Cvičení 6 – Konstitutivní vztahy

Opakování:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \longleftarrow$$ rovnice kontinuity (zákon zachování hmoty)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\,, \qquad \mathbf{t}^T = \mathbf{t} \qquad \longleftarrow$$ pohybová rovnice a symetrie Cauchyho tenzoru napětí (zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti)

$$\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \mathrm{div}\,\vec{q} + \rho h \qquad \longleftarrow$$ zákon zachování energie

Neuvažujeme zde elektromagnetické jevy a chemické procesy. Termální procesy však nelze obecně vypustit, a to ze dvou důvodů:

(i) v reálném světě dochází vždy k přeměně (disipaci) deformační energie na teplo

(ii) deformační vlastnosti materiálů často silně závisí na teplotě

Zákony zachování obsahují *zdrojové členy* $\vec{f}, h$, o nichž předpokládáme, že jsou dány,
a *neznámé* $\rho,\ \vec{v},\ \mathbf{t},\ \epsilon,\ \vec{q},\ T$.

Uvažujeme-li symetrii Cauchyho tenzoru napětí, pak celkový počet neznámých (ve složkách) je celkem 1+3+6+1+3+1 = **15**, zatímco počet zákonů zachování ve skalárním tvaru je pouze 1+3+1 = **5**.

Abychom mohli určit neznámé veličiny, musíme charakterizovat vlastnosti studovaného materiálu, to jest specifikovat ***konstitutivní vztahy***, a to tak, aby počet neznámých odpovídal počtu rovnic.

Příklad: Nestlačitelná viskózní kapalina

a) Předpokládejme, že materiál je homogenní a izotropní. Zanedbáváme disipaci. Nulový vtok a výtok tepla.

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$
$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]$$

$\longleftarrow$ konstitutivní vztah pro newtonovskou kapalinu $(\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\eta\,\mathbf{d})$

Počet rovnic: 1+3+6 = 10

Známé materiálové parametry: $\rho,\ \eta$ (viskozita)

Známé zdrojové členy: síla $\rho\vec{f}$ a případně hraniční podmínky (vtok a výtok)

Počet neznámých ($\mathbf{t},\ \vec{v},\ p$) = 6 + 3 + 1 = 10

Máme tedy soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic (PDR) prvého řádu pro 10 neznámých.

Dosazením reologického vztahu do pohybové rovnice dostaneme: *

$$\operatorname{div}\left\{-p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]\right\} + \rho\vec{f} = -\operatorname{grad}p + \eta\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} + \rho\vec{f} = \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}$$

Původních deset PDR prvního řádu tak nahradíme 4 PDR druhého řádu pro 4 neznámé $\vec{v}$ a p :

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ -\operatorname{grad}p + \eta\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} + \rho\vec{f} = \rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v} \end{array}}$$

$\longleftarrow$ Navier-Stokesova rovnice

* $\operatorname{div}\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right] = \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} + \operatorname{grad}\cancel{\operatorname{div}\vec{v}} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v}$

b) Systém je zahříván a ochlazován zvenčí. Parametry nezávisí na teplotě.

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho_0\frac{D\vec{v}}{Dt}$$
$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]$$
$$\rho_0 C_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_0 C_p\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}T + k\operatorname{div}\operatorname{grad}T \quad \longleftarrow \quad \rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \cancel{\mathbf{t}:\mathbf{d}} - \operatorname{div}\vec{q} + \cancel{\rho h}$$
$$\rho = \rho_0\left[1 - \alpha(T - T_0)\right]$$

Rovnice termální konvekce v Boussinesqově aproximaci.

Známé materiálové parametry: $\rho_0,\ \eta,\ C_p,\ k,\ \alpha$

Počet neznámých ($\mathbf{t},\ \vec{v},\ p,\ \rho,\ T$) = 12 = počet rovnic

c) Ne-newtonovská nestlačitelná kapalina s teplotně závislými parametry

$$\underbrace{\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{v} = 0\\
&\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho_0\frac{D\vec{v}}{Dt}\\
&\rho_0 C_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_0 C_p\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}T + \operatorname{div}\left(k\operatorname{grad}T\right)
\end{aligned}}_{\text{zákony zachování}}
\qquad
\underbrace{\begin{aligned}
&\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]\\
&\rho = \rho_0\left[1 - \alpha(T - T_0)\right]\\
&\eta = \eta\left(T, \mathrm{t_{II}}\right) \ \longleftarrow \ \text{reologie}\\
&\alpha = \alpha\left(T\right),\ k = k(T),\ C_p = C_p(T)
\end{aligned}}_{\text{konstitutivní vztahy}}$$

Příklad: Statická elastická deformace

Předpokládejme, že materiál je izotropní a deformace i napětí jsou malé. Deformace je termodynamicky reverzibilní, takže nedochází k disipaci mechanické energie.

$$\rho = \rho_0 (1 - \mathrm{div}\,\vec{u})$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

$$\mathbf{t} = \lambda\,(\mathrm{div}\,\vec{u})\mathbf{I} + \mu \left[\mathrm{grad}\,\vec{u} + (\mathrm{grad}\,\vec{u})^T\right]$$

← Hookův zákon $(\mathbf{t} = \lambda(\mathrm{div}\vec{u})\mathbf{I} + 2\eta\,\tilde{\mathbf{e}})$

Příklad: Elastické vlny

Předpokládejme, že materiál je dokonale elastický, izotropní, homogenní a deformace i napětí jsou malé.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dosazením Hookova zákona do pohybové rovnice dostaneme:

$$\lambda\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vec{u} + \mu\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\vec{u})^T = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

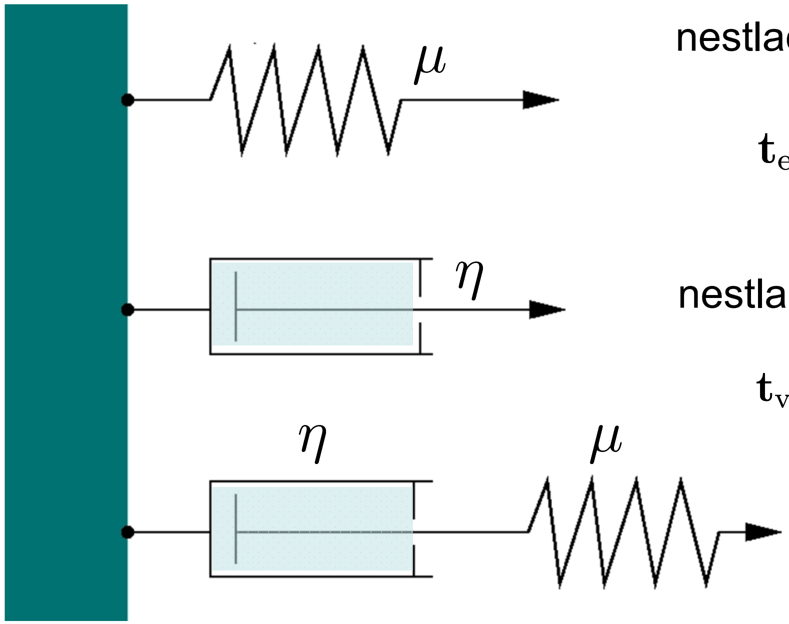
$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Aplikací operátoru div a rot dostaneme:

$$\underbrace{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}_{\text{objemová vlna}}\,, \qquad \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\Psi} = \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}}_{\text{střižná vlna}}\,, \qquad \text{kde} \quad \Phi = \mathrm{div}\,\vec{u} \quad \text{a} \quad \vec{\Psi} = \mathrm{rot}\,\vec{u}.$$

Příklad: Maxwellův viskoelastický model

Ke konstrukci viskoelastického modelu použijeme mechanické analogy:



nestlačitelná elasticita: $\lambda \to \infty,\ \operatorname{div}\vec{u} \to 0 \ \Rightarrow\ \lambda \operatorname{div}\vec{u} \to -p$

$$\mathbf{t}_{\text{el}} = -p\mathbf{I} + \mu\left[\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}_{\text{el}}$$

nestlačitelná viskozita:

$$\mathbf{t}_{\text{vis}} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{d}_{\text{vis}}$$

Maxwellův model:

$$\mathbf{t}_{\text{el}} = \mathbf{t}_{\text{vis}}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{\text{el}} + \mathbf{e}_{\text{vis}}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}}_{\text{el}} + \mathbf{d}_{\text{vis}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}^{\text{D}}}{2\mu} + \frac{\mathbf{t}^{\text{D}}}{2\eta}$$

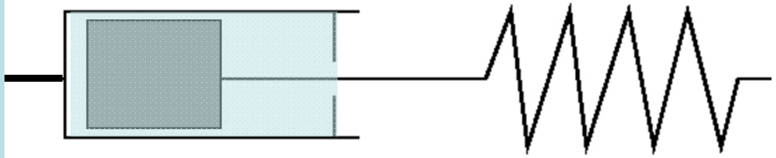
$$\mathbf{t}^{\text{D}} - \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right] = -\frac{\eta}{\mu}\dot{\mathbf{t}}^{\text{D}}$$

Máme tedy následující soustavu rovnic:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ &-\operatorname{grad}p + \operatorname{div}\mathbf{t}^{\text{D}} + \rho\vec{f} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right) \\ &\mathbf{t}^{\text{D}} - \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right] = -\frac{\eta}{\mu}\left(\frac{\partial\mathbf{t}^{\text{D}}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{t}^{\text{D}}\right) \end{aligned}}$$

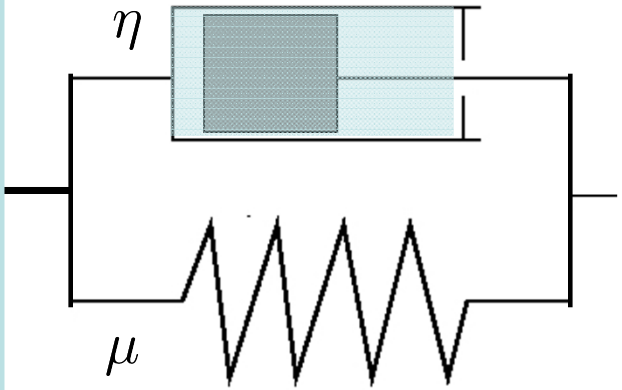
Počet rovnic souhlasí s počtem neznámých.

Vztah není invariantní vůči transformaci souřadné soustavy a platí pouze pro malé deformace (a nikoliv tedy pro viskoelastickou kapalinu).



Maxwellův model

$$\mathbf{t}_{\mathrm{el}} = \mathbf{t}_{\mathrm{vis}}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{\mathrm{el}} + \mathbf{e}_{\mathrm{vis}}$$



Příklad: Kelvinův viskoelastický model

$$\mathbf{t}^{\mathrm{D}} = \mathbf{t}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{el}} + \mathbf{t}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{vis}}, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{el}} = \mathbf{e}_{\mathrm{vis}} = \mathbf{e}$$

$$\mathbf{t}_{\mathrm{el}} = -p\mathbf{I} + \mu \left[\mathrm{grad}\,\vec{u} + (\mathrm{grad}\,\vec{u})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}_{\mathrm{el}}$$

$$\mathbf{t}_{\mathrm{vis}} = -p\mathbf{I} + \eta \left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{d}_{\mathrm{vis}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e} + 2\eta\dot{\mathbf{e}}}$$

Platí pouze pro malé deformace!