

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ondřej Peisar

Jouleovské zahřívání Merkurů

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná Fyzika

Praha 2011

Chtěl bych poděkovat svému školiteli RNDr. Jakubu Velímskému, Ph.D. za pečlivé a obětavé vedení práce a trpělivost při nesčetných konzultacích. Také bych chtěl poděkovat RNDr. Marii Běhounkové, Ph.D. za poskytnuté odhady k diskusi mechanismů zahřívání pláště.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 27. 5. 2011

Ondřej Peisar

Název práce: Jouleovské zahřívání Merkuru

Autor: Ondřej Peisar

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: V této práci zkoumáme vliv vnitřního a vnějšího magnetického pole na plášťové zahřívání Merkuru. Vnější pole je indukováno proudy v magnetosféře, vnitřní pole je buzeno dynamem v jádře, které je obklopeno stabilně stratifikovanou vrstvou. Po shrnutí základních známých poznatků o planetě odvodíme vztah pro magnetické pole na povrchu planety a pole na spodní hranici výpočetní oblasti. Následně zkoumáme vliv vodivostních odhadů a period na produkci tepla v plášti. Zjistili jsme, že pro předpokládané vodivosti (železné jádro, silikátový plášť) nemá magnetické pole výraznější vliv na plášťovou konvekci.

Klíčová slova: Merkur, magnetické pole, vrstevnatý model

Title: Joule heating of Mercury

Author: Ondřej Peisar

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: In this paper we investigate influence of the interior and exterior magnetic fields on mantle heating of Mercury. Exterior field is induced by currents in the magnetosphere, interior field is generated by dynamo deep in the planetary core, whose outer layer is stably stratified. After summarization of basic facts about Mercury we derive a formula for magnetic field on the surface and on the inner boundary. Afterwards we investigate the influence of conductivity estimates and periods on heat production in the mantle. We found out that for expected conductivities (iron core, silicate mantle) magnetic field doesn't have any influence on mantle convection.

Keywords: Mercury, magnetic field, layered model

Obsah

Úvod	2
1 Matematická formulace	4
1.1 Odvození Helmholtzovy rovnice	4
1.2 Složky vektoru magnetické indukce	5
1.3 Maticová formulace	7
1.4 Výpočet jouleovského tepla	9
2 Výsledky	11
2.1 Vnější pole	11
2.2 Vnitřní pole	16
Závěr	20
A Sférické Besselovy funkce	21
B Sférické harmonické funkce	23
Seznam použité literatury	25
Seznam použitých zkratk	27

Úvod

První kosmickou sondou, která se přiblížila Merkuru, byl Mariner 10, jenž v letech 1974/75 během svých tří průletů okolo planety zmapoval přibližně 40 % až 45 % povrchu. Během těchto průletů také naměřil slabé magnetické pole. Společně s pozdějšími průlety sondy Messenger ukázal, že se hranice magnetosféry nachází relativně blízko k povrchu planety. Dále objevil, že má Merkur velké železné jádro. Druhou a současně poslední sondou vyslanou k Merkuru je Messenger (*MERCURY Surface, Space ENVIRONMENT, GEOCHEMISTRY AND RANGING*). Po vypuštění v roce 2004 podnikl krom průletů kolem Venuše tři průlety kolem Merkuru a následně byl 18. března 2011 naveden na jeho oběžnou dráhu. Během dvou průletů v roce 2008 a třetího v roce 2009 Messenger nasbíral důkazy podporující teorii tekutého jádra. Další misí, momentálně stále ve fázi plánování, je BepiColombo, společný projekt Evropské Vesmírné Agentury (ESA) a Japonské agentury pro letecký průzkum (JAXA). Předpokládaný start je momentálně určen na rok 2014 s plánovaným dosáhnutím orbity v roce 2020. Plánovaná povrchová sonda (*MERCURY Surface Element*, MSE) byla pro technologické potíže a rozpočtová omezení zrušena.

Merkur je nejmenší planetou sluneční soustavy a zároveň je planetou Slunci nejbližší s oběžnou dobou 87,9 dní. Doba rotace je 58,6 dne. Nemá žádný přirozený satelit a jeho zmapovaný povrch připomíná měsíční krajinu, avšak existují důkazy o tektonické aktivitě. Předpokládá se velké tekuté jádro s možností existence malého pevného vnitřního jádra. Vnitřní struktura je určena na základě jednoduchých fyzikálních principů a srovnání se Zemí.

Z již proběhlých měření vesmírných sond je zřejmé, že magnetické pole Merkuru je velmi slabé, přibližně 1 % síly Zemského magnetického pole. Jádro je alespoň částečně kapalně a kromě železa obsahuje i lehčí prvky. Magnetické pole Merkuru je slabé a dominantně dipolární, ačkoliv teorie i numerické simulace planetárních dynam pro Merkur předpovídají spíše multipolární režim. K vysvětlení bylo navrženo několik různých alternativ. Jednou z nich je model dynam s velkým vnitřním jádrem [1], ve kterém je slabé pole výsledkem omezení na konvekci pouze v malé části tekutého objemu jádra. Dalším možným vysvětlením je, že vzhledem k tenkému plášti je magnetohydrodynamická (MHD) aktivita ovlivněna vnějším polem, jež reguluje přechod mezi dipolárním a multipolárním režimem [5]. Toto vnější pole je indukováno proudy v magnetosféře. Kromě jiných, exotičtějších, vysvětlení (např. termo-elektrické dynamo), bylo k vysvětlení slabého magnetického pole navrženo Christensenem [4] dynamo operující pouze v části kapalného jádra, a překryté vysoce vodivou, ale termálně stabilně stratifikovanou vrstvou. Tento návrh je motivován termálně-evolučními modely, které naznačují, že tepelný tok skrz hranici jádra a pláště je sub-adiabatický. Dynamo je tedy "pouze ve vnitřním jádře a dynamem generované pole se musí šířit skrz stabilně stratifikovanou železnou vrstvu" [4].

V této práci vycházím z posledně zmíněného modelu Christensenova. Vzhledem k pomalé rotaci Merkuru ve výsledném magnetickém poli převládají malé, časově velmi proměnlivé složky. Pole dynam se pak šíří skrz stabilně vodivou oblast, kde jsou tyto časově proměnlivé části silně zeslabené skin efektem, zatímco slabě časově proměnlivé dipólové a kvadrupólové složky projdou skrz. Tento model vysvětlený v již zmíněném článku [4] "dává odhady, které lze ověřit probí-

hajícími a plánovanými vesmírnými misemi (Messenger, BepiColombo)".

Vzhledem k malé velikosti vnitřního magnetického pole Merkuru ve srovnání se Zemí a blízkosti Slunce hraje významnější roli též pole magnetosféry ???. Časové změny magnetosférického pole také indukují sekundární proudy v plášti, které mohou přispívat ohmickou disipací k tepelné bilanci planety.

Cílem této práce je kvalifikovaně odhadnout možný vliv jouleovského zahřívání (neboli ohmické disipace) způsobeného časovými změnami jak vnějšího, tak vnitřního pole na plášťovou konvekci Merkuru. Získané výsledky následně porovnááme s existujícími odhady zahřívání pláště jinými způsoby (rozpad radioaktivních prvků, slapové zahřívání).

Práce je strukturovaná následovně. V první kapitole rozebíráme matematický model a odvozujeme důležité vztahy použité při výpočtech. V druhé kapitole pak uvádím výsledky zvláště pro vnější pole a zvláště pro vnitřně buzené magnetické pole. V příloze A věnuji pozornost užitečným vztahům pro Besselovy funkce prvního a druhého druhu a v příloze B vztahům pro sférické harmonické funkce.

1. Matematická formulace

V této kapitole se věnujeme popisu matematického modelu řešené úlohy. Uvažujeme sférickou vrstvu s po částech konstantní vodivostí v nevodivém prostoru. Z omezení na vodivosti plyne, že řešíme úlohu pro sféricky symetrický vrstevnatý model (náčrtek viz 1.1).

Dále vycházíme ze soustavy Maxwellových rovnic v kvazistacionárním tvaru:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.4)$$

Zde \vec{E} , resp. \vec{B} značí elektrickou intenzitu, resp. magnetickou indukci pole, μ_0 permeabilitu a \vec{j} objemovou hustotu elektrického proudu. Přehled použitého značení je uveden na konci této práce.

1.1 Odvození Helmholtzovy rovnice

Uvažujme obecnou vrstvu s z našeho sférického modelu 1.1. Dále předpokládejme platnost Ohmova zákona v podobě

$$\vec{j} = \sigma_s \vec{E}. \quad (1.5)$$

Jak již bylo zmíněno, předpokládáme σ_s pro každou vrstvu konstantní. Aplikací rotace na rovnici (1.4) přejdeme k rovnici

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \sigma_s \nabla \times \vec{E}. \quad (1.6)$$

Využitím identity vektorové analýzy (uvedena pro obecné vektorové pole \vec{A})

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (1.7)$$

Faradayova zákona (1.3) a bezdivergentnosti pole (1.2) přejdeme k vlnové rovnici

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \sigma_s \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0. \quad (1.8)$$

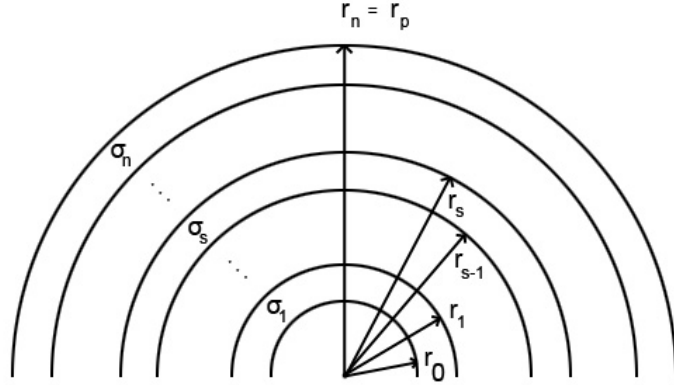
Provedeme-li časovou derivaci na harmonickou časovou závislost pole

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 2\Re \left[\hat{\vec{B}}(r) \exp(-i\omega t) \right], \quad (1.9)$$

přičemž stříšku pro jednoduchost dále nepíšeme, a použijeme označení $k_s^2 = i\mu_0 \sigma_s \omega$ dostaneme konečný vztah

$$\Delta \vec{B} + k_s^2 \vec{B} = 0, \quad (1.10)$$

známý jako Helmholtzova rovnice.



Obrázek 1.1: Náčrtek použitého vrstevnatého modelu s hraničními poloměry r_0 (spodní hranice) a r_p (svrchní hranice). Ve vrstvě ohraničené poloměry (r_{s-1}, r_s) předpokládáme konstantní vodivost σ_s .

1.2 Složky vektoru magnetické indukce

Vektor magnetického pole uvnitř vodiče lze popsat součtem nekonečné řady obsahující sférické Besselovy funkce I. a II. druhu a sférické harmonické funkce:

$$\vec{B} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j-1}^{j+1} \alpha_{jm}^l w_l(kr) \vec{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi), \quad (1.11)$$

přičemž koeficienty α jsou po vrstvách konstantní. Zde chápeme zápis $\alpha_{jm}^l w_l$ jako lineární kombinaci sférických Besselových funkcí I. a II. druhu řádu l . Krátké shrnutí vztahů pro sférické Besselovy funkce uvádím v Dodatku A.

Nebudeme uvažovat toroidální pole, které ve sféricky symetrickém modelu může být buzeno pouze na spodní hranici oblasti. Předpokládáme, že jouleovské teplo generované toroidálním polem dynamo bude řádově srovnatelné s efektem pole poloidálního. Nadále tedy pokládáme $\alpha_{jm}^j = 0$. Z podmínky na splnění (1.2) dostaneme vztah mezi koeficienty α :

$$\alpha_{jm}^{j+1} = -\sqrt{\frac{j}{j+1}} \alpha_{jm}^{j-1}. \quad (1.12)$$

V nevodivé oblasti lze elektromagnetické pole jednoznačně popsat skalárním magnetickým potenciálem

$$U = r_p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left[\left(\frac{r}{r_p}\right)^j G_{jm}^{(e)} + \left(\frac{r_p}{r}\right)^{j+1} G_{jm}^{(i)} \right] Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.13)$$

kde $G_{jm}^{(e)}$, resp. $G_{jm}^{(i)}$, jsou příspěvky vnějšího, resp. vnitřního pole a $r > r_p$ je radiální vzdálenost. Potom

$$\vec{B} = -\nabla U = -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left[\sqrt{j(2j+1)} \left(\frac{r}{r_p}\right)^{j-1} G_{jm}^{(e)} \vec{Y}_{jm}^{j-1}(\vartheta, \varphi) \right]$$

$$+ \sqrt{(j+1)(2j+1)} \left(\frac{r_p}{r}\right)^{j+2} G_{jm}^{(i)} \vec{Y}_{jm}^{j+1}(\vartheta, \varphi)]. \quad (1.14)$$

Ze vztahu (1.12) mezi koeficienty α a při znalosti rekurzí pro sférické Besselovy funkce (A.12) až (A.14) získáme vyjádření radiální složky pole

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{B}_s &= \sum_{jm} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \alpha_{jm}^{j-1} [w_{j-1}(k_s r) + w_{j+1}(k_s r)] Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{jm} \sqrt{j(2j+1)} \alpha_{jm}^{j-1} \frac{w_j(k_s r)}{k_s r} Y_{jm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.15)$$

a tečné složky pole

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \times \vec{B}_s &= i \sum_{jm} \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \alpha_{jm}^{j-1} [w_{j-1}(k_s r) - \frac{j}{j+1} w_{j+1}(k_s r)] \vec{Y}_{jm}^j(\vartheta, \varphi) \\ &= i \sum_{jm} \sqrt{\frac{2j+1}{j+1}} \alpha_{jm}^{j-1} \frac{1}{k_s r} \frac{d}{dr} (r w_j(k_s r)) \vec{Y}_{jm}^j, \end{aligned} \quad (1.16)$$

uvnitř s -té vrstvy. Zavedení funkcí odpovídajících horizontální, resp. vertikální, složce pole, které jsou lineární kombinací sférických Besselových funkcí I. a II. druhu,

$$h_{jm}(r) := \alpha_{jm}^{j-1} \frac{1}{k_s r} w_j(k_s r) \quad (1.17)$$

$$t_{jm}(r) := \frac{d}{dr} (r w_j(k_s r)) \frac{\alpha_{jm}^{j-1}}{k_s} \quad (1.18)$$

vede na jednodušší zápis vztahů pro radiální (1.15) a tečnou (1.16) složku:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{B}_s = \frac{1}{r} \sum_{jm} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} h_{jm}(r) Y_{jm}, \quad (1.19)$$

$$\vec{e}_r \times \vec{B}_s = \frac{i}{r} \sum_{jm} \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} t_{jm}(r) \vec{Y}_{jm}^j. \quad (1.20)$$

1.3 Maticová formulace

V této sekci vycházíme z článku [2] a odvodíme vztah mezi polem na povrchu a spodní hranici řešené oblasti.

Pokud si rozepíšeme funkce $h_{jm}(r)$ a $t_{jm}(r)$ z předešlé sekce:

$$h_{jm}(r) = \frac{\alpha_{jm}^{j-1}}{k_s} w_j(k_s r) = a_{jm}^s j_j(k_s r) + b_{jm}^s y_j(k_s r) \quad (1.21)$$

$$t_{jm}(r) = a_{jm}^s \frac{d}{dr} (r J_j(k_s r)) + b_{jm}^s \frac{d}{dr} (r y_j(k_s r)) \quad (1.22)$$

vidíme, že k nim můžeme přistupovat v maticovém vyjádření

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r) = A_j^s(r) \begin{pmatrix} a_{jm}^s \\ b_{jm}^s \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

kde 2x2 matice $A_j^s(r)$ obsahuje sférické Besselovy funkce I. a II. druhu a jejich derivace

$$A_j^s(r) = \begin{pmatrix} j_j(k_s r) & y_j(k_s r) \\ \frac{d}{dr} (r j_j(k_s r)) & \frac{d}{dr} (r y_j(k_s r)) \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Pokud pro libovolnou vybranou vrstvu s vezmeme maticový vztah na dolní a horní hranici,

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_{s-1}) = A_j^s(r_{s-1}) \begin{pmatrix} a_{jm}^s \\ b_{jm}^s \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_s) = A_j^s(r_s) \begin{pmatrix} a_{jm}^s \\ b_{jm}^s \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

eliminací koeficientů a_{jm}^s a b_{jm}^s získáme maticový vztah pro funkce $h_{jm}(r)$ a $t_{jm}(r)$ na jednotlivých hranicích uvažované vrstvy

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_s) = A_j^s(r_s) [A_j^s(r_{s-1})]^{-1} \begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_{s-1}). \quad (1.27)$$

Pokud na sebe postupně navážeme výrazy na jednotlivých vrstvách, dostaneme vztah pro pole na spodní hranici řešené oblasti (poloměr r_0) a pole na povrchu (poloměr r_p)

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_p) = \begin{pmatrix} -\frac{r_p}{\sqrt{j(2j+1)}} [j G_{jm}^{(e)} - (j+1) G_{jm}^{(i)}] \\ -r_p (j+1) \sqrt{\frac{j}{2j+1}} [G_{jm}^{(e)} + G_{jm}^{(i)}] \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_0), \quad (1.28)$$

kde jsme zavedli označení

$$C = \prod_{s=N}^2 B^s, \quad (1.29)$$

$$B^s = A_j^s(r_s) [A_j^s(r_{s-1})]^{-1}. \quad (1.30)$$

Na horní hranici jsme aplikovali spojitost horizontální a tečné složky \vec{B} a použili rozklad (1.14) do horizontální a tečné složky. B^s je přenosová matice s -té vrstvy a je dána výrazem (viz [2])

$$B_j^s = \begin{pmatrix} P_j + z_2 Q_j & -P_j \\ P_j + z_1 R_j + z_2 Q_j + z_1 z_2 S_j & -P_j - z_1 R_j \end{pmatrix} z_2, \quad (1.31)$$

kde $z_1 = k_s r_s$ a $z_2 = k_s r_{s-1}$. Křížové součiny sférických Besselových funkcí jsou dány rekurzemi:

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= S_j + \frac{j^2}{z_1 z_2} P_j - \frac{j}{z_1} Q_j - \frac{j}{z_2} R_j, \\ Q_{j+1} &= \frac{j}{z_1} P_j - \frac{j+2}{z_2} P_{j+1} - R_j, \\ R_{j+1} &= \frac{j}{z_2} P_j - \frac{j+2}{z_1} P_{j+1} - Q_j, \\ S_{j+1} &= R_j - \frac{(j+2)^2}{z_1 z_2} P_{j+1} - \frac{j+2}{z_1} Q_{j+1} - \frac{j+2}{z_2} R_{j+1}. \end{aligned}$$

Počáteční podmínky a kontrolní součin po každé iteraci mají tvar:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\sin(z_2 - z_1)}{z_1 z_2}, \\ Q_0 &= \frac{\cos(z_2 - z_1)}{z_1 z_2} - \frac{\sin(z_2 - z_1)}{z_1 z_2^2}, \\ R_0 &= -\frac{\cos(z_2 - z_1)}{z_1 z_2} - \frac{\sin(z_2 - z_1)}{z_1^2 z_2}, \\ S_0 &= \frac{\sin(z_2 - z_1)}{z_1 z_2} - \frac{\cos(z_2 - z_1)}{z_1^2 z_2} + \frac{\cos(z_2 - z_1)}{z_1 z_2^2} + \frac{\sin(z_2 - z_1)}{z_1^2 z_2^2}, \\ P_j S_j - Q_j R_j &= \frac{1}{z_1^2 z_2^2}. \end{aligned}$$

Tento přístup rozebraný v [2] funguje spolehlivě pro $z_i \sim 1$, pro námi používané parametry je však $z_i \sim 10^{-3}$ a pro takové hodnoty uvedená metoda výpočtu z numerických důvodů selhává s rostoucím stupněm j . Proto jsme se rozhodli napočítat přenosové matice ze vztahu (1.30) přímým vyčíslováním odpovídajících sférických Besselových funkcí. Tvar matice $A_j^s(r_s)$ známe, viz (1.24).

Zaveďme dočasné do konce této sekce označení

$$\begin{aligned} J_1 &= j_j(z_1), \quad \text{resp.} \quad J_2 = j_j(z_2), \\ Y_1 &= y_j(z_1), \quad \text{resp.} \quad Y_2 = y_j(z_2). \end{aligned} \quad (1.32)$$

V souladu s právě zavedeným značením bude mít matice $[A_j^s(r_{s-1})]^{-1}$ tvar

$$[A_j^s(r_{s-1})]^{-1} = \frac{1}{J_2 Y_2' - J_2' Y_2} \begin{pmatrix} Y_2' & -Y_2 \\ -J_2' & J_2 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

v němž čárkou u Besselovy funkce značíme derivaci po přenásobení r , čili $J_i' = \frac{d}{dr}(r J_i(k_s r))$. Přenosová matice tak dostane tvar

$$B^s = A_j^s(r_s) [A_j^s(r_{s-1})]^{-1} = \frac{1}{J_2 Y_2' - J_2' Y_2} \begin{pmatrix} J_1 Y_2' - J_2' Y_1 & -J_1 Y_2 + J_2 Y_1 \\ J_1' Y_2' - J_2' Y_1' & J_2 Y_1' - J_1' Y_2 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

V numerických výpočtech vyčíslujeme Besselovy funkce pomocí volně dostupné knihovny slatec [17]. Jejich derivace pak vztahem odvozeným z A.12 až A.14, tudíž

$$\frac{d}{dz}(zw_j(z)) = zw'_j(z) + w_j(z) = w_j(z) + z(w_{j-1}(z) - \frac{j+1}{z}w_j(z)) = zw_{j-1}(z) - jw_j(z). \quad (1.35)$$

1.4 Výpočet jouleovského tepla

V této sekci opět rozlišujeme časovou a frekvenční oblast. Vycházíme ze vzorce pro okamžitou hustotu výkonu magnetického pole

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} (\nabla \times \vec{B})^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} \left[(\nabla \times \hat{\vec{B}}) \exp(i\omega t) + (\nabla \times \hat{\vec{B}}) \exp(-i\omega t) \right]^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0^2 \sigma} \left[(\nabla \times \hat{\vec{B}})^2 \exp(2i\omega t) + (\nabla \times \hat{\vec{B}}^*)^2 \exp(-2i\omega t) \right. \\ &\quad \left. + 2(\nabla \times \hat{\vec{B}}) \cdot (\nabla \times \hat{\vec{B}}^*) \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Protože nás zajímá střední hodnota přes delší časový úsek, musíme hustotu výkonu středovat přes periodu T

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_0^T q dt. \quad (1.37)$$

Vzhledem k tomu, že první dva členy okamžité hustoty výkonu jsou harmonické, při integrování přes periodu jsou nulové, tak pro střední hodnotu hustoty výkonu dostáváme vztah

$$\bar{q} = \frac{2}{\mu_0^2 \sigma} (\nabla \times \hat{\vec{B}}) \cdot (\nabla \times \hat{\vec{B}}^*). \quad (1.38)$$

Střední hodnota výkonu je objemový integrál hustoty výkonu

$$\bar{Q} = \int_V \bar{q} dV. \quad (1.39)$$

Použitím vzorců pro sférické harmoniky (viz Dodatek B) získáme pro rotaci vektoru magnetického pole v s -té vrstvě

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{B}) &= \sum_{jm} \alpha^{j-1} [-ik_s \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} w_j \vec{Y}_{jm}^j] + \alpha^{j-1} [ik_s \sqrt{\frac{j}{2j+1}} w_j \vec{Y}_{jm}^j] \\ &= \sum_{jm} ik_s w_j \vec{Y}_{jm}^j [-\alpha^{j-1} \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} - \sqrt{\frac{j}{j+1}} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \alpha^{j-1}] \\ &= \sum_{jm} -ik_s \alpha^{j-1} w_j \vec{Y}_{jm}^j \frac{j+1+j}{\sqrt{(j+1)(2j+1)}} \\ &= \sum_{jm} -ik_s \alpha^{j-1} w_j \vec{Y}_{jm}^j \sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Díky tomu získáme již úhlově nezávislý výraz pro střední hodnotu výkonu

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \sum_{jm} \int_r \frac{2}{\mu_0^2 \sigma} \left| -ik\alpha^{j-1} w_j(kr) \sqrt{\frac{2j+1}{j+1}} \right|^2 r^2 dr \\ &= \sum_{jm} \int_r \frac{2}{\mu_0^2 \sigma} \left| -ik\alpha^{j-1} w_j(kr) \right|^2 \frac{2j+1}{j+1} r^2 dr,\end{aligned}\quad (1.41)$$

kde samozřejmě k a σ chápeme jako po částech konstantní funkce nabývající hodnot k_s, σ_s na intervalech (r_{s-1}, r_s) . Po dosazení z (1.17) nabyde výraz početně přijatelného tvaru

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \sum_{jm} \int_r \frac{2}{\mu_0^2 \sigma} \left| -ik^2 h_{jm}(r) \right|^2 \frac{2j+1}{j+1} r^2 dr \\ &= \sum_{jm} \int_r \frac{2}{\mu_0^2 \sigma} \left| -\mu_0 \sigma w_j h_{jm}(r) \right|^2 \frac{2j+1}{j+1} r^2 dr \\ &= \sum_{jm} \int_r 2\sigma w_j^2 |h_{jm}(r)|^2 \frac{2j+1}{j+1} r^2 dr.\end{aligned}\quad (1.42)$$

Ve sférické symetrii počítané výrazy nezávisí na m , zavedeme tedy střední výkon pro stupeň j

$$\bar{Q}_j := \int_r 2\sigma w_j^2 |h_{jm}(r)|^2 \frac{2j+1}{j+1} r^2 dr.\quad (1.43)$$

Podobně zavedeme střední hustotu výkonu pro stupeň j

$$\bar{q}_j := \frac{1}{4\pi r^2} \left[2\sigma w_j^2 |h_{jm}(r)|^2 \frac{2j+1}{j+1} r^2 \right].\quad (1.44)$$

Hodnotu \bar{Q} vyčíslujeme numericky Rombergovou metodou. Tu realizujeme procedurami z [12], kde je metoda též popsána.

2. Výsledky

V této kapitole uvádíme výsledky numerických výpočtů pro různé hodnoty parametrů. Uvažujeme dvouvrstvý model pro vnitřní pole (stabilně stratifikovaná vrstva a plášť) a jednovrstvý model (pouze plášť) pro vnější pole. V první části se věnujeme výsledkům pro externě buzené pole. Druhá část kapitoly je pak věnována vnitřně buzenému poli. Výpočty jsme prováděli do stupně $j = 5$. Pro výpočty hustoty výkonu \bar{q}_j ve všech modelech jsme zvolili kanonickou hodnotu amplitudy variací magnetického pole 0.01 T na svrchní, resp. spodní hranici. Díky kvadratické závislosti výkonu na amplitudě pole lze výsledky snadno přeskálovat na fyzikálně relevantní hodnoty. Celkový tepelný výkon \bar{Q}_j již bere v úvahu realistické odhady amplitud pole.

2.1 Vnější pole

Externě buzeným polem máme na mysli pole indukované proudy v magnetosféře. Uvažujeme především nízkoperiodické příspěvky polí. Ve výpočtech jsme použili periodu jednoho dne, deseti dní, 59 dní (perioda rotace planety) a 88 dní (doba oběhu). Hodnotu poloměru jádra (r_{cm}) a poloměru planety (r_p) jsme přejali z [3].

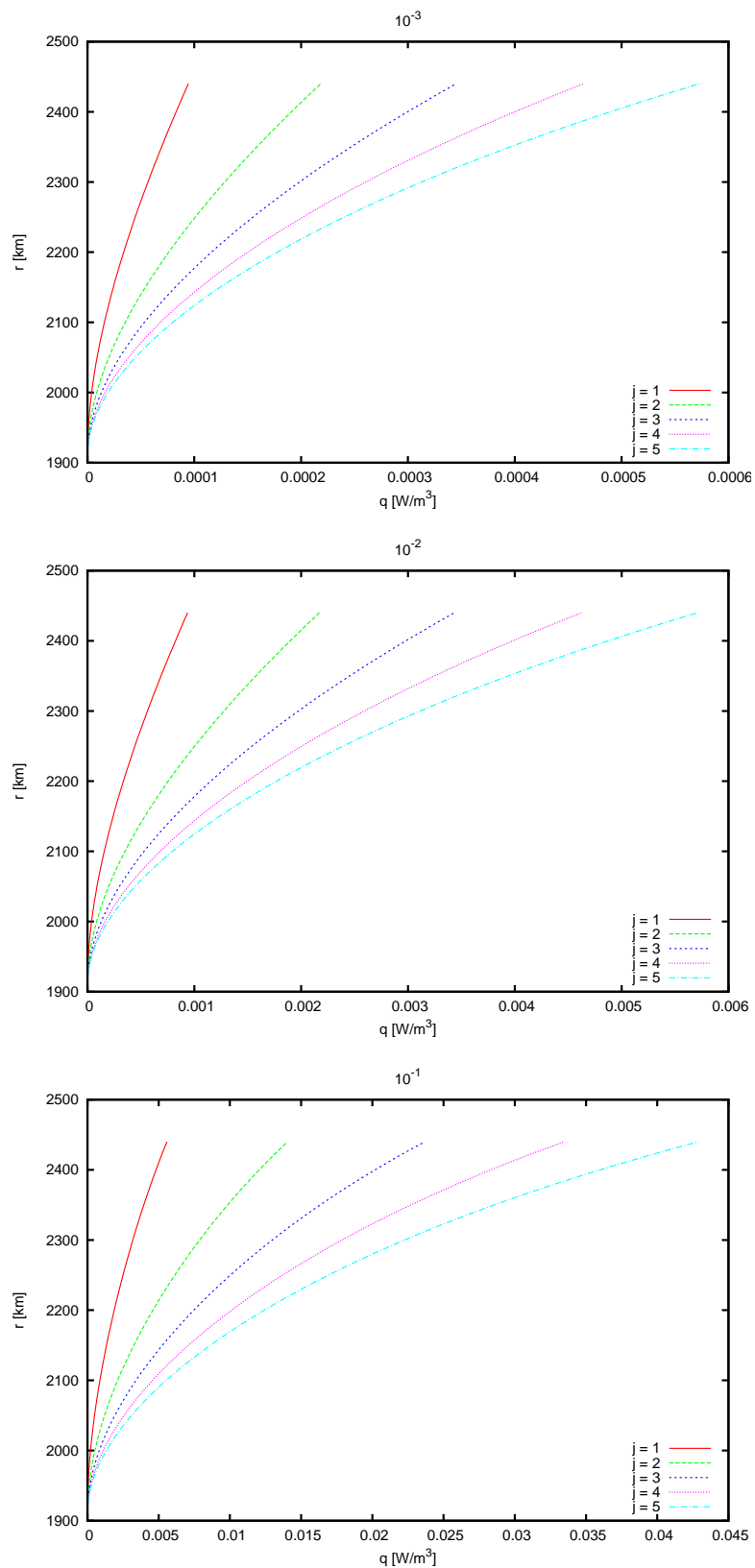
$$\begin{aligned} \text{Poloměr planety ... } r_p &= 2\,440 \times 10^3 \text{m} \\ \text{Poloměr jádra ... } r_0 = r_{cm} &= 1\,900 \times 10^3 \text{m} \end{aligned}$$

Jako vodivost v plášti σ_m jsme uvažovali tři různé, o řád se lišící, hodnoty ($10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$), které odpovídají vodivosti pro silikátové materiály [11]. Pro budící pole jsme uvažovali realistickou amplitudu variací magnetosférického pole o velikosti $100nT$ [10].

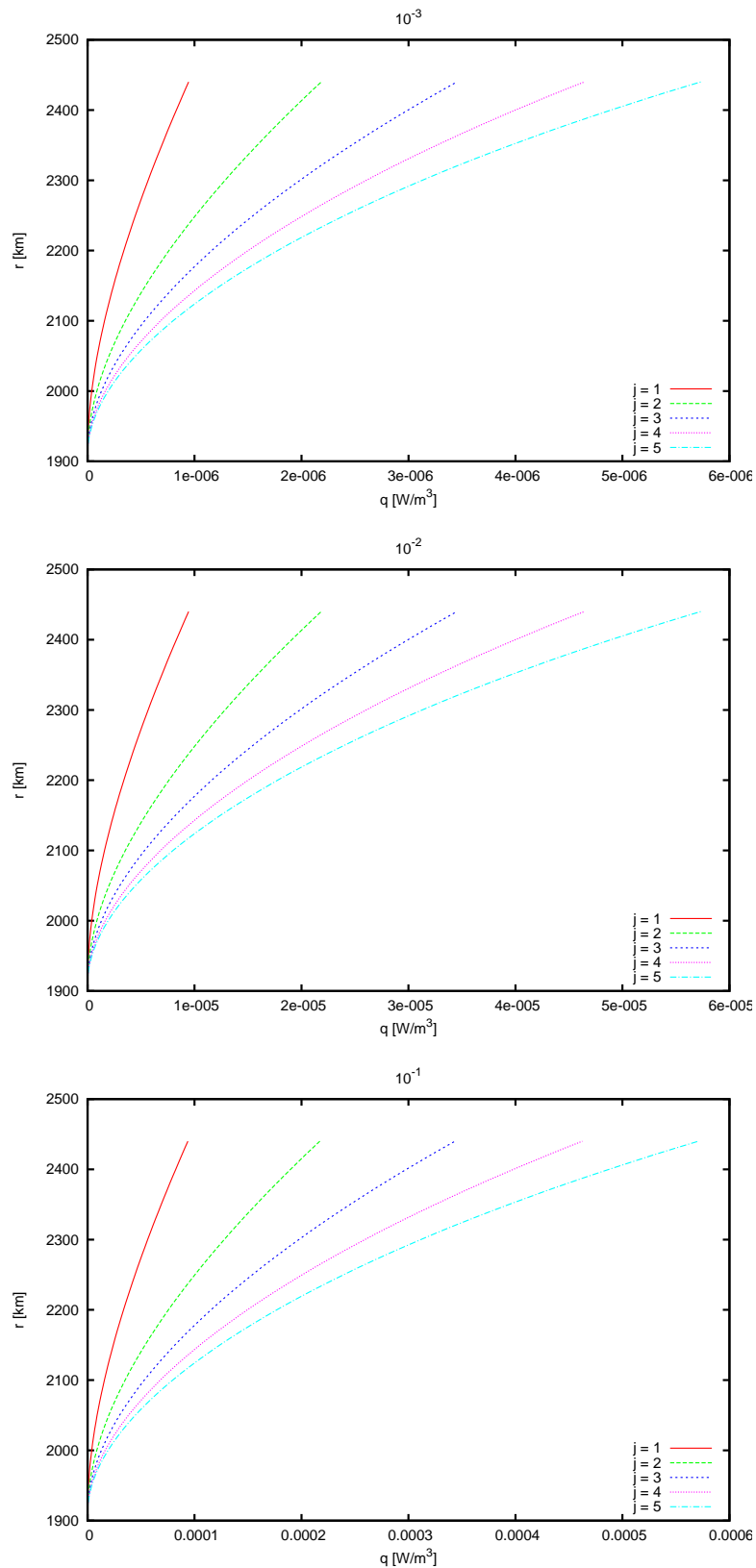
S těmito vstupními parametry jsme provedli výpočty a došli k hodnotám jak pro hustotu výkonu q pro různé stupně, tak pro výsledný výkon v plášti. Na obrázcích 2.1 až 2.4 je vynesena hustota výkonu ve $[W.m^{-3}]$ v závislosti na radiální souřadnici r . Obrázky jsou škálované 0.01 T, tabulky již na amplitudu $100nT$. Jak je patrné z obrázků 2.1 až 2.4, vnější pole má největší vliv na zahřívání blízko povrchu planety a směrem k jádru klesá, což jistě není překvapující. Pokud pro zvolenou hodnotu periody porovnáme prohřívání v závislosti na vodivosti zjistíme, že řádové zvýšení hodnoty vodivosti odpovídá přibližně řádovému nárůstu hustoty výkonu.

Změna periody se projeví výraznou změnou hustoty výkonu, jelikož ta je kvadraticky nepřímo úměrná zvolené periodě.

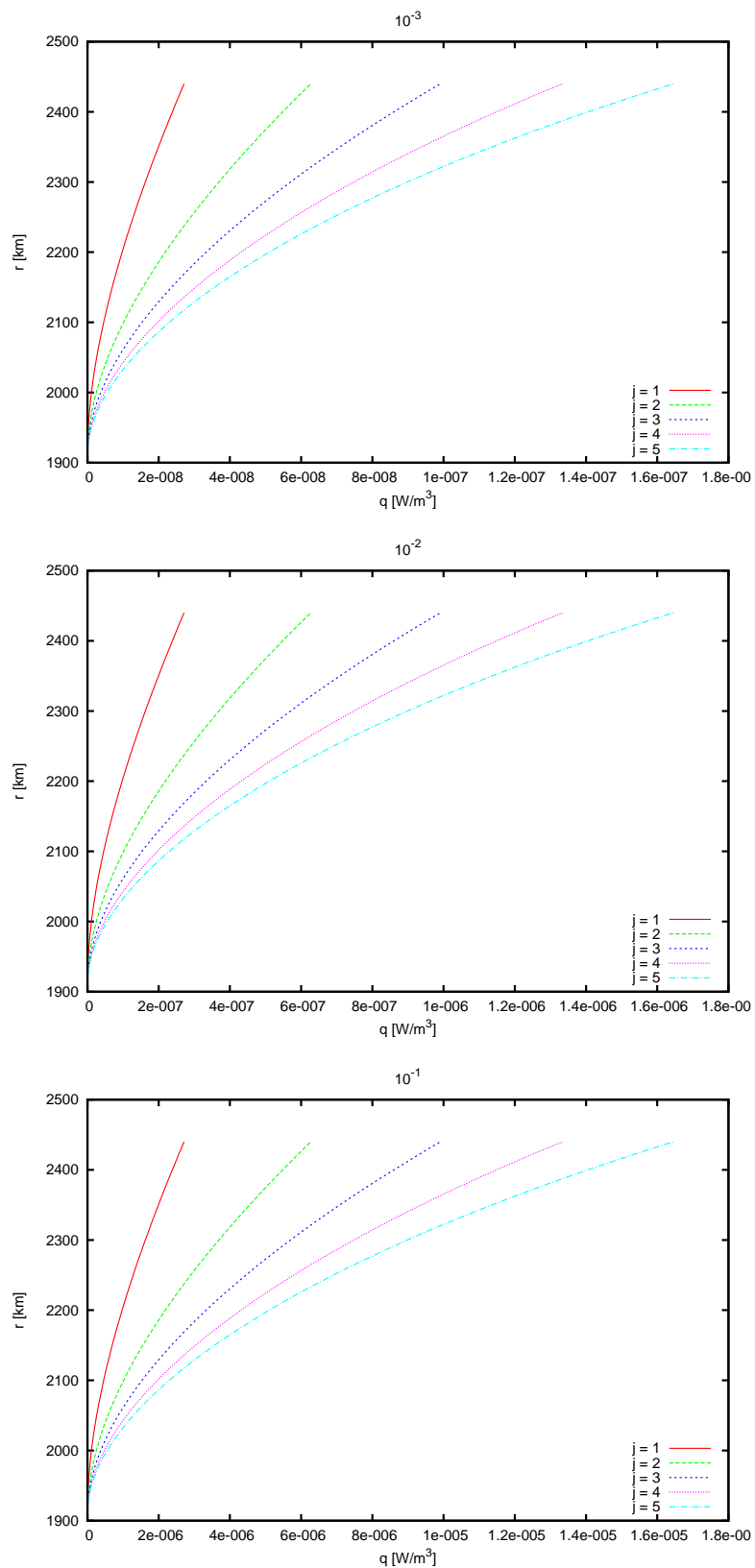
V tabulce 2.1 jsme shrnuli hodnoty výkonů pro celý plášť a realistickou amplitudu. Z té je patrna přibližně lineární závislost na vodivosti pláště a pokles pro rostoucí hodnoty periody.



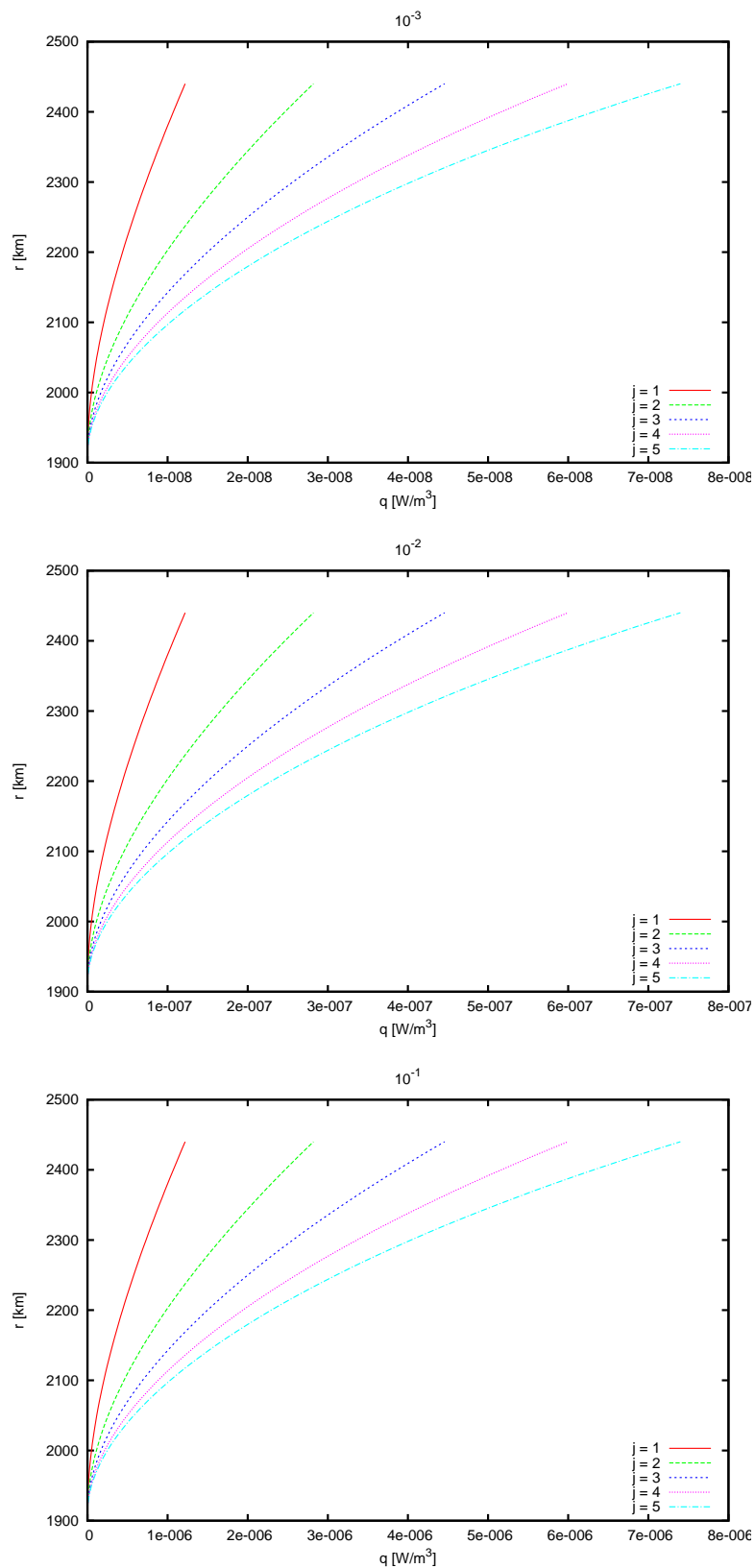
Obrázek 2.1: Změna hustoty výkonu v závislosti na r (svislá osa) pro periodu $T = 1$ den a různé hodnoty vodivosti v plášti (od shora postupně: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$). Kanonické škálování amplitudou 0.01 T.



Obrázek 2.2: Změna hustoty výkonu v závislosti na r (svislá osa) pro periodu $T = 10$ dní a různé hodnoty vodivosti v plášti (od shora postupně: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$). Kanonické škálování amplitudou 0.01 T.



Obrázek 2.3: Změna hustoty výkonu v závislosti na r (svislá osa) pro periodu rovnou periodě rotace ~ 59 dní a různé hodnoty vodivosti v plášti (od shora postupně: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$). Kanonické škálování amplitudou 0.01 T.



Obrázek 2.4: Změna hustoty výkonu v závislosti na r (svislá osa) pro periodu rovnou oběžné době ~ 88 dní a různé hodnoty vodivosti v plášti (od shora postupně: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$). Kanonické škálování amplitudou 0.01 T.

T [dny]	σ [$S.m^{-1}$]	j				
		1	2	3	4	5
1	10^{-1}	7.35	18.24	30.18	41.78	52.38
	10^{-2}	1.28	2.92	4.54	5.98	7.23
	10^{-3}	0.13	0.29	0.46	0.60	0.73
10	10^{-1}	1.28×10^{-1}	2.92×10^{-1}	4.54×10^{-1}	5.98×10^{-1}	7.23×10^{-1}
	10^{-2}	1.29×10^{-2}	2.94×10^{-2}	4.56×10^{-2}	6.01×10^{-2}	7.26×10^{-2}
	10^{-3}	1.29×10^{-3}	2.94×10^{-3}	4.56×10^{-3}	6.01×10^{-3}	7.26×10^{-3}
59	10^{-1}	3.71×10^{-3}	8.45×10^{-3}	1.31×10^{-2}	1.73×10^{-2}	2.09×10^{-2}
	10^{-2}	3.71×10^{-4}	8.45×10^{-4}	1.31×10^{-3}	1.73×10^{-3}	2.09×10^{-3}
	10^{-3}	3.71×10^{-5}	8.45×10^{-5}	1.31×10^{-4}	1.73×10^{-4}	2.09×10^{-4}
88	10^{-1}	1.67×10^{-3}	3.80×10^{-3}	5.89×10^{-3}	7.76×10^{-3}	9.38×10^{-3}
	10^{-2}	1.67×10^{-4}	3.80×10^{-4}	5.89×10^{-4}	7.76×10^{-4}	9.38×10^{-4}
	10^{-3}	1.67×10^{-5}	3.80×10^{-5}	5.89×10^{-5}	7.76×10^{-5}	9.38×10^{-5}

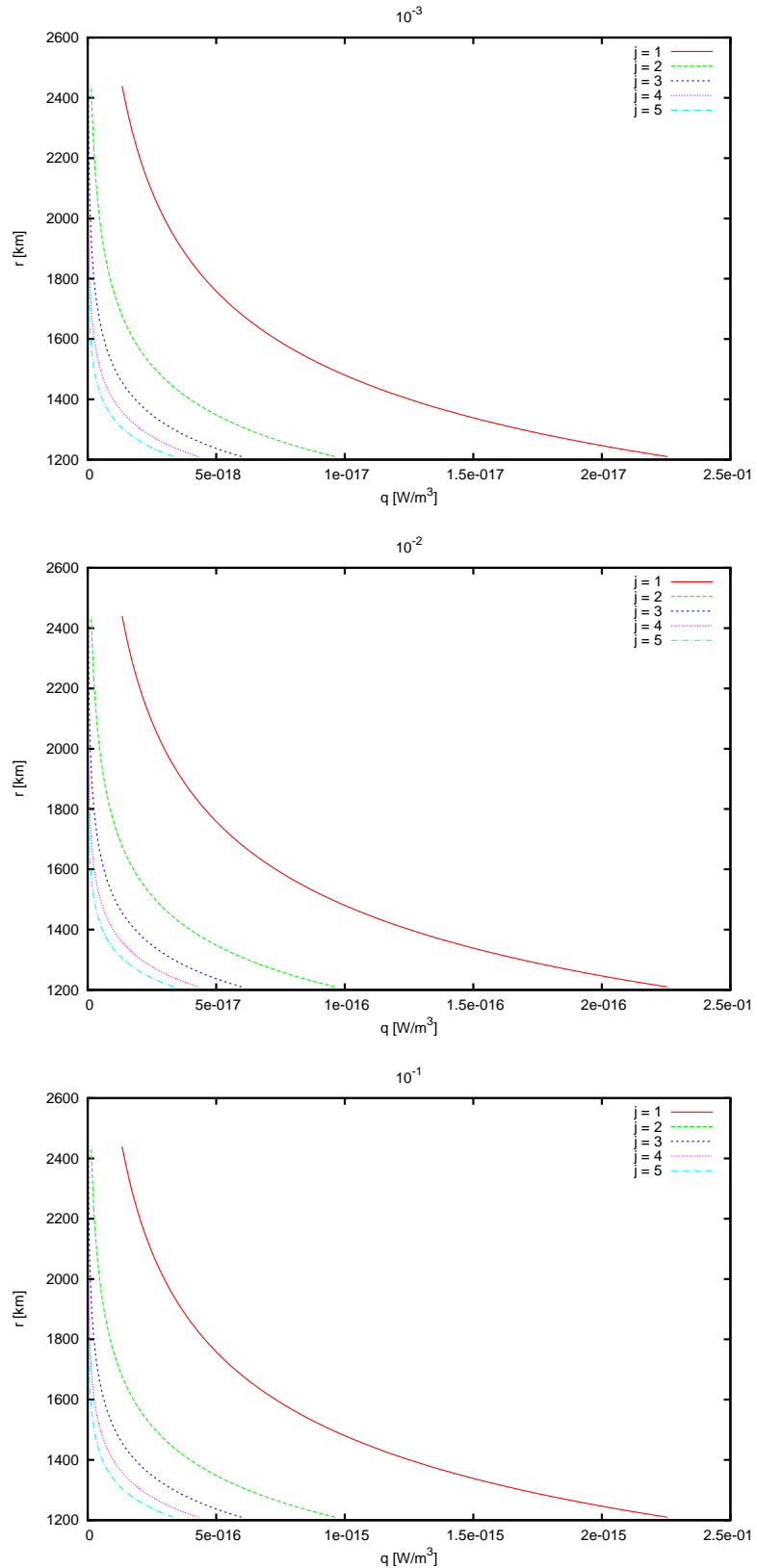
Tabulka 2.1: Přehledová tabulka výkonů v MW v plášti pro dané hodnoty parametrů a s realistickou amplitudou pole 100 nT.

2.2 Vnitřní pole

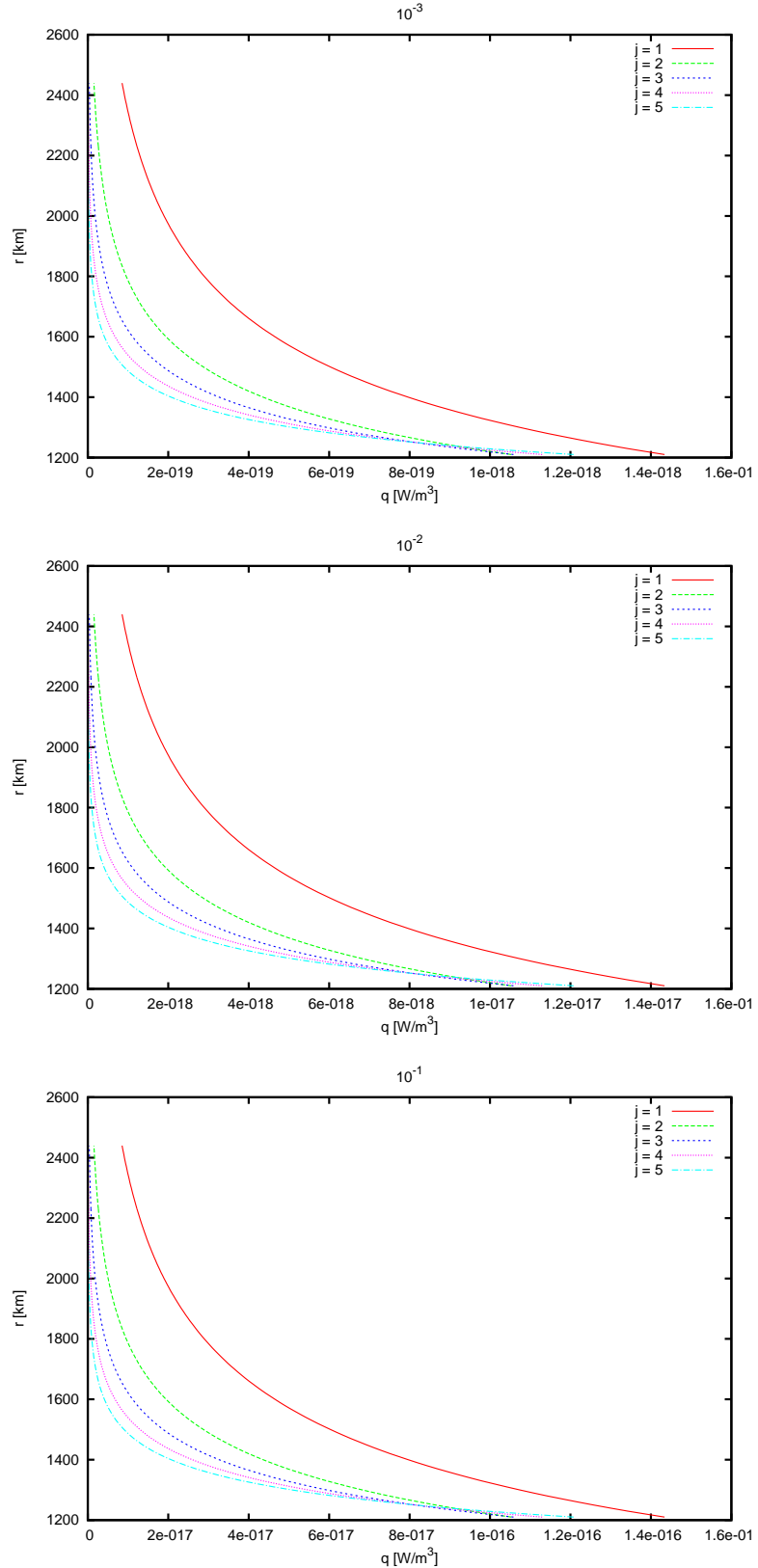
Vnitřním polem myslíme magnetické pole buzené dynamem v jádře Merkuru. Podle Christensenova modelu [4] je navíc v případě Merkuru jeho magnetické pole buzeno pouze menší, vnitřní částí jádra. Z tohoto důvodu jsme v modelu počítali se stabilně stratifikovanou vrstvou, pro jejíž hodnotu vodivosti σ_c jsme uvažovali dvě hodnoty, 10^5 a $10^6 S.m^{-1}$. Pro vodivostní model pláště jsme použili stejné hodnoty jako při výpočtech pro externě buzené pole, čili $\sigma_m = 10^{-3}, 10^{-2}$ a $10^{-1} S.m^{-1}$. Číselnou hodnotu poloměru vnitřního jádra r_0 jsme zvolili v souladu s [4], takže rozměrové parametry mají následující hodnoty:

$$\begin{aligned}
\text{Poloměr planety} & \dots r_p = 2\,440 \times 10^3 \text{ m} \\
\text{Polomer hranice jádra a pláště} & \dots r_{cm} = 1\,900 \times 10^3 \text{ m} \\
\text{Vnitřní pol. stab. stratif. vrstvy} & \dots r_0 = 1\,200 \times 10^3 \text{ m}
\end{aligned}$$

Jako periodu jsme zvolili hodnotu 10 000 let, jelikož pro řádově nižší hodnoty periody neprojde dostatečná část pole skrz stabilně stratifikovanou vrstvu, vzhledem k její vysoké vodivosti. Její tloušťka je dokonce větší než tloušťka pláště. Jak vidno z obrázků (2.5) pro vodivost $\sigma_c = 10^5 S.m^{-1}$ a (2.6) pro $\sigma_c = 10^6 S.m^{-1}$, pro zvolené parametry modelu je hustota výkonu v plášti velmi nízká, přičemž nejvýraznější příspěvek je od dipólového členu. Pro zvolenou nižší hodnotu vodivosti ve stabilně stratifikované vrstvě je dominance tohoto příspěvku výraznější. Řádová změna vodivosti uvnitř stabilně stratifikované vrstvy rovněž řádově ovlivní výslednou velikost hustoty výkonu. Tabulka (2.2) zobrazuje přehled výkonů v plášti. Budící amplituda byla přeškálována na pole $10^4 nT$.



Obrázek 2.5: Změna hustoty výkonu v závislosti na r (svislá osa) pro periodu $T = 10000$ let, vodivost stratifikované vrstvy $\sigma = 10^5 S.m^{-1}$ a různé hodnoty vodivosti v plášti (od shora postupně: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$). Kanonické škálování amplitudou 0.01 T.



Obrázek 2.6: Změna hustoty výkonu v závislosti na r (svislá osa) pro periodu $T = 10000$ let, vodivost stratifikované vrstvy $\sigma = 10^6 S.m^{-1}$ a různé hodnoty vodivosti v plášti (od shora postupně: $10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1} S.m^{-1}$). Kanonické škálování amplitudou 0.01 T.

σ_c [$S.m^{-1}$]	σ_m [$S.m^{-1}$]	j				
		1	2	3	4	5
10^5	10^{-1}	6 842	927	186	44.2	11.6
	10^{-2}	684	92.7	18.6	4.42	1.16
	10^{-3}	68.4	9.27	1.86	0.44	0.12
10^6	10^{-1}	435	101.6	33	11.6	4.17
	10^{-2}	43.5	10.1	3.29	1.16	0.42
	10^{-3}	4.35	1.01	0.33	0.12	0.042

Tabulka 2.2: Přehledová tabulka výkonů v mW v plášti pro dané hodnoty parametrů a s realistickou amplitudou pole 10^4 nT. Buzení vnitřním dynamem. σ_c , resp. σ_m , uvádí vodivost ve stratifikované vrstvě, resp. plášti.

Závěr

V rámci této práce jsem nastudoval z dostupných materiálů poznatky o magnetickém poli Merkuru a jeho vývoji. Seznámil jsem se s teoriemi vysvětlující naměřené slabé pole planety. Řešil jsem Maxwellovy rovnice v kvazistacionárním přiblížení pro vodivou sférickou vrstvu v nevodivém prostředí a odvodil vztah mezi magnetickým polem na dvou soustředných sférách vyplněných po částech konstantní vodivostí. Dále jsem odvodil vztah pro výpočet jouleovského výkonu, resp. hustoty výkonu, které jsem následně pro použité parametry numericky vyřešil.

Produkce tepla v plášti Merkuru vlivem radioaktivního rozpadu se na základě chondritické koncentrace předpokládá 0.3 - 0.7 TW. Odhady maximální produkce tepla díky slapovému zahřívání jsou na základě Maxwellovské reologie okolo 65 GW, odhady současné produkce se pak pohybují kolem 1 GW. Námí spočítaný odhad se pohybuje řádově pod 10 MW pro vnější pole, v porovnání s kterým je příspěvek vnitřního pole zanedbatelný. Odhad tepelného toku na povrchu dle [3] odpovídá 0.8 - 1 TW.

Z toho plyne, že současné zahřívání způsobené radioaktivním rozpadem prvků tvoří mezi 30% a 90% z celkového odhadnutého toku na povrchu planety. Slapové zahřívání v současnosti tvoří asi 0.1% z celkového odhadnutého toku na povrchu a námí zkoumané zahřívání vlivem magnetických polí je v maximálním případě setinové v porovnání se slapovým zahříváním a nemůže ovlivnit proudění v plášti.

A. Sférické Besselovy funkce

V této kapitole uvádíme přehled základních poznatků a vztahů týkajících se sférických Besselových funkcí. Více se lze dozvědět například v [8], [13] a [14].

Následující sekce je volným překladem z [13] a je oddělena uvozovkami. "Mějme Helmholtzovu rovnici, která se běžně zapisuje ve tvaru

$$\Delta \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0, \quad (\text{A.1})$$

ve sférických souřadnicích. Neboli pokud laplacián rozepíšeme ve sférických souřadnicích

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Theta \Phi + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \Theta \Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} R \Phi + \frac{\cos \phi}{r^2 \sin \phi} \frac{d\Phi}{d\phi} \Theta R + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \Theta R + k^2 R \Theta \Phi = 0, \quad (\text{A.2})$$

přičemž $R(r)$, $\Theta(\vartheta)$, $\Phi(\phi)$ jsou funkce odpovídajících proměnných. Po vynásobení rozepsané funkce ($r^2/R\Theta\Phi$),

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 + \frac{1}{\Theta \sin^2 \phi} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + \frac{\cos \phi}{\Phi \sin \phi} \frac{d\Phi}{d\phi} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0, \quad (\text{A.3})$$

vidíme, že rovnici lze řešit separací proměnných. Řešme pro R a za separační konstantu zvolme $n(n+1)$, čili

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = n(n+1) \quad (\text{A.4})$$

a po vynásobení R a převedení členu z pravé strany dostáváme

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (\text{A.5})$$

Což je již tvar sférické Besselovy diferenciální rovnice. Označíme-li navíc $x = kr$, přejde rovnice do tvaru

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} + [x^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (\text{A.6})$$

Dvě lineárně nezávislá řešení této diferenciální rovnice se nazývají sférické Besselovy funkce prvního, resp. druhého druhu (j_n , resp. y_n) ([14], [9]) a jsou definitivně vztahena s Besselovými funkcemi vztahy:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{A.7})$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x). \quad (\text{A.8})$$

V případě, kdy je n celé číslo, lze sférické Besselovy funkce napsat též pomocí Rayleighových formulí [9]:

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}, \quad (\text{A.9})$$

$$y_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}. \quad (\text{A.10})$$

Několik prvních sférických Besselových funkcí má tedy v takovém případě tvar:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2} \\ y_0(x) &= -j_{-1}(x) = -\frac{\cos x}{x} \\ y_1(x) &= j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ y_2(x) &= -j_{-3}(x) = \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3 \sin x}{x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Pro Besselovy funkce platí následující rekurentní vztahy:

$$w_{j+1}(z) + w_{j-1}(z) = \frac{2j+1}{z} w_j(z) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dz} w_j(z) - \frac{j}{z} w_j(z) + w_{j+1}(z) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d}{dz} w_j(z) + \frac{j+1}{z} w_j(z) - w_{j-1}(z) = 0. \quad (\text{A.14})$$

B. Sférické harmonické funkce

V této kapitole uvádíme základní poznatky o sférických harmonických funkcích. Podrobnosti jsou k nalezení například v ([8], [15] a [16]).

Sférické harmonické funkce $Y_j^m(\vartheta, \phi)$ jsou úhlovou částí řešení skalární Laplaceovy rovnice

$$\Delta f(r, \vartheta, \phi) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\Delta_\Omega Y_{jm} = -j(j+1)Y_{jm}, \quad (\text{B.2})$$

ve sférických souřadnicích a jsou definovány

$$Y_{jm}(\vartheta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos \vartheta) \exp(im\phi), \quad (\text{B.3})$$

kde $j = 0, \dots, \infty$, $m = -j, \dots, j$, přičemž j je stupeň a m řád dané funkce. $P_j^m(\cos \vartheta)$ jsou přidružené Legendrovy funkce svázané s Legendrovými polynomy $P_j(x)$ definičním vztahem (viz např. [8])

$$P_{jm}(x) = \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x). \quad (\text{B.4})$$

Legendrovy polynomy se často zapisují ve formě Rodrigueova vzorce

$$P_j(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j \quad (\text{B.5})$$

Na jednotkové kulové ploše jsou sférické harmoniky ortonormální

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{jm}(\vartheta, \phi) Y_{j'm'}^*(\vartheta, \phi) \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.6})$$

Podobně, vektorové sférické harmonické funkce \vec{Y}_{jm}^j jsou úhlovou částí řešení vektorové Laplaceovy rovnice,

$$\Delta \vec{f} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Platí

$$\Delta_\Omega \vec{Y}_{jm}^l = -l(l+1) \vec{Y}_{jm}^l, \quad (\text{B.8})$$

a podmínka ortonormality

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{Y}_{jm}^l(\vartheta, \phi) \cdot \vec{Y}_{j'm'}^{l'}(\vartheta, \phi) \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{ll'}. \quad (\text{B.9})$$

Lze snadno odvodit následující vztahy mezi vektorovými a skalárními sférickými harmonickými funkcemi:

$$\nabla \cdot [f(r) \cdot \vec{Y}_{jm}^{j-1}] = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) Y_{jm}, \quad (\text{B.10})$$

$$\nabla \cdot [f(r) \cdot \vec{Y}_{jm}^{j+1}] = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f(r) Y_{jm}, \quad (\text{B.11})$$

$$\nabla \cdot [f(r) \cdot \vec{Y}_{jm}^j] = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\nabla \times [f(r) \cdot \vec{Y}_{jm}^{j-1}] = i \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^j, \quad (\text{B.13})$$

$$\nabla \times [f(r) \cdot \vec{Y}_{jm}^{j+1}] = i \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^j, \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times [f(r) \cdot \vec{Y}_{jm}^j] &= i \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} \\ &\quad + i \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

kde $f(r)$ je libovolná spojitá funkce závislá na r .

Seznam použité literatury

- [1] TAKAHASHI, F., MATSUSHIMA, M., *Dipolar and non-dipolar dynamos in a thin shell geometry with implications for the magnetic field of Mercury*. 2006. Geophys. Res. Lett. 33, 10202.
- [2] PĚČ, K., MARTINEC, Z., PĚČOVÁ, J., *Matrix approach to the solution of electromagnetic induction in a spherically layered Earth*. Studia geoph. et geod., 1985. s. 139-162.
- [3] BREUER, D., HAUCK II, S. A., BUSKE, M., PAUER, M., SPOHN, T., *Interior Evolution of Mercury*. Space Science Reviews, 2007. Volume 132. p47-78.
- [4] CHRISTENSEN, Ulrich R., *A deep dynamo generating Mercury's magnetic field*. Nature, 2006. Vol 444. p1056-1058.
- [5] GÓMEZ-PÉREZ, N., WICHT, J., *Behavior of planetary dynamos under the influence of external magnetic fields: Application to Mercury and Ganymede*. Icarus 209 (2010), 2010. p53-62.
- [6] GÓMEZ-PÉREZ, N., SOLOMON, S. C., *Mercury's Weak Magnetic Field: A Result of Magnetospheric Feedback?*. 2010.
- [7] KABIN, K., HEIMPEL, M. H., RANKIN, R., AURNOU, J. M., GÓMEZ-PÉREZ, N., PARAL, J., GOMBOSI, T. I., ZURBUCHEN, T. H., KOEHN, P. L., DEZE-EUW, D. L., *Global MHD modeling of Mercury's magnetosphere with applications to the MESSENGER mission and dynamo theory*. Icarus 195 (2008), 2008. p1-15.
- [8] REKTORYS, K., *Přehled užití matematiky I*, 7. vydání. Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-180-9.
- [9] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover. 1965. pp. 355. ISBN 978-0486612720.
- [10] GROSSER, J., GLASSMEIER, K.-H., STADELMANN, A., *Induced magnetic field effects at planet Mercury*. Planetary and Space Science 52 (2004), 2004 p1251-1260.
- [11] SIMPSON, F. BAHR, K. *Practical Magnetotellurics*. 1. vydání. Cambridge University Press, 2005. ISBN 0-521-81727-7.
- [12] PRESS, W. H. TEUKOLSKY, S. A. VETTERLING, W. T. FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. 2. vydání. Cambridge University Press, 1992. ISBN 0-521-43064-X.

Internetové odkazy

- [13] *Spherical Bessel functions*,
<http://mathworld.wolfram.com/SphericalBesselDifferentialEquation.html>
- [14] *Bessel functions*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function
- [15] *Spherical harmonics*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics
- [16] <http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>
- [17] <http://www.netlib.org/slatec/src/>

Seznam použitých zkratek

- \vec{E} ... vektor elektrické intenzity
- \vec{B} ... vektor magnetické indukce pole
- μ_0 ... permeabilita vakua
- σ_s ... vodivost s-té vrstvy
- \vec{j} ... hustota proudu
- ω ... úhlová frekvence
- k ... vlnový vektor
- α_{jm}^l ... koeficient alfa
- $w_j(r)$... obecné označení sférických Besselových funkcí (w)
- $j_n(r)$... sférické Besselovy funkce I. druhu
- $y_n(r)$... sférické Besselovy funkce II. druhu
- $Y_{jm}(\vartheta, \phi)$... skalární sférická harmonická funkce
- $P_{jm}(\cos \vartheta)$... přidružené Legendrovy polynomy
- $P_j(x)$... Legendrovy polynomy
- $\vec{Y}_{jm}^l(\vartheta, \phi)$... vektorové sférické harmonické funkce
- U ... skalární magnetický potenciál
- r ... radiální souřadnice
- r_0 ... poloměr spodní hranice
- r_{cm} ... poloměr hranice jádra a pláště
- r_p ... vnější poloměr
- $G_{jm}^{(e)}$... komplexní harmonický koeficient vnějšího pole
- $G_{jm}^{(i)}$... komplexní harmonický koeficient vnitřního pole
- (r, ϑ, ϕ) ... sférické souřadnice
- $h_{jm}(r)$... horizontální složka pole
- $t_{jm}(r)$... vertikální složka pole
- B^s ... přenosová matice s-té vrstvy
- C ... odezva systému
- $A_j^s(r_s)$... matice vrstvy
- P_j, Q_j, R_j, S_j ... křížové součiny sférických Besselových funkcí
- q ... hustota výkonu
- \bar{q} ... střední hustota výkonu
- Q ... výkon
- \bar{Q} ... střední hodnota výkonů
- $R(r), \Theta(\vartheta), \Phi(\phi)$... funkce sférických proměnných
- δ_{ij} ... Kroneckerovo delta
- d ... tloušťka pláště