Úkol č. 2 - Materiálová symetrie - termín odevzdání 24.3.

Ve cvičení jsme si probrali další důležitou třídu transformací - změnu referenční konfigurace - pomocí níž jsme si definovali pro zvolené konstitutivní vztahy grupu symetrie materiálu. Připomeňme si, co jsme dělali. Uvažujme dvě referenční konfigurace $\kappa(\mathcal{B})$ a $\kappa^*(\mathcal{B})$ svázané navzájem (dostatečně hladkou) bijekcí $\mathbf{\Lambda} : \kappa(\mathcal{B}) \to \kappa^*(\mathcal{B})$:

$$\mathbf{X}^\star = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}) \,.$$

Deformační gradient pro jednu a tutéž deformaci pak můžeme vyjádřit vzhledem ke dvěma těmto referenčním konfiguracím, přičemž mezi nimi platí vztah:

$$\mathbb{F}_\kappa = \mathbb{F}_{\kappa^*}\mathbb{P} \qquad (\mathbb{F}_\kappa)^i{}_J = (\mathbb{F}_{\kappa^*})^i{}_K \mathbb{P}^K{}_J,$$

kde

$$\mathbb{P}^K{}_J := \frac{\partial \mathbf{\Lambda}^K}{\partial X^J} \,.$$

1. Vyšetřete transformační vlastnosti složek kinematických tenzorů mechaniky kontinua: $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T\mathbb{F}$, $\mathbb{B} = \mathbb{F}\mathbb{F}^T$, $\mathbb{L} = \mathrm{grad}\mathbf{v}$, $\mathbb{D} = \mathrm{sym}(\mathbb{L})$, $\mathbb{W} = \mathrm{skew}(\mathbb{L})$, $\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{C}-\mathbb{I})$, $\mathrm{e} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}-\mathbb{B}^{-1})$ a relativního def. gradientu $\mathbb{F}_t(\mathbf{x},\tau) = \mathbb{F}(\mathbf{X},\tau)\mathbb{F}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{X},\mathbf{t})|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{x},\mathbf{t})}$
2. Uvažujme pro jednoduchost homogenní elastický materiál. Pro Cauchyho tenzor napětí $\mathbf{T}^y(\mathbf{x}^\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_\kappa(\mathbb{F}_\kappa(\mathbf{x}))$ definujme grupu symetrie $\mathcal{G}_\kappa \subset \mathrm{unim}_+$, kde $\mathrm{unim}_+ := \{\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{3\times3}, \mathrm{det}\mathbb{P} = 1\}$ vztahem

$$\mathbb{P} \in \mathcal{G}_\kappa \Longleftrightarrow \forall \mathbb{F}_\kappa \in \{\mathbb{F}_\kappa \in \mathbb{R}^{3\times3}, \mathrm{det}\mathbb{F}_\kappa > 0\} : \hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_\kappa(\mathbb{F}_\kappa) = \hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_\kappa(\mathbb{F}_\kappa\mathbb{P}) \qquad (1)$$

   (a) Ukažte, že $\mathcal{G}_\kappa$ je grupa (vzhledem k operaci skládání zobrazení, i.e. $\forall \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{G}_\kappa$, $\mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_2 := \mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$).

   (b) Dokažte (pro Cauchyho tenzor napětí $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_\kappa(x, \mathbb{F}_\kappa)$) *Nollovo pravidlo*: Je-li $\mathcal{G}_\kappa$ grupa symetrie materiálu vzhledem k referenční konfiguraci $\boldsymbol{\kappa}(\mathcal{B})$, potom vzhledem k ref. konfiguraci $\boldsymbol{\kappa}^*(\mathcal{B}) := \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\kappa}(\mathcal{B}))$ je odpovídající grupa symetrie $\mathcal{G}_{\kappa^*} = \mathbb{Q}\mathcal{G}_\kappa\mathbb{Q}^{-1} := \{\mathbb{Q}\mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1}; \mathbb{P} \in \mathcal{G}_\kappa\}$, kde $\mathbb{Q}^I{}_J := \frac{\partial \mathbf{\Lambda}^I}{\partial X^J}$ (a ukázali jsme si, že odsud plyne vztah pro transformaci deformačního gradientu $\mathbb{F}_{\kappa^*} = \mathbb{F}_\kappa\mathbb{Q}^{-1}$). HINT: Využijte vztahu $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_\kappa(\mathbb{F}_\kappa) = \hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_{\kappa^*}(\mathbb{F}_{\kappa^*})$, kterým jsme si na cvičení definovali $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{D}}_{\kappa^*}$.

   (c) Vyslovte odpovídající podmínku materiálové symetrie (1) pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí.