Mechanika kontinua – část 2 Geometrie deformace - pokračování

v

OPAKOVÁNÍ

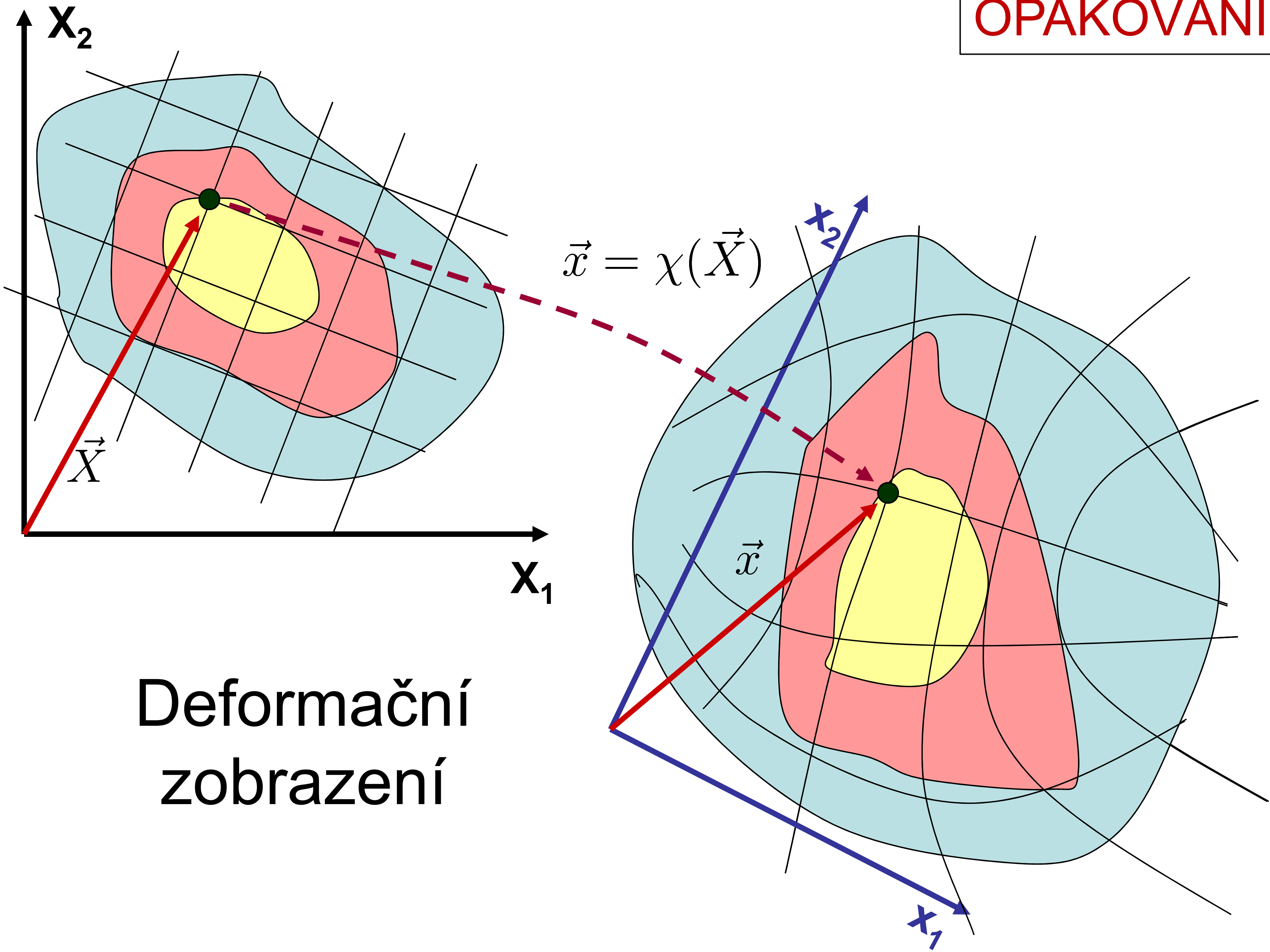
Geometrie deformace — Kinematika — Působící síly a napětí

Konstitutivní vztahy + Zákony zachování

Soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují deformaci spojitého materiálu

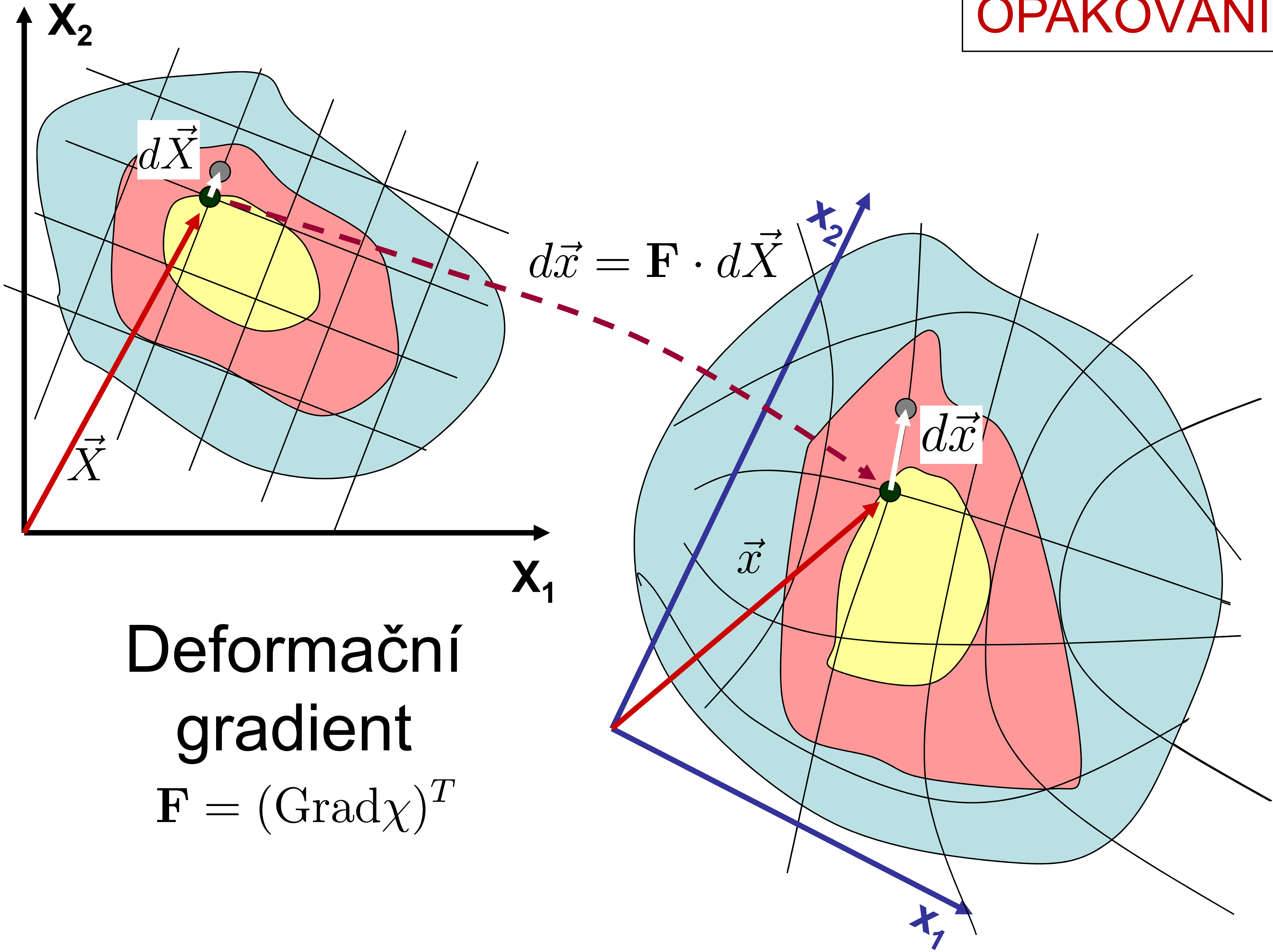
Analýza rovnic → Numerické řešení → Počítačová implementace → Vizualizace výsledků

OPAKOVÁNÍ



Deformační zobrazení

OPAKOVÁNÍ



Deformační gradient

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\chi)^T$$

OPAKOVÁNÍ

Deformační gradient

$$x_k = \chi_k(X_1, X_2, X_3), \quad k = 1,2,3$$

$$X_K = \chi_K^{-1}(x_1, x_2, x_3), \quad K = 1,2,3$$

Matematická podmínka, která garantuje existenci jednoznačné inverzní funkce: $J(\vec{X}, t) := \det\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial X_K}\right) \neq 0$

<u>Infinitesimální vektory</u> $d\vec{x}, d\vec{X}$

$$dx_k = \underbrace{\frac{\partial \chi_k}{\partial X_K}}_{\chi_{k,K}} dX_K = \chi_{k,K} dX_K$$

$$dX_K = \underbrace{\frac{\partial \chi_K^{-1}}{\partial x_k}}_{\chi_{K,k}^{-1}} dx_k = \chi_{K,k}^{-1} dx_k$$

Materiálový deformační gradient

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) := \chi_{k,K}(\vec{X}, t)(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T$$

Dvoubodový tenzor

Prostorový deformační gradient

$$\mathbf{F}^{-1}(\vec{x}, t) := \chi_{K,k}^{-1}(\vec{x}, t)(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k)$$

$$d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}$$

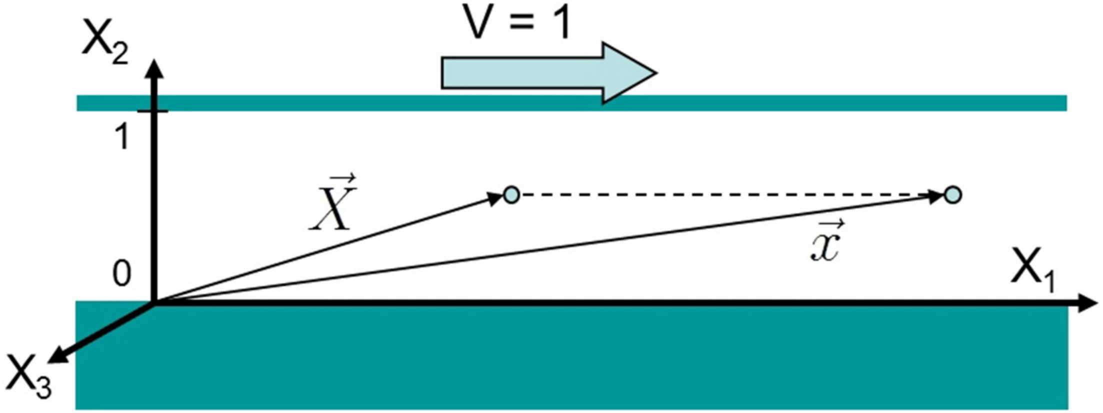
$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathrm{grad}\vec{\chi}^{-1})^T$$

Poznámka k definici gradientu na vektor:

$$\vec{\nabla} := \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}, \quad \mathrm{grad}\vec{\chi} = \vec{\nabla} \otimes \vec{\chi} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K} \otimes \chi_k \vec{e}_k = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{\chi})^T$$

CVIČENÍ – JEDNODUCHÝ SMYK (simple shear)

CVIČENÍ, NA KTERÉ DNES NAVÁŽEME

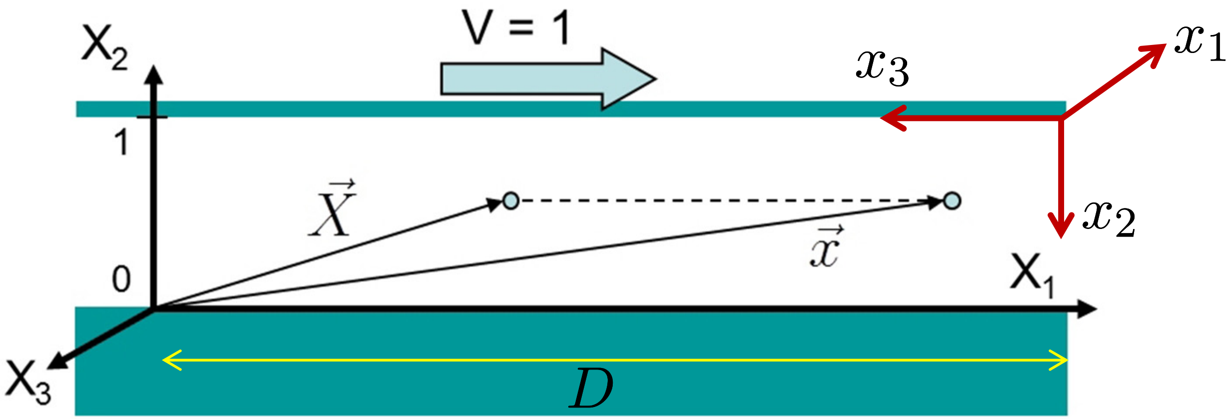


$$x_1 = X_1 + X_2 t \qquad X_1 = x_1 - x_2 t$$

$$x_2 = X_2 \qquad X_2 = x_2$$

$$x_3 = X_3 \qquad X_3 = x_3$$

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$



$$x_1 = -X_3$$

$$x_2 = 1 - X_2$$

$$x_3 = D - X_1 - X_2 t$$

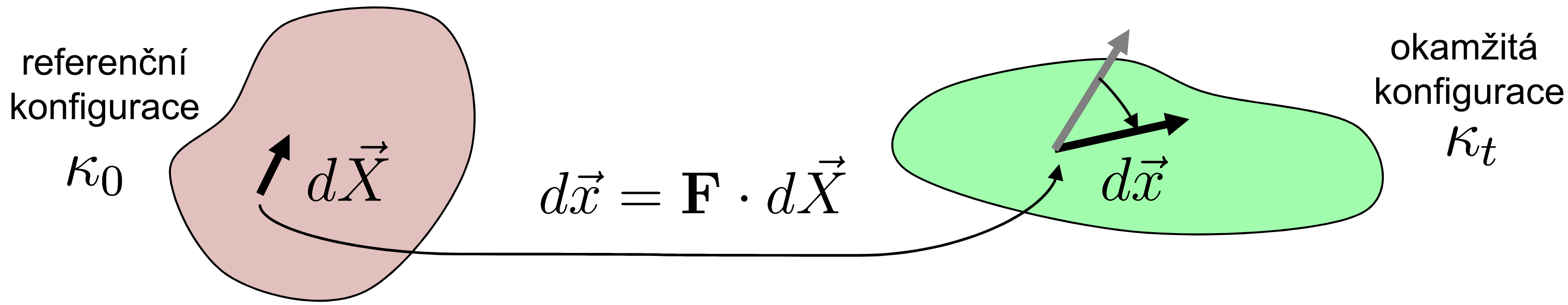
V dnešní přednášce:

- Polární rozklad deformačního gradientu
- Objekty popisující deformaci
- Tenzor deformace a interpretace jeho složek
- Změny objemu a plochy při deformaci
- Invarianty tenzoru deformace a hlavní směry deformace
- Vektor a gradient posunutí
- Geometrická linearizace (malé deformace)

Polární rozklad deformačního gradientu

Analogie polárního rozkladu komplexního čísla: $z = x + iy = re^{i\phi}$, kde $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\phi = \arctan(y/x)$

Lineární transformaci $d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$ lze rozložit do dvou kroků, odpovídajících natažení a rotaci:



Věta o polárním rozkladu tenzoru $\mathbf{F}, (\det \mathbf{F} \neq 0)$:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}}$$

kde

1. $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou symetrické a pozitivně definitní tenzory.
2. Tenzor $\mathbf{R}$ je ortogonální, tj. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$, a jedná se tedy o ***rotační tenzor***.
3. $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{R}$ jsou určeny jednoznačně.
4. $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ mají stejná vlastní čísla. Je-li $\vec{k}$ vlastní vektor matice $\mathbf{U}$, pak $\mathbf{R} \cdot \vec{k}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{V}$.

Polární rozklad deformačního gradientu – pokračování

K důkazu budeme potřebovat:

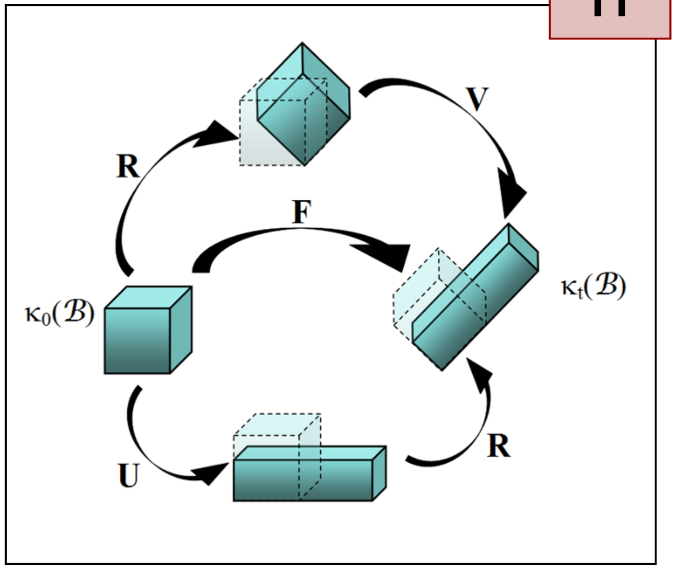
Pozitivní definitnost

Vlastní vektory a vlastní čísla

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T,\ \mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$



$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$$

Polární rozklad deformačního gradientu – pokračování

Zaveďme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$

Platí

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0 \quad \text{pro} \quad \vec{v} \neq 0$$

A tedy

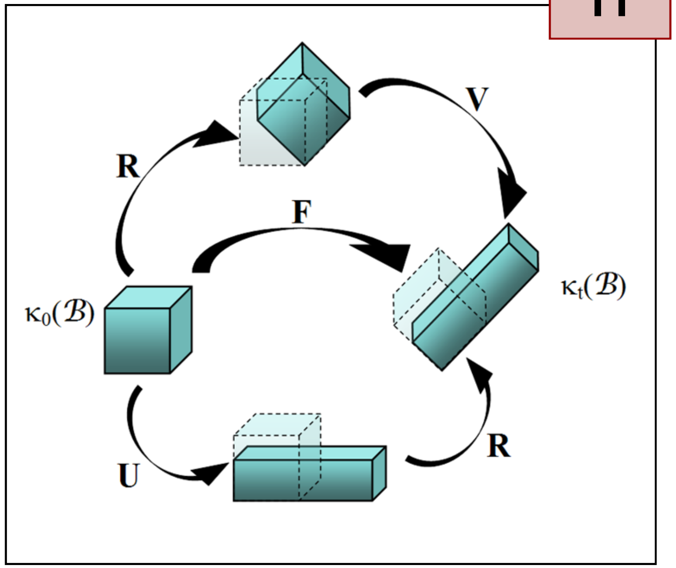
$$0 < (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \;=\; \vec{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{v} \;=\; \vec{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{v}$$

pozitivně definitní

Zaveďme dále tenzory

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

Right stretch tensor *Left stretch tensor*



$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

A definujme

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

Platí, že

tenzor je symetrický

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$$

a analogicky pro $\tilde{\mathbf{R}}$. $\mathbf{R}$ a $\tilde{\mathbf{R}}$ jsou tedy **ortogonální matice** a platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$$

Ukážeme ještě, že $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$:

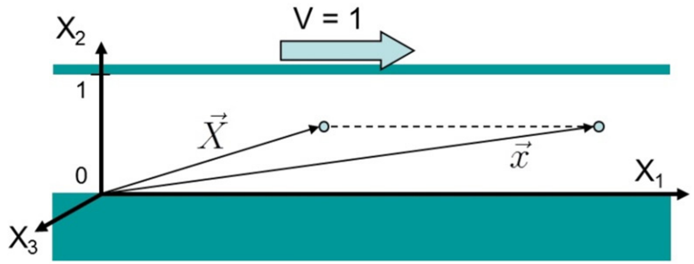
$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T) \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}},$$ a tedy $$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$$

Odtud $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \tilde{\mathbf{U}}^2 \;\rightarrow\; \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \;\rightarrow\; \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$

Vlastní čísla a vektory: $\lambda \vec{p} = \mathbf{U} \cdot \vec{p}$ a současně $\underline{\lambda \mathbf{R} \cdot \vec{p}} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot \vec{p} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \cdot \vec{p} = \underline{\mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot \vec{p})}$

Cvičení

Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$



$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

Výpočet vlastních čísel a odmocniny tenzoru $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & t & 0 \\ t & t^2+1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{charakteristická matice}} = 0$$

$$(1-\lambda)(t^2+1-\lambda)(1-\lambda) - t^2(1-\lambda) = 0$$ charakteristický polynom

$$(1-\lambda)[\lambda^2 - \lambda(t^2+2) + 1] = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2+2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1 \quad \longrightarrow$$ všechna vlastní čísla jsou kladná

Cvičení

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2+2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

Určení vlastních vektorů

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_i = \begin{pmatrix} 1-\lambda_i & t & 0 \\ t & t^2+1-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1,2,3$$

Ukážeme pouze pro λ_1 :

$$(\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & t & 0 \\ t & t^2+1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda_1)p_{11} + tp_{12} &= 0 \\ tp_{11} + (t^2+1-\lambda_1)p_{12} &= 0 \\ (1-\lambda_1)p_{13} &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \text{ určíme } \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Jordanův rozklad

$$\sqrt{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

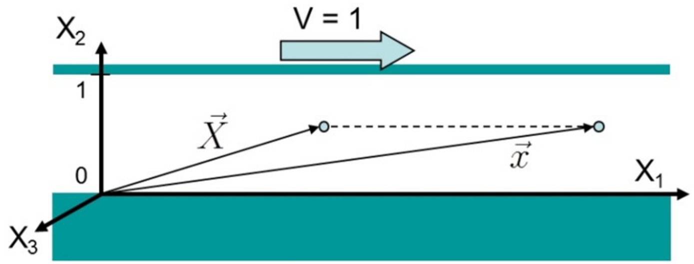
Cvičení

Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$



$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T$$

Popis deformace

$$(d\vec{X}\cdot\mathbf{F}^T)\cdot(\mathbf{F}\cdot d\vec{X}) = d\vec{X}\cdot(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F})\cdot d\vec{X} \qquad \vec{a}\cdot\mathbf{A}\cdot\vec{b} = \mathbf{A}:(\vec{b}\otimes\vec{a})$$

$$ds^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = (\mathbf{F}\cdot d\vec{X})\cdot(\mathbf{F}\cdot d\vec{X}) \overset{\downarrow}{=} d\vec{X}\cdot\mathbf{C}\cdot d\vec{X} \overset{\downarrow}{=} \mathbf{C}:(d\vec{X}\otimes d\vec{X})$$

$$\mathbf{C}(\vec{X},t) := \mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

$$\mathbf{C}_{IJ} = F_{kI}F_{kJ} = \chi_{k,I}\chi_{k,J} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J}$$

Greenův deformační tenzor
right Cauchy-Green deformation tensor
nebo *Green's deformation tensor*

$$\mathbf{B}(\vec{X},t) := \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{B}_{IJ} = \frac{\partial X_I}{\partial x_k}\frac{\partial X_J}{\partial x_k}$$

Piolův deformační tenzor
Piola (nebo *Finger*) *tensor*
(terminologie není ustálená)

$$\mathbf{b}(\vec{x},t) := \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}\frac{\partial x_j}{\partial X_K}$$

Fingerův deformační tenzor
left Cauchy-Green deformation tensor
nebo *Finger deformation tensor*
(terminologie není ustálená)

$$\mathbf{c}(\vec{x},t) := \mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{b}^{-1}$$

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i}\frac{\partial X_K}{\partial x_j}$$

Cauchyho deformační tenzor
Cauchy deformation tensor
někdy také *Piola* nebo *Finger tensor*

$$dS^2 = d\vec{X}\cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1}\cdot d\vec{x})\cdot(\mathbf{F}^{-1}\cdot d\vec{x}) = d\vec{x}\cdot\mathbf{c}\cdot d\vec{x} = \mathbf{c}:(d\vec{x}\otimes d\vec{x})$$

Tenzor deformace

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

$\mathbf{C}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$	Greenův deformační tenzor
$\mathbf{c}(\vec{x}, t) := \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}$	Cauchyho deformační tenzor

← symetrické tenzory, na rozdíl od $\mathbf{F}$ pouze 6 nezávislých složek

Rozdíl čtverců: $ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\vec{X} = d\vec{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \cdot d\vec{x}$

$\mathbf{E}(\vec{X}, t) := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ lagrangeovský tenzor deformace (*Lagrangian strain tensor*)

$\mathbf{e}(\vec{x}, t) := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c})$ eulerovský tenzor deformace (*Eulerian strain tensor*)

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = d\vec{x} \cdot 2\mathbf{e} \cdot d\vec{x}$$

Poznámka:
George Green (1793 – 1841, Anglie, matematický fyzik)
Gabrio Piola (1794 – 1850, Itálie, matematický fyzik)
Josef Finger (1841 v Plzni-1925, vystudoval matematiku a fyziku na UK, později rektor Technische Hochschule ve Vídni)

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$E_{11},\ E_{22},\ E_{33}$ normálová deformace (*normal strain*)

$E_{12} = E_{21},\ E_{13} = E_{31},\ E_{23} = E_{32}$ smyková deformace (*shear strain*)

Zaveďme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K})\ dS^2 \ \rightarrow\ \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}}_{E_{(\vec{K})}(E_{(\vec{K})}+2)} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

Máme tedy rovnici

$$E_{(\vec{K})}(E_{(\vec{K})} + 2) - \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 0$$

jejíž fyzikálně přijatelné řešení je

$$E_{(\vec{K})} = -1 + \sqrt{\underbrace{1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}}}$$

$\vec{K} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{K} = 1$

kladný výraz: $1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 1 + \vec{K} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \vec{K} \downarrow = \vec{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K} > 0$

$$\boxed{E_{(1)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{11}}\ , \qquad E_{(2)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{22}}\ , \qquad E_{(3)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{33}}}$$

… a analogicky pro tenzor $\mathbf{e}$

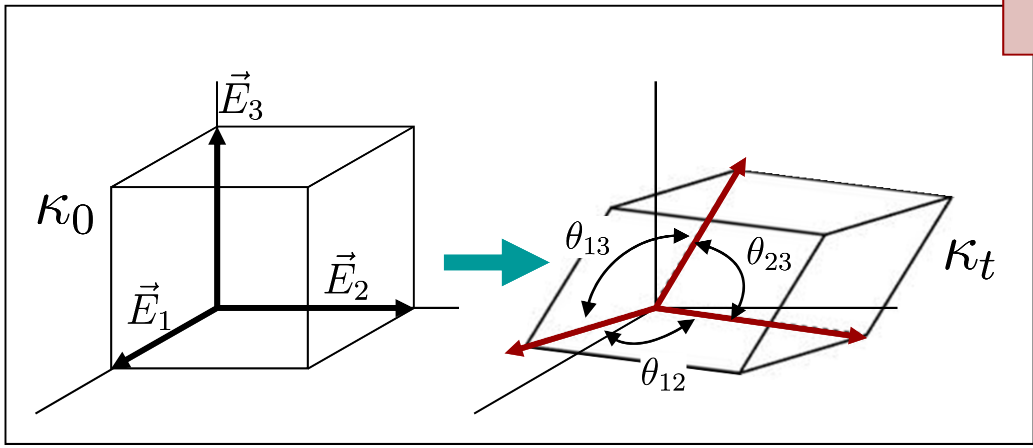
Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \qquad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory v konfiguraci κ_0 je

$$\cos\Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$\cos\theta = \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F}\cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)}\cdot\mathbf{C}\cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)}ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)}\cdot\mathbf{C}\cdot\vec{K}^{(2)})\,\frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}}\frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} =$$

$$= \frac{\vec{K}^{(1)}\cdot\mathbf{C}\cdot\vec{K}^{(2)}}{(E_{(\vec{K}_1)}+1)(E_{(\vec{K}_2)}+1)} = \frac{\vec{K}^{(1)}\cdot(\mathbf{I}+2\mathbf{E})\cdot\vec{K}^{(2)}}{\sqrt{1+\vec{K}^{(1)}\cdot 2\mathbf{E}\cdot\vec{K}^{(1)}}\,\sqrt{1+\vec{K}^{(2)}\cdot 2\mathbf{E}\cdot\vec{K}^{(2)}}}$$

Zvolíme-li $\quad \vec{K}^{(1)} = \vec{E}_1,\ \ \vec{K}^{(2)} = \vec{E}_2,\ \ \vec{K}^{(3)} = \vec{E}_3,$ pak

$$\boxed{\cos\theta_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}},\quad \cos\theta_{13} = \frac{2E_{13}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{33}}},\quad \cos\theta_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{1+2E_{22}}\sqrt{1+2E_{33}}}}$$

… a analogicky pro tenzor **e**

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA\ \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})$ Jacobiho identita, str. 9

se po deformaci změní na

$$d\vec{a} = da\ \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

a tedy

$$\boxed{d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}}$$

Piolův tenzor $\mathbf{B}$, str. 12

Odvoďme nyní vztah mezi skaláry da a dA :

$$(da)^2 = d\vec{a} \cdot d\vec{a} = (J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}) \cdot (J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}) = J^2 (dA)^2 \vec{N} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \vec{N}$$

odkud

$$\boxed{da = J\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}\ dA}$$

Dosazením tohoto vztahu do vztahu pro $d\vec{a}$ získáme relaci mezi vektory $\vec{n}$ a $\vec{N}$:

$$d\vec{a} = da\ \vec{n} = \underline{\left(J\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}\ dA\right)\vec{n}} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (dA\ \vec{N}) = \underline{J(\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}) dA}$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}}}$$

Změny objemu

Srovnejme objem infinitesimálního rovnoběžnostěnu před deformací,

$$dV := (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) \cdot d\vec{X}^{(3)},$$

a po deformací,

$$dv := (d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)}) \cdot d\vec{x}^{(3)} = [(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)})] \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(3)}).$$

Použitím Jacobiho identity, str. 9,

$$J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C})$$

dostaneme:

$$\boxed{dv = \det \mathbf{F}\ dV = J\ dV}$$

⇒ Determinant gradientu napětí v materiálových prostředích musí být vždy kladný.

Invarianty tenzoru deformace, hlavní směry deformace (1)

Hledejme extrémy funkce $f(\vec{V}) := \vec{V} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{V}$, kde $\vec{V}$ je jednotkový vektor.

Použijeme metodu Lagrangeových multipliátorů,

$$\frac{\partial}{\partial V_K}\left[\vec{V} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{V} - \lambda(\vec{V} \cdot \vec{V} - 1)\right] = 0\,,$$ a dostaneme (vektorově) $$\mathbf{E} \cdot \vec{V} - \lambda \vec{V} = 0.$$

Lagrangeův multiplikátor (neznámá)

Tato rovnice má nenulové řešení jen v případě, že charakteristický determinant je roven nule, tj.

$\det(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, což vede na kubickou rovnici pro λ :

$-\lambda^3 + E_I \lambda^2 + E_{II}\lambda + E_{III} = 0$, kde

$$\boxed{\begin{aligned} &E_I := E_{11} + E_{22} + E_{33} = \mathrm{tr}\ \mathbf{E} \\ &E_{II} := E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33} - E_{12}^2 - E_{13}^2 - E_{23}^2 = \tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\ \mathbf{E})^2 - \mathrm{tr}\ (\mathbf{E}^2)\right] \\ &E_{III} := \det \mathbf{E} \end{aligned}}$$

invarianty tenzoru $\mathbf{E}$

Tenzor $\mathbf{E}$ má pouze tři nezávislé invarianty. Další invarianty tenzoru $\mathbf{E}$ musí být tedy funkcí výše uvedených tří invariantů. Často se používají např. následující invarianty:

$$\tilde{E}_I := \mathrm{tr}\ \mathbf{E}, \quad \tilde{E}_{II} := \mathrm{tr}\ (\mathbf{E})^2, \quad \tilde{E}_{III} := \mathrm{tr}\ (\mathbf{E})^3$$

Lze ukázat, že

$$\tilde{E}_I = E_I, \quad \tilde{E}_{II} = (E_I)^2 - 2E_{II}, \quad \tilde{E}_{III} = (E_I)^3 - 3E_I E_{II} + 3E_{III}$$

Invarianty tenzoru deformace, hlavní směry deformace (2)

$E_I,\ E_{II},\ E_{III}$ jsou invariantní vůči ortogonální transformaci souřadnic, tj.

$E_I^* = E_I,\ E_{II}^* = E_{II},\ E_{III}^* = E_{III},$ kde $\mathbf{E}^* = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}^T.$

Ověření pro první invariant:

$$E_I^* = E_{KK}^* = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}^T)_{KK} = Q_{KM}E_{ML}Q_{KL} = Q_{KM}Q_{KL}E_{ML} = \delta_{ML}E_{ML} = E_{LL} = E_I$$

$$\boxed{(\bullet)_{JN} = Q_{JM}E_{ML}Q_{NL}} \qquad \boxed{Q_{KM}Q_{KL} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})_{ML} = \mathbf{I}_{ML} = \delta_{ML}}$$

Hlavní směry deformace

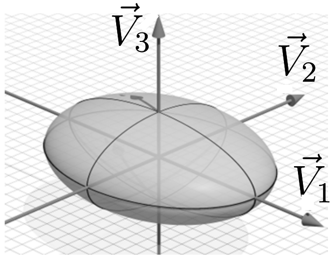
Charakteristická rovnice $\det(\mathbf{E}-\lambda\mathbf{I}) = 0$ má řešení $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ (= *principal strains*).

Řešením rovnice $\mathbf{E}\cdot\vec{V}_\alpha - \lambda\vec{V}_\alpha = 0$ pro α = 1,2,3 dostaneme vektory $\vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ \vec{V}_3,$ určující hlavní směry deformace (*principal directions*).

V souřadné soustavě spojené s těmito vektory má tenzor $\mathbf{E}$ diagonální tvar, tj. deformace je charakterizována čistou dilatací ($\lambda > 0$) nebo kompresí ($\lambda < 0$).

Pro geometrickou představu je vhodnější místo funkce $f(\vec{V}) := \vec{V}\cdot\mathbf{E}\cdot\vec{V}$ uvažovat funkci $g(\vec{V}) := \vec{V}\cdot\mathbf{C}\cdot\vec{V},$ neboť tenzor $\mathbf{C}$ je symetrický a pozitivně definitní a g má tedy vlastnosti míry.

Deformační elipsoid:



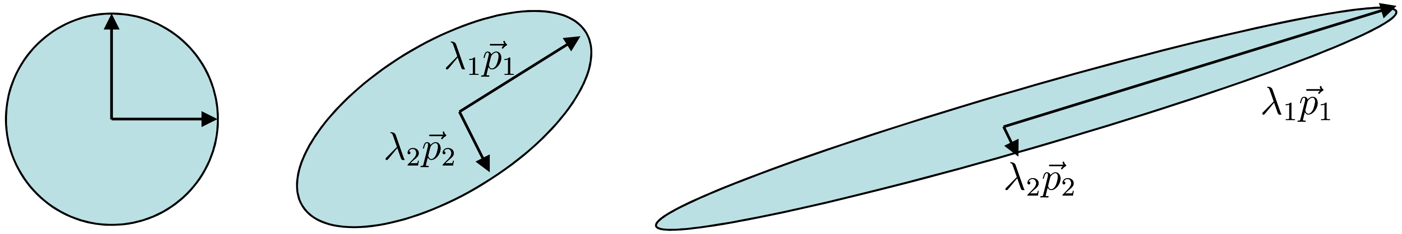
Cvičení

Deformační elipsoid

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2+2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$t = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $t \to \infty \Rightarrow \lambda_1 \to \infty,\ \lambda_2 \to 0,\ \lambda_3 = 1$



Cvičení

Lagrangeovský tenzor deformace

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & t/2 & 0 \\ t/2 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Změny délek

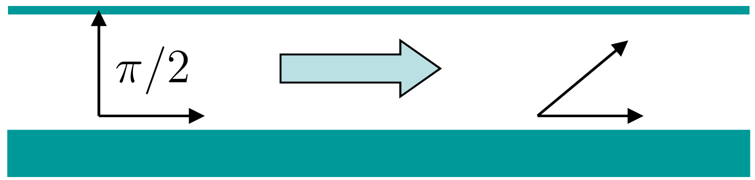
$$E_{(1)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{11}}\ , E_{(2)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{22}}\ , E_{(3)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{33}}$$

$$E_{(1)} = 0\ , E_{(2)} = -1 + \sqrt{1 + t^2}\ , E_{(3)} = 0$$

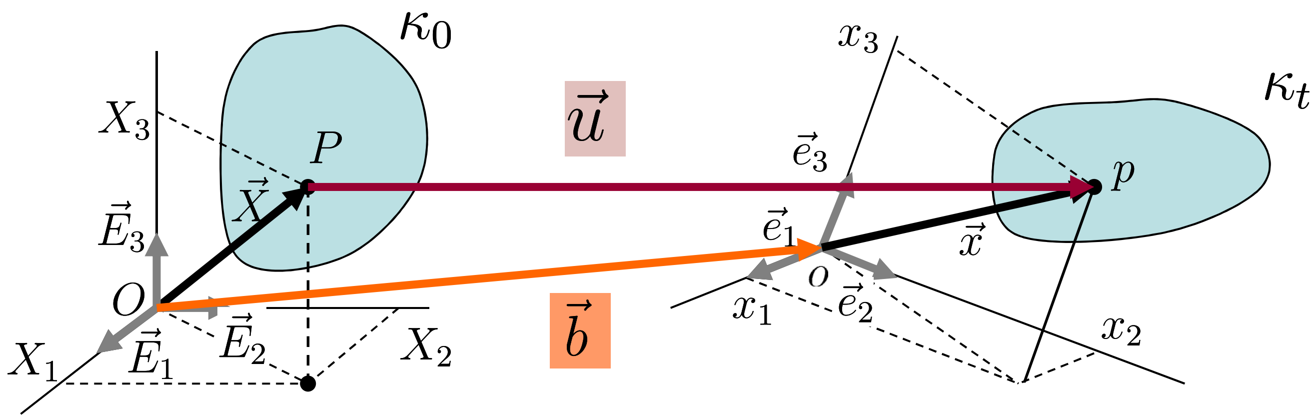
Změny úhlů

$$\cos\theta_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}, \quad \cos\theta_{13} = \frac{2E_{13}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{33}}}, \quad \cos\theta_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{1+2E_{22}}\sqrt{1+2E_{33}}}$$

$$\cos\theta_{12} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\theta_{13} = 0, \quad \cos\theta_{23} = 0$$



Vektor posunutí (*displacement vector*)



Geometrická míra deformace může být vyjádřena pomocí vektoru posunutí:

$$\vec{u} := \vec{x} - \vec{X} + \vec{b}$$

Vektor posunutí může být interpretován buď lagrangeovsky nebo eulerovsