Cvičení 2 – Geometrie deformace a kinematika

Linearizace

$$\mathbf{V} = \;???+O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}.\mathbf{F}^{\mathbf{T}}} = \sqrt{(\mathbf{I}+\mathbf{H}^T)\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{H})} = \sqrt{\mathbf{I}+\mathbf{H}^T+\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{H}} =$$

$$= \mathbf{I}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^T+\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{H}\right)+O(|\mathbf{H}|^2) = \mathbf{I}+\frac{1}{2}(\mathbf{H}^T+\mathbf{H})+O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{I}+\frac{1}{2}(\mathbf{H}^T+\mathbf{H})+O(|\mathbf{H}|^2)}$$

$$\mathbf{R} = \;???+O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{V}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{F}^{-T}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}-\mathbf{h}^T = \mathbf{I}-\mathbf{H}^T+O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{F}^{-T} = \left(\mathbf{I}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\right)\right)\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{H})+O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I}+\frac{1}{2}(\mathbf{H}^T-\mathbf{H})+O(|\mathbf{H}|^2)}$$

Linearizujte výraz $\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}\ \bullet = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \bullet$

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}\ \bullet = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \bullet =$$

$$= (\mathbf{I}+\mathbf{H}^T)\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{H}) : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet \ + \ \mathrm{Div}(\mathbf{I}+\mathbf{H})\cdot\mathrm{grad}\ \bullet =$$

$$= \mathbf{I} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + \mathbf{H}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + \mathbf{H} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + (\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{H}) : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + \mathrm{Div}\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\ \bullet =$$

$$= \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \bullet \ + 2\mathbf{H} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\ \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\boxed{\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}\ \bullet = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \bullet + 2\mathbf{H} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet + \mathrm{Div}\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\ \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)}$$

Odvoďte materiálovou derivaci vektoru $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}} = \dfrac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}\cdot(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-T})\cdot\vec{N}}}$

$$\dot{\vec{n}} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}}\right) = \frac{\vec{N}\cdot\dot{\mathbf{F}}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}} - \frac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{2\sqrt{(\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N})^3}}(\vec{N}\cdot\dot{\mathbf{B}}\cdot\vec{N})$$

$(\dot{\mathbf{F}^{-1}}) = -\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}$ Kinematika str. 5

$\dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{F}^{-1}\cdot 2\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}^{-T}$ Kinematika str. 7

$$\dot{\vec{n}} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}}\right) = -\frac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{l}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}} + \frac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{(\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N})^3}}(\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\vec{N})$$

$$= -\vec{n}\cdot\boldsymbol{l} + \frac{\vec{n}}{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}(\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\vec{N}) = -\vec{n}\cdot\boldsymbol{l} + \vec{n}\left(\frac{\vec{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}}\cdot\mathbf{d}\cdot\frac{\mathbf{F}^{-T}\cdot\vec{N}}{\sqrt{\vec{N}\cdot\mathbf{B}\cdot\vec{N}}}\right)$$

$$= -\vec{n}\cdot\boldsymbol{l} + \frac{1}{2}\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\left(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}^T\right)\cdot\vec{n}\right) = -\vec{n}\cdot\boldsymbol{l} + \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\vec{n}\right)$$

$$\boxed{\dot{\vec{n}} = -\vec{n}\cdot\boldsymbol{l} + \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\vec{n}\right)}$$

Odvoďte rovnici kontinuity použitím Reynoldsova transportního teorému.

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \phi \,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) \mathrm{d}v$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho \,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) \mathrm{d}v = 0$$

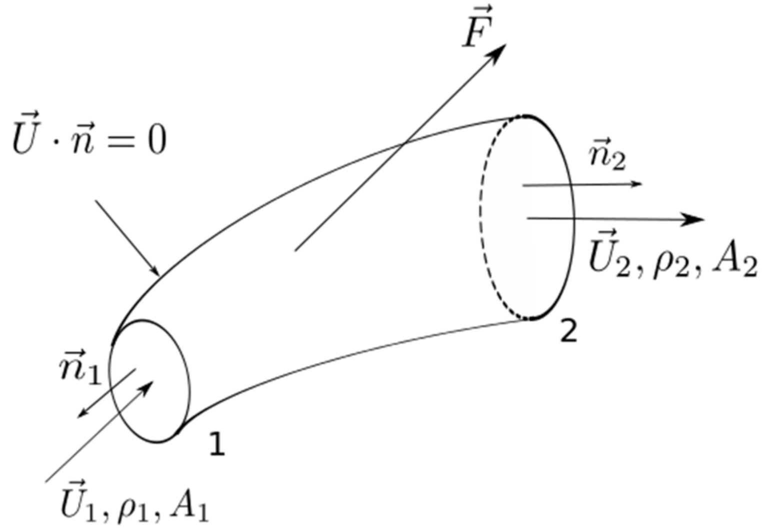
$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0}$$

Raynoldsův transportní teorém

Spočtěte sílu, která působí na proudovou trubici (viz obrázek vpravo). Předpokládejte, že proudění je stacionární a rychlosti a hustoty na vtoku a výtoku jsou homogenní. K výpočtu použijte Reynoldsův transportní teorém.



$$\vec{F} = \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{U} \, \mathrm{d}v$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \vec{q} \, \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\frac{D\vec{q}}{Dt} + \vec{q} \, \mathrm{div} \, \vec{v} \right) \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \mathrm{d}v + \int_{s(t)} \vec{n} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{q}) \, \mathrm{d}a$$

Raynoldsův transportní teorém

Aplikace na náš problém:

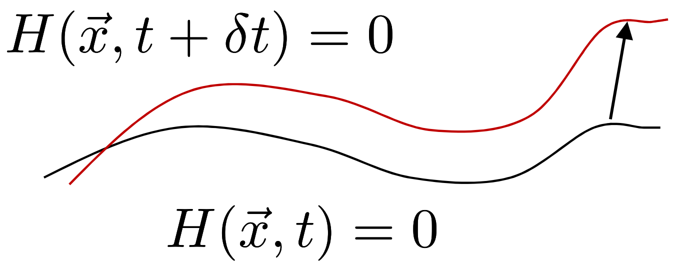
$$\vec{F} = \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{U} \, \mathrm{d}v = \int_{s(t)} \rho \vec{n} \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U}) \mathrm{d}a = \rho_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{U}_1 \otimes \vec{U}_1 A_1 + \rho_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{U}_2 \otimes \vec{U}_2 A_2 \ =$$

$$= -\rho_1 A_1 U_1 \vec{U}_1 + \rho_2 A_2 U_2 \vec{U}_2 = \dot{m}(\vec{U}_2 - \vec{U}_1)$$

$$\boxed{\vec{F} = \dot{m}(\vec{U}_2 - \vec{U}_1)}$$

Nechť $H(\vec{x},t)=0$ je materiálový povrch. Použitím Taylorovy věty odvoďte *podmínku materiálového povrchu* (nebo také *rovnici materiálového povrchu*), která má tvar

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}H=0$$



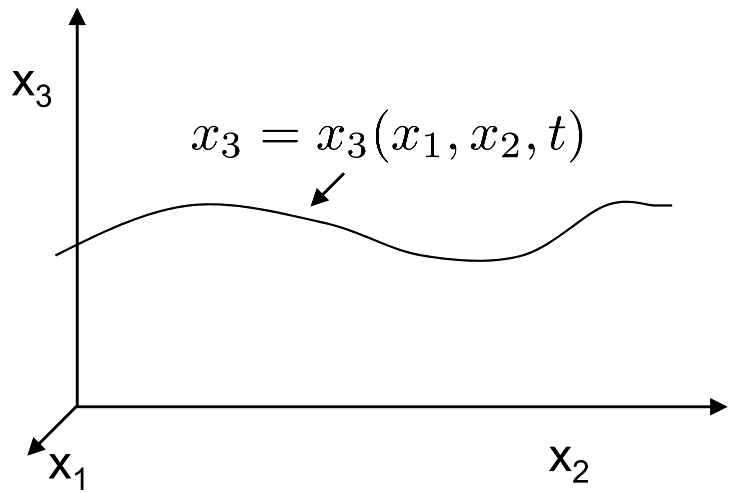
$$H(\vec{x},t+\delta t)=H(\vec{x},t)+\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{\vec{x},t}\delta t+\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_{\vec{x},t}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\delta t$$

$$=\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{\vec{x},t}\delta t+\vec{v}\cdot(\mathrm{grad}H)_{\vec{x},t}\delta t=0$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}H=0}$$

Rozhraní dvou kapalin je dáno vztahem $x_3 = x_3(x_1, x_2, t)\,.$

Určete časovou změnu výšky hladiny x_3 za předpokladu, že známe pole rychlostí. K odvození použijte rovnici materiálového povrchu.



