Úkol č. 1 - Transformační vlastnosti kinematických tenzorů při změně pozorovatele - termín odevzdání 24.3.

Vyšetřete transformační vlastnosti složek kinematických tenzorů mechaniky kontinua $\mathbb{F}, \mathbb{C} = \mathbb{F}^T\mathbb{F}, \mathbb{B} = \mathbb{F}\mathbb{F}^T, \mathbb{L} = \mathrm{grad}\mathbf{v}, \mathbb{D} = \mathrm{sym}(\mathbb{L}), \mathbb{W} = \mathrm{skew}(\mathbb{L}), \mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I}), \mathrm{e} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{B}^{-1})$ a relativního def. gradientu $\mathbb{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbb{F}(\mathbf{X}, \tau)\mathbb{F}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{X}, \mathbf{t})|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{x},\mathbf{t})}$, při transformací kartézských souř. systému ve tvaru $\mathbf{x}' = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{o}) + \mathbf{c}(t)$, kde $\mathbf{Q}(t)$ je rotační matice ($\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \det\mathbf{Q} = \mathbf{1}$).

Jako návod nechť poslouží drobné shrnutí toho, co jsme dělali na cvičení. Uvažujme třírozměrný Eukleidovský prostor a v něm mějme kartézské souřadnice $x^1(= x_1), x^2(= x_2), x^3(= x_3)$. Mějme dále systém křivočarých souřadnic (závislý obecně na čase) ξ^1, ξ^2, ξ^3 určený vztahy $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), i = 1, 2, 3$ (a předpokládejme, že v každém čase existují inverze $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), i = 1, 2, 3$). Každý takový systém souřadnic budeme nazývat **pozorovatelem**.

Zavedli jsme si lokální (kovariantní) bázi příslušnou danému systému souřadnic (a opět závislou obecně i na čase)

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i}\,, \qquad i = 1, 2, 3$$

kde $\mathbf{x}$ je polohový vektor. Pomocí této báze můžeme vyjádřit kazdý vektor $\mathbf{v}$ v daném prostoru jako

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i\,,$$

kde v^i jsou jeho (kontravariantní) složky (pozn.: používáme Einsteinovu sumační konvenci a sčítáme vždy pouze přes indexy v kombinaci horní-dolní). Dále jsme zavedli duální bázi lineárních forem na daném vekt. prostoru vztahy

$$\mathbf{g}^i = \mathrm{grad}\xi^i\,,$$

a libovolná lineární forma (též někdy nazývaná kovektor) $\mathbf{f}$ na našem prostoru je rozvinutelná do této báze

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{g}^i\,,$$

kde f_i jsou (kovariantní) složky formy $\mathbf{f}$ vzhledem k dané bázi. Platí $\mathbf{g}^i(\mathbf{g}_j) = \delta^i_{\ j}$ kde $\delta^i_{\ j}$ je Kroneckerův tenzor. Uvažovali jsme následně změnu souřadnic $\xi^i \to \xi'^i$ a připomněli jsme si, že bázové vektory a složky vektorů a forem se transformují následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'_i &= \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi'^i}\mathbf{g}_j, \qquad & v'^i = \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^j} v^j \\ \mathbf{g}'^i &= \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^j}\mathbf{g}^j, \qquad & f'_i = \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi'^i} f_j \end{aligned}$$

Naším cílem bude nyní vyšetřit transformační vztahy pro složky základních kinematických veličin, se kterými v mechanice kontinua pracujeme. Začneme přirozeně s deformačním gradientem. Pro zvoleného pozorovatele máme deformaci kontinua z referenční konfigurace do konfigurace aktuální popsanou zobrazením $\xi^i = \chi^i(\Xi^j, t)$, kde Ξ^j jsou souřadnice v ref. konfiguraci a ξ^i souřadnice v konfiguraci aktuální. Deformační gradient $\mathbb{F}$ je pak definován jako:

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\Xi}, t) = \mathbb{F}^i{}_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J = \frac{\partial \chi^i}{\partial \Xi^J} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J \ ,$$

kde $\mathbf{G}^J$ jsou bázové kovektory v referenční konfiguraci a $\mathbf{g}_i$ jsou bázové vektory v aktuální konfiguraci. Abychom si ujasnili vztah mezi těmito dvěma bázemi, uvažujme nejčastější situaci, kdy referenční konfigurace tělesa odpovídá jeho konfiguraci v nejakém definovaném čase t_0. Pak je přirozené ztotožnit referenční bázi s bázi pozorovatele v čase t_0 a brát tedy

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{g}_1(t_0), \qquad \mathbf{G}_2 = \mathbf{g}_2(t_0), \qquad \mathbf{G}_3 = \mathbf{g}_3(t_0),$$

a obdobně

$$\mathbf{G}^1 = \mathbf{g}^1(t_0), \qquad \mathbf{G}^2 = \mathbf{g}^2(t_0), \qquad \mathbf{G}^3 = \mathbf{g}^3(t_0).$$

Uvažujme nyní jiného pozorovatele $\xi'^i(x^1, x^2, x^3, t)$. Ježto máme v každém čase t inverze $x^i = \hat{x}^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), i = 1, 2, 3$, můžeme v daném čase vyjádřit $\xi^i = \hat{\xi}^i(\xi'^j)$ a naopak $\xi'^i = \hat{\xi}'^i(\xi^j)$, $i, j = 1, 2, 3$. Speciálně v ref. čase t_0 pišme toto zobrazení $\Xi^I = \hat{\Xi}^I(\Xi'^J)$ a naopak $\Xi'^I = \hat{\Xi}'^I(\Xi^J)$, $I, J = 1, 2, 3$. Druhý pozorovatel popíše stejnou deformaci zobrazením $\xi'^i = \hat{\chi}'^i(\Xi'^J, t)$ a musí tedy platit

$$\chi^i(\boldsymbol{\Xi}, t) = \hat{\xi}^i(\chi'^j(\boldsymbol{\Xi}', t)).$$

Potom můžeme psát

$$\mathbb{F}^i{}_J = \frac{\partial \chi^i(\boldsymbol{\Xi}, t)}{\partial \Xi^J} = \frac{\partial \hat{\xi}^i}{\partial \xi'^k} \frac{\partial \chi'^k(\boldsymbol{\Xi}', t)}{\partial \Xi'^L} \frac{\partial \Xi'^L}{\partial \Xi^J} = \frac{\partial \hat{\xi}^i}{\partial \xi'^k} \mathbb{F}'^k_L \frac{\partial \Xi'^L}{\partial \Xi^J} \ ,$$

odkud

$$\mathbb{F}'^i_J = \frac{\partial \hat{\xi}'^i}{\partial \xi^k} \mathbb{F}^k{}_L \frac{\partial \Xi^L}{\partial \Xi'^J} \ .$$

Povšímněme si, že odsud dostáváme s uvážením vztahů pro transoformace bázových vektorů a kovektorů

$$\mathbb{F}' = \mathbb{F}'^i_J \mathbf{g}'{}_i \otimes \mathbf{G}'^J = \underbrace{\frac{\partial \hat{\xi}'^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial \hat{\xi}^l}{\partial \xi'^i}}_{\delta^k_l} \mathbb{F}^k{}_L \underbrace{\frac{\partial \Xi^L}{\partial \Xi'^J} \frac{\partial \hat{\Xi}'^J}{\partial \Xi^M}}_{\delta^L_M} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{G}^M = \mathbb{F}$$

a tedy $\mathbb{F}$ je skutečně invariantní objekt. Byli-li bychom vybaveni touto znalostí dopředu, mohli bychom vyjít z

$$\mathbb{F}^i{}_J \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^J = \mathbb{F}'^k_L \mathbf{g}'_k \otimes \mathbf{G}'^L.$$

a použitím transformačních vztahů pro bázové vektory a kovektory najít transformační vztah pro složky

$$\mathbb{F}'^i{}_J = \frac{\partial \hat{\xi}'^i}{\partial \xi^k} \mathbb{F}^k{}_L \frac{\partial \hat{\Xi}^L}{\partial \Xi'^J} \ .$$

Z pohledu konstitutivní teorie je důležitá třída transformací pozorovatelů daná jejich posunutím a pootočením. Uvažujme pro jednoduchost nadále pouze kartézské sořadnicové systémy pro oba pozorovatele a uvažujme tedy speciální případ změny pozorovatele daný transformací $x^i \to x'^i$

$$x'^i = \mathbf{Q}^i{}_j(t) x^j + c^i(t) \ ,$$

kde $\mathbf{Q}(t)$ je rotace, tedy platí $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ (a $\det\mathbf{Q} = 1$). Pro složky $\mathbb{F}$ vzhledem k těmto dvěma pozorovatelům dostaneme tedy vztah

$$\mathbb{F}'^i{}_J = \mathbf{Q}^i{}_k(t) \mathbb{F}^k{}_L {(\mathbf{Q}^T)^L}_J(t_0)$$

Za dodatečného předpokladu, že oba pozorovatelé splývají v čase t_0, a tedy $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$, dostáváme "standardní" vztah

$$\mathbb{F}'^i{}_J = \mathbf{Q}^i{}_k(t) \mathbb{F}^k{}_L$$

psaný obvykle v literatuře jako

$$\mathbb{F}' = \mathbf{Q}(t) \mathbb{F} \ ,$$

kde symbol $\mathbb{F}$ nyní zastupuje **složkovou reprezentaci (matici)** def. gradientu.