{jm} jsou určeny (2.35) a (2.36).

Pokud bychom tedy znali $Q(r, \vartheta, \varphi)$, můžeme určit kompletní teplotní rozložení v plášti měsíce. Zjistit charakter tepelných zdrojů v plášti však je obecně složité. Například pokud budeme uvažovat slapovou disipaci, tak tepelný výkon závisí na reologických vlastnostech ledu (blíže viz [5]), které navíc mohou být funkcemi prostorových souřadnic (a v případě Enceladu či Mimasu pravděpodobně taktéž jsou), takže se jedná o netriviální úlohu. Zkoumání charakteru tepelných zdrojů v plášti a následné použití v rovnici vedení tepla tak může být předmětem další práce.

Závěr

Ledové měsíce jsou v posledních letech předmětem intenzivního bádání. V této práci jsme v první části shrnuli současné poznatky o ledových měsících a poskytli tak čtenáři možnost seznámit se s tímto tématem v českém jazyce.

V druhé části jsme se zaměřili na tepelnou bilanci ledových měsíců. Na základě Stefan-Boltzmannova zákona jsme odhadli průměrnou povrchovou teplotu a provedli jsme konkrétní výpočty pro některé satelity. Dále jsme uvažovali dvouvrstvý model měsíce, který je tvořený ledovým pláštěm a silikátovým jádrem, a hledali jsme stacionární řešení rovnice vedení tepla se zdroji. Nejprve jsme uvažovali rovnoměrně rozložené tepelné zdroje z radioaktivních rozpadů v jádře. Konkrétně v případě Enceladu se ukázalo, že tyto zdroje jsou nedostatečné pro vysvětlení jeho tepelné aktivity. Poté jsme pracovali s obecnými tepelnými zdroji v plášti, využili jsme rozvoje do sférických harmonických funkcí a našli řešení pro koeficienty v rozvoji teploty. Odvozené vztahy lze použít pro výpočet teplotního rozložení uvnitř ledového měsíce, pokud známe rozložení tepelných zdrojů. Vhodným pokračováním této práce by tedy byl vývoj různých modelů tepelných zdrojů v plášti a jejich následná verifikace prostřednictvím námi nalezeného řešení.

Příloha A

Sférické harmonické funkce

V této kapitole uvádíme základní poznatky o sférických harmonických funkcích. Jedná se o stručný přehled vztahů a vlastností, které jsme použili v podkapitole 2.3 (více např. v [4, 6]).

Nechť S je jednotková sféra v prostoru R^3 a C^∞ je prostor nekonečněkrát diferencovatelných komplexních funkcí na S . Pro prostor C^∞ definujeme kanonickou bázi Y_{jm} , ($j = 0, 1, \dots, \infty$; $m = -j, \dots, j$)

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m N_{jm} P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (\text{A.1})$$

pro $m \geq 0$ a

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{j|m|}^*(\vartheta, \varphi), \quad (\text{A.2})$$

pro $m < 0$. $Y_{jm}(\vartheta, \varphi)$ nazýváme sférické harmonické funkce, j je stupeň dané funkce a m je její řád. N_{jm} je normalizační faktor

$$N_{jm} = \sqrt{\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!}}, \quad (\text{A.3})$$

a $P_{jm}(\cos \vartheta)$ jsou přidružené Legendrovy funkce

$$P_{jm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x) \quad (\text{A.4})$$

definované pro $m \geq 0$, kde $P_j(x)$ jsou Legendrovy polynomy, které můžeme definovat předpisem

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j. \quad (\text{A.5})$$

Sférické harmonické funkce splňují v L_2 normě relaci ortonormality

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{jm}(\vartheta, \varphi) Y_{kn}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \delta_{jk} \delta_{mn}. \quad (\text{A.6})$$

Mějme funkci $f(r, \vartheta, \varphi) \in L_2(S \times R)$, která má spojitě derivace alespoň do druhého řádu. Pak tuto funkci můžeme rozvinout v řadu

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (\text{A.7})$$

kde koeficienty $f_{jm}(r)$ jsou dány

$$f_{jm}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (\text{A.8})$$

Vzhledem ke spojitosti druhých derivací konverguje řada na pravé straně (A.7) k $f(r, \vartheta, \varphi)$ stejnoměrně, a tudíž

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |f_{jm}(r)| = 0. \quad (\text{A.9})$$

Je-li navíc $f(r, \vartheta, \varphi)$ reálná, platí symetrie

$$f_{j,-m}(r) = (-1)^m f_{jm}^*(r). \quad (\text{A.10})$$

Sférické harmonické funkce tvoří úhlovou část řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích

$$\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Řešení můžeme hledat ve tvaru $f(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$ separací proměnných. Pak zjistíme, že úhlové části odpovídají (A.1) a radiální části odpovídají

$$R_j(r) = Ar^j + Br^{-j-1}. \quad (\text{A.12})$$

Sférické harmonické funkce jsou vlastními funkcemi Laplaceova operátoru. Platí

$$\Delta Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{j(j+1)}{r^2} Y_{jm}(\vartheta, \varphi). \quad (\text{A.13})$$

Literatura

- [1] Jacobsen, R. A., Antreasian, P. G., Bordi, J. J., Criddle, K. E., Ionasescu, R., Jones, J. B., Mackenzie, R. A., Meek M. C., Parcher, D., Pelletier, F. J., Owen, W. M., Roth, D. C., Roundhill, I. M., Stauch, J. R.: The Gravity Field of the Saturnian System from Satellite Observations and Spacecraft Tracking Data, *Astr. J.* 132, 2520 – 2526, 2006.
- [2] Howett, C. J. A., Spencer, J. R., Pearl, J., Segura, M.: Thermal inertia and bolometric Bond albedo values for Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea and Iapetus as derived from Cassini/CIRS measurements, *Icarus* 206, 573 – 593, 2010.
- [3] Hussmann, H., Sotin, Ch., Lunine, J. I.: Interiors and evolution of icy satellites, *Treatise on Geophysics, vol. 10 (Planets and Moons)*, 509 – 540, 2007.
- [4] Jones, M. N.: *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*, Research Studies Press Ltd., 1985.
- [5] Maierová, P.: *Vliv slapového zahřívání na děje v nitrech ledových měsíců*, bakalářská práce, MFF UK, 2006.
- [6] Matas, J.: *Mantle Viscosity and Density Structure*, diplomová práce, MFF UK, 1995.
- [7] NASA: *Bizarre Temperatures on Mimas*, http://www.nasa.gov/mission_pages/cassini/multimedia/pia12867.html, 2010.
- [8] NASA JPL: *Saturnian Moon Shows Evidence of Ammonia*, <http://www.jpl.nasa.gov/news/features.cfm?feature=2238>, 2009.

- [9] Stacey, F. D., Davis, P. D.: *Physics of the Earth*, Cambridge University Press, 2008.

Internetové stránky

- [10] *Cassini Equinox Mission*, <http://saturn.jpl.nasa.gov/index.cfm>
- [11] <http://photojournal.jpl.nasa.gov/>
- [12] *Solar System Exploration*, <http://solarsystem.jpl.nasa.gov/index.cfm>
- [13] *The Engineering ToolBox*,
http://www.engineeringtoolbox.com/emissivity-coefficients-d_447.html
- [14] *The Engineering ToolBox*,
http://www.engineeringtoolbox.com/ice-thermal-properties-d_576.html