$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v}\cdot \mathrm{grad} H = 0$$

$$H(x_1, x_2, x_3, t) = x_3 - x_3(x_1, x_2, t) = 0$$

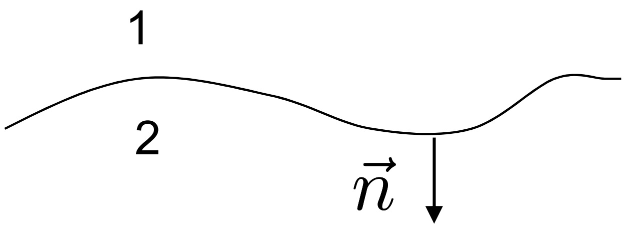
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial x_3}{\partial t}\,, \qquad \mathrm{grad} H = \left(-\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, -\frac{\partial x_3}{\partial x_2}, 1\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v}\cdot \mathrm{grad} H = -\frac{\partial x_3}{\partial t} - \frac{\partial x_3}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial x_3}{\partial x_2} v_2 + v_3 = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial x_3}{\partial t} = v_3 - \frac{\partial x_3}{\partial x_1} v_1 - \frac{\partial x_3}{\partial x_2} v_2}$$

Pomocí rovnice materiálového povrchu odvoďte kinematickou hraniční podmínku pro rozhraní dvou nemísitelných kapalin:

$$\vec{n} \cdot \vec{v}^1 = \vec{n} \cdot \vec{v}^2$$



$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad} H = 0$$

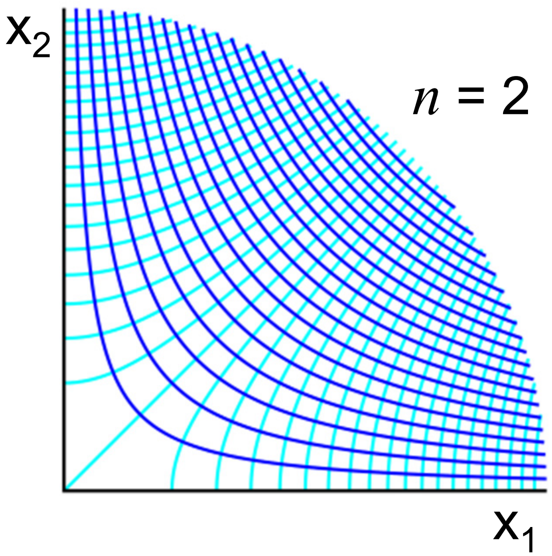
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v_1} \cdot \mathrm{grad} H = \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v_2} \cdot \mathrm{grad} H = 0$$

$$\vec{v_1} \cdot \mathrm{grad} H = \vec{v_2} \cdot \mathrm{grad} H$$

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{grad} H}{|\mathrm{grad} H|}$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{v}^1 = \vec{n} \cdot \vec{v}^2}$$

Příklad: rohové tečení (*corner flow*) – 1. eulerovský popis



Speciální případ tzv. potenciálového tečení (*potential flow*), kdy lze rychlost vyjádřit pomocí skalárního potenciálu:

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

V případě rohového tečení je $\phi = A r^n \cos n\theta$ (v polárních souřadnicích).

Zvolme $n = 2$, $A = ½$ a vyjádřeme rychlosti v souřadnicích x_1, x_2, x_3 :

$$\boxed{v_1 = x_1, \quad v_2 = -x_2, \quad v_3 = 0}$$

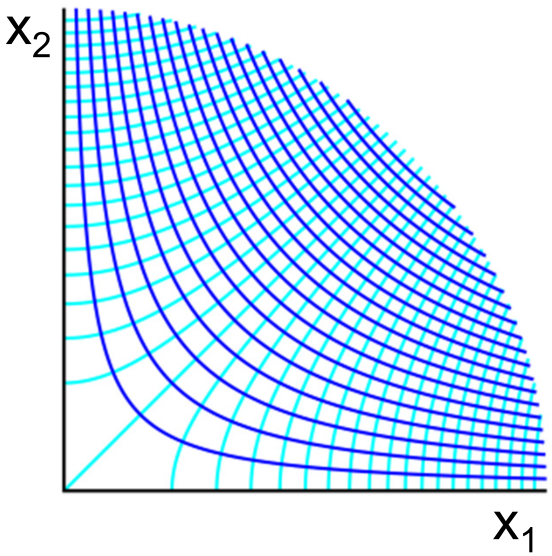
Zrychlení v eulerovském popisu je dáno vztahem $\vec{a}(\vec{x}, t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{= 0} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad} \vec{v}$

$$\vec{a} = \vec{v} \cdot \mathrm{grad} \vec{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = (x_1, -x_2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zrychlení jsme spočetli bez znalosti trajektorie, tj. bez znalosti funkce $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$.

Třebaže je proudění stacionární, zrychlení částice je nenulové.

Příklad: rohové tečení (*corner flow*) – 2. lagrangeovský popis (1)



$$\boxed{v_1 = x_1, \quad v_2 = -x_2, \quad v_3 = 0}$$

V případě lagrangeovského popisu musíme nejprve vyjádřit trajektorii, tj. určit funkci:

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

Trajektorie částice *(pathline)* je definována předpisem (str. 3a)

$$\frac{dx_i^P}{v_i} = dt, \quad x_i^P(0) = X_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \vec{x}^P = f(\vec{X}, t)$$

V našem případě $v_1 = x_1, \quad v_2 = -x_2$.

Pro jednoduchost vynecháme označení proudnice, tj. $\vec{x}^P \equiv \vec{x}$.

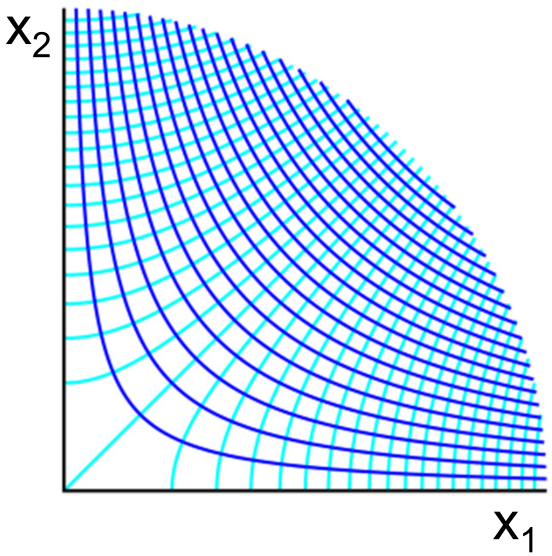
$$\frac{dx_1}{x_1} = dt, \quad \frac{dx_2}{x_2} = -dt \quad \Rightarrow \quad x_1 = C_1 e^t, \quad x_2 = C_2 e^{-t}$$

Konstantu určíme z počáteční podmínky

$$x_1(t=0) = X_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = X_1, \quad x_2(t=0) = X_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = X_2$$

$$\boxed{x_1 = X_1 \mathrm{e}^t, \; x_2 = X_2 \mathrm{e}^{-t}}$$

Příklad: rohové tečení (*corner flow*) – 2. lagrangeovský popis (2)



Vyjádření deformace v lagrangeovském popisu:

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) : \quad x_1 = X_1 \mathrm{e}^t, \; x_2 = X_2 \mathrm{e}^{-t}, \; x_3 = X_3$$

Rychlost v lagrangeovském popisu: $\vec{V}(\vec{X}, t) = \dfrac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}$

Složkově:

$$V_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = X_1 \mathrm{e}^t = x_1 = v_1$$

$$V_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} = -X_2 \mathrm{e}^{-t} = -x_2 = v_2$$

$$V_3 = \frac{\partial x_3}{\partial t} = 0 = v_3$$

Zrychlení v lagrangeovském popisu:

$$\vec{A}(\vec{X}, t) = \frac{\partial^2 \vec{\chi}}{\partial t^2}$$

$$A_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = X_1 \mathrm{e}^t = x_1 = a_1$$

$$A_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = X_2 \mathrm{e}^{-t} = x_2 = a_2$$

$$A_3 = \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = 0 = a_3$$

Tenzor gradientu rychlosti

$$\boldsymbol{l}(\vec{x},t) := \operatorname{grad}^T \vec{v}(\vec{x},t), \quad l_{kl}(\vec{x},t) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F}$$

Aplikace na rohové tečení

$$\vec{v}(\vec{x},t) = (x_1, -x_2, 0)$$

$$\boldsymbol{l}(\vec{x},t) := \operatorname{grad}^T \vec{v}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\chi}(\vec{X},t): \quad \begin{aligned} x_1 &= \mathrm{e}^t X_1 + 0.X_2 + 0.X_3 \\ x_2 &= 0.X_1 + \mathrm{e}^{-t} X_2 + 0.X_3 \\ x_3 &= 0.X_1 + 0.X_2 + 1.X_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = (\operatorname{grad} \vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{F}}$$

Trajektorie (*pathlines*) a proudnice (*streamlines*)

Trajektorie

$$\frac{d\vec{x}^P}{dt} = \vec{v}(\vec{x},t), \quad \vec{x}^P(0) = \vec{X}$$

Proudnice

$$d\vec{x}^S \times \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

Obecná definice: Proudnice je trajektorie za předpokladu, že je okamžitý stav proudění chápán jako stacionární proudění:

$$\frac{d\vec{x}^S}{d\tau} = \vec{v}(\vec{x}^S), \quad \vec{x}^S(0) = \vec{X} \quad \text{nebo také} \quad \frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{v}(\vec{s}), \quad \vec{s}_{\tau=0} = \vec{X},$$

kde τ je parametr označovaný také jako nepravý čas (*pseudotime*). Jelikož vektory $d\vec{s}$ a $\vec{v}$ jsou tečné, musí platit, že

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{v}}{v} \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{ds}{v} \quad \longrightarrow$$ τ je tedy čas pohybu částice ve stacionárním případě

Proudnici pak dostaneme řešením následujících rovnic

$$\frac{ds_i}{v_i} = d\tau, \quad s_i(0) = X_i, \quad i = 1,2,3 \quad \rightarrow \quad \vec{s} = f(\vec{X}, \tau)$$

Ve 2d geometrii můžeme vyloučit parametr τ a proudnici psát ve tvaru $s_2 = f(s_1)$ resp. $x_2 = f(x_1)$.

Trajektorie (*pathlines*) a proudnice (*streamlines*)

Shrnutí:

<u>Trajektorie</u> zachycuje pohyb zvolené částice v čase. Je dána zobrazením $\vec{x}^P(t) = \vec{\chi}(\vec{X}, t)_{\vec{X}=\vec{X}^P}$,
nebo může být spočtena integrováním rychlosti.

<u>Proudnice</u> umožňují pro pevně zadaný časový okamžik reprezentovat rychlostní pole pomocí křivek, které jsou v každém bodě tečné k vektoru rychlosti.

Proudnice je totožná s trajektorií pouze v případě stacionárního proudění.

<u>Příklad:</u> Pro následující pole rychlostí spočtěte proudnice a trajektorie a ukažte, že nejsou totožné.

$$v_1 = k_1, \quad v_2 = k_2 t, \quad v_3 = 0, \quad \text{kde} \quad k_1, k_2 > 0$$

Řešení

<u>Proudnice:</u>

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \rightarrow \frac{dx_1}{k_1} = \frac{dx_2}{k_2 t} \rightarrow x_2 = \frac{k_2 t}{k_1} x_1 + C(t) \longleftarrow \boxed{\textbf{přímky}}$$

<u>Trajektorie:</u>

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t v_1 dt' = X_1 + \int_0^t k_1 dt' = X_1 + k_1 t; \quad \text{odtud} \quad t = \frac{x_1 - X_1}{k_1}$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t v_2 dt' = X_2 + \int_0^t k_2 t dt' = X_2 + \frac{1}{2} k_2 t^2; \quad \text{tj.} \quad x_2 = X_2 + \frac{1}{2}\frac{k_2}{k_1^2}(x_1 - X_1)^2$$

paraboly

Proudová funkce (*stream function*)

K popisu proudění nestlačitelné kapaliny ve 2d geometrii se často používá tzv. proudová funkce definovaná následovně:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

což lze také vyjádřit jako $\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}, \quad \text{kde} \;\; \vec{v} = (v_x, v_y, 0) \;\; \text{a} \;\; \vec{\psi} = (0, 0, \psi).$

Zjevně platí, že takto definovaná rychlost má nulovou divergenci:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Funkce $\psi(x_1, x_2) = C$ jsou proudnice.

<u>Důkaz:</u>
Pokud by $\psi = C$ byla proudnice, musí platit $\vec{v} \cdot \nabla \psi = 0$.

$$\vec{v} \cdot \nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$