Úkol č. 3 - termín odevzdání 7.4.

1. Dokažte identitu
$$\frac{d\det\mathbb{A}}{d\mathbb{A}} = \mathrm{cof}\mathbb{A} \qquad \forall\mathbb{A} \in \{\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \det\mathbb{B} \neq 0\}$$

2. Pro hyperelastický materiál máme 1. Piola Kirchhoffův napěťový tenzor $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \mathbb{F})$ definovaný pomocí volné energie $\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F})$ vztahem
$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \mathbb{F}) = \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F})}{\partial \mathbb{F}}$$
Ukázali jsme si, že v důsledku objektivity (material frame indifference) volné energie (tj. předpokladu $\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{Q}\mathbb{F})$ $\forall\mathbb{Q} \in \mathrm{orth}_+$) můžeme psát volnou energii
$$\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{U}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{C}^{\frac{1}{2}}),$$
kde $\mathbb{U}$ je pravý stretch tensor, a $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T\mathbb{F}$ je pravý Cauchy-Greenův tenzor. Obdobně za předpokladu materiálové izotropie (tj. předpokladu $\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F}\mathbb{Q})$ $\forall\mathbb{Q} \in \mathrm{orth}_+$) můžeme psát volnou energii
$$\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{F}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{V}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbb{B}^{\frac{1}{2}}),$$
kde $\mathbb{V}$ je levý stretch tensor, a $\mathbb{B} = \mathbb{F}\mathbb{F}^T$ je levý Cauchy-Greenův tenzor.

   To nám umožňuje zavést formálně $\tilde{W}(\mathbb{C}) := \hat{W}(\mathbb{C}^{\frac{1}{2}})$ a $\bar{W}(\mathbb{B}) := \hat{W}(\mathbb{B}^{\frac{1}{2}})$

   Ukažte, že pro izotropní hyperelastický materiál platí tedy následující vztahy definující nám známé tenzory napětí ($\mathbf{T}^{\boldsymbol{D}}$ - Cauchyho tenzor napětí, $\hat{\mathbf{T}}$ - 1. Piola-Kirchhoffův napěťový tenzor a $\hat{\mathbf{T}}^{(2)}$ - 2. Piola-Kirchhoffův napěťový tenzor):

   (a)
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= 2\mathbb{F}\frac{\partial \tilde{W}(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}} \\ \mathbf{T}^{(2)} &= 2\frac{\partial \tilde{W}(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}} \\ \mathbf{T}^{\boldsymbol{D}} &= \frac{2}{\sqrt{\det\mathbb{C}}}\mathbb{F}\frac{\partial \tilde{W}(\mathbb{C})}{\partial \mathbb{C}}\mathbb{F}^T \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= 2\frac{\partial \bar{W}(\mathbb{B})}{\partial \mathbb{B}}\mathbb{F} \\ \mathbf{T}^{(2)} &= 2\mathbb{F}^{-1}\frac{\partial \bar{W}(\mathbb{B})}{\partial \mathbb{B}}\mathbb{F} \\ \mathbf{T}^{\boldsymbol{D}} &= \frac{2}{\sqrt{\det\mathbb{B}}}\frac{\partial \bar{W}(\mathbb{B})}{\partial \mathbb{B}}\mathbb{B} \end{aligned}$$

   kde pro stručnost vynecháváme argument $\mathbf{x}$. Povšimněte si, kterak dostáváme automaticky symetrii $\mathbf{T}^{\boldsymbol{D}}$ a $\mathbf{T}^{(2)}$.

3. Dokažte Rivlin-Ericksenův reprezentační teorém pro Cauchyho tenzor napětí pro **hyperelastický materiál**. Tedy ukažte, že pro něj platí

   $$\mathbf{T}^{\boldsymbol{D}} = a_0(I_{\mathbb{B}}, II_{\mathbb{B}}, III_{\mathbb{B}})\mathbf{I} + a_1(I_{\mathbb{B}}, II_{\mathbb{B}}, III_{\mathbb{B}})\mathbb{B} + a_2(I_{\mathbb{B}}, II_{\mathbb{B}}, III_{\mathbb{B}})\mathbb{B}^2,$$

   kde $I_{\mathbb{B}}, II_{\mathbb{B}}, III_{\mathbb{B}}$ jsou hlavní invarianty $\mathbb{B}$. HINT: Vyjděte z reprezentačního teorému pro volnou energii $\bar{W}(\mathbb{B}) = \bar{W}(I_{\mathbb{B}}, II_{\mathbb{B}}, III_{\mathbb{B}})$, což jsme si dokázali na cvičení, a použijte vztahy z bodu 2.