Mechanika kontinua – domácí úkol č. 1

termín odevzdání **12. 4.** mailem na adresu ondrej.cadek@mff.cuni.cz

1. Odvoďte následující vztah. Inspirovat se můžete vsuvkou a příkladem za str. 9 v přednášce č. 1.

$$\mathrm{Div\ Grad} \bullet = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T : \mathrm{grad\ grad} \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{F}^T \cdot \mathrm{grad} \bullet$$

2 . Odvoďte vztah pro deformační elipsoid v případě rohového tečení a načrtněte obrázek, jak se deformační elipsoid bude měnit v čase. Zadání proudového pole pro rohové tečení najdete ve cvičeni 2-3. Deformační elipsoid je zaveden v přednášce č. 2 na str. 19 a ilustrován příkladem na další straně.

3. Pro případ rohového tečení odvoďte deformační gradient a rozložte ho pomocí věty o polárním rozkladu na rotační a deformační část.

4. Pro případ rohového tečení vyjádřete element $d\vec{x}$ jako superpozici translace, rotace a deformace (viz přednáška 2 str. 22.

5. Ukažte, že platí

a) $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$

b) $J = 1 + tr\mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$

c) $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$

6. Spočtěte materiálovou derivaci Fingerova tenzoru $\mathbf{b}$.

7. Odvoďte Reynoldsův transportní teorém ve tvaru

$$\frac{D}{Dt}\int_{s(t)} \vec{q} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = \int_{s(t)} \left(\frac{D\vec{q}}{Dt} + (\mathrm{div}\vec{v})\,\vec{q} - \vec{q} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{a}$$

Návod: Postupujte stejně jako při odvození tradiční formy Reynoldsova teorému a použijte vztah pro změnu plochy $d\vec{a}$ (viz přednáška 2 str. 16).

Řešení

Úloha 1: Při odvození lze postupovat stejně jako v případě $\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \bullet$, který je odvozen v přednášce 1 za stranou 9 a kde stačí pouze zaměnit velká a malá písmena a nahradit symbol $\mathbf{F}$ symbolem $\mathbf{F}^{-1}$. Někteří studenti přišli s elegantním alternativním odvozením, které v kopii převzaté z domácího úkolu pana Berana uvádím níže:

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}\ \bullet = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet + \mathrm{Div}\ \mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \bullet$$

Nejdříve si odvodíme identitu pro Grad $\bullet$, uvažujme Eulerovský tensor $\mathbf{t}(\vec{x},t)$ a Lagrangeovský tensor $\mathbf{T}(\vec{X},t)$, pak z definice

$$\mathrm{Grad}\ \mathbf{T} = \vec{E}_K\otimes\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial X_K} = \vec{E}_K\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{X_K} = \chi_{k,K}\vec{E}_K\otimes\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial x_k} = (\vec{e}_k\cdot\mathbf{F})\otimes\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial x_k} =$$

$$= \left(\mathbf{F}^T\cdot\vec{e}_k\right)\otimes\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T\cdot\left(\vec{e}_k\otimes\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial x_k}\right) = \mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \mathbf{t}\,.$$

V dalším kroku použijeme identitu

$$\mathrm{Div}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{Div}\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{Grad}\ \mathbf{B}\,.$$

Přímou aplikací na identitu získanou výše obdržíme

$$\mathrm{Div}\ \left(\mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \mathbf{t}\right) = \mathrm{Div}\ \mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \mathbf{t} + \mathbf{F}\cdot\mathrm{Grad}\ \mathrm{grad}\ \mathbf{t} =$$

$$= \mathrm{Div}\ \mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \mathbf{t} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \mathbf{t}\,.$$

Tím jsme dokázali požadovanou rovnost.

Úloha 2: Deformační gradient je dán vztahem odvozeným na straně 12 cvičení 2-3:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K určení deformačního elipsoidu potřebujeme spočítat tenzor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{.}\ \mathbf{F}$ a určit jeho vlastní čísla a vektory:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{T} \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha se nám zjednodušila v tom, že matice $\mathbf{C}$ je diagonální a vlastními čísly, které odpovídají osám x_1, x_2 a x_3 deformačního elipsoidu, jsou přímo výrazy na diagonále:

$$\lambda_1 = e^{2t},\ \lambda_2 = e^{-2t},\ \lambda_3 = 1\,.$$

Úloha 3: Polární rozklad použijeme ve tvaru $\mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}\,,$ kde $\mathbf{C}$ známe z úlohy 2. Výpočet odmocniny z diagonální matice je triviální:

$$\sqrt{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

Zbývá určit matici $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

Úloha 4: Použijeme vztah z přednášky 2 ze strany 22 vpravo dole:

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X} \;=\; \mathbf{I} \cdot d\vec{X} \;+\; \tilde{\mathbf{E}} \cdot d\vec{X} \;+\; \tilde{\mathbf{R}} \cdot d\vec{X}\,,$$

kde

$$\tilde{\mathbf{E}} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)\;,\;\; \tilde{\mathbf{R}} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}^T - \mathbf{H})\,.$$

Nejprve spočteme tenzor $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^T - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

který dosadíme do vztahů pro linearizovaný tenzor deformace a rotace. Dostaneme

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{H}\;,\;\; \tilde{\mathbf{R}} = 0\,.$$

Odtud

$$d\vec{x} = d\vec{X} + (\mathrm{e}^t\!-\!1, \mathrm{e}^{-t}\!-\!1, 0) \cdot d\vec{X}\,.$$

Úloha 5: První příklad lze odvodit např. z binomické věty nebo z toho, že v případě malých deformací můžeme ztotožnit lagrangeovský a eulerovský gradient deformace. Hezké odvození všech tří příkladů nabídl opět pan Beran, jehož řešení uvádím na následující straně.

a) $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$

b) $J = 1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$

c) $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$

---

a) Pokud je taková identita pravdivá, musí platit $\mathbf{I} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}$, ověříme

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)\right)\left(I + \mathbf{H}^T\right) = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)\,.$$

b) Z definice máme $J = \det \mathbf{F}$. Nejdříve si přepíšeme tenzor deformace pomocí gradientu tenzoru posunutí jako $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}^T$, získáme

$$\det \mathbf{F} = \det\,(\mathbf{I} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} 1 + H_{11} & H_{21} & H_{31} \\ H_{12} & 1 + H_{22} & H_{32} \\ H_{13} & H_{23} & 1 + H_{33} \end{bmatrix}$$

Determinant určíme Sarrusovým pravidlem a získáme

$$\det \mathbf{F} = (1 + H_{11})(1 + H_{22})(1 + H_{33}) + O(|\mathbf{H}|^2)\,,$$

$$\det \mathbf{F} = 1 + H_{11} + H_{22} + H_{33} + O(|\mathbf{H}|^2)\,,$$

$$\det \mathbf{F} = 1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)\,.$$

c) Piolův tensor je definovaný jako $\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}$. K řešení tedy stačí pouze použít první identitu a získáme

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)\right) =$$

$$= \mathbf{I} - \mathbf{H}^T - \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2) = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T - \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)\,.$$

Úloha 6: Použijeme, následující vztahy:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F}$$

Potom

$$\dot{\mathbf{b}} = \overset{\cdot}{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F})^T = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{l}^T =$$

$$= \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{l}^T \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{b}^T = \mathbf{b}}}{=} 2\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{b}$$

Úloha 7:

$$\frac{D}{Dt} \int_{s(t)} \vec{q} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = \frac{D}{Dt} \int_S \vec{Q} \cdot J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_S \frac{D}{Dt} \left(\vec{Q} \cdot J\mathbf{F}^{-T} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} =$$

$$= \int_S \left[\frac{D\vec{Q}}{Dt} \cdot \left(J\mathbf{F}^{-T} \right) + \vec{Q} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\dot{J} = J \mathrm{div}\, \vec{v}}}}{\dot{J}} \mathbf{F}^{-T} + \vec{Q} \cdot J \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\overset{\cdot}{(\mathbf{F}^{-T})} = -\boldsymbol{l}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} = -(\mathrm{grad}\, \vec{v}) \cdot \mathbf{F}^{-T}}}}{\dot{\mathbf{F}}^{-T}} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{A} =$$

$$= \int_S \left[\frac{D\vec{Q}}{Dt} + (\mathrm{div}\, \vec{v})\vec{Q} - \vec{Q} \cdot (\mathrm{grad}\, \vec{v}) \right] \cdot J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{s(t)} \left(\frac{D\vec{q}}{Dt} + (\mathrm{div}\vec{v})\, \vec{q} - \vec{q} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{v} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{a}$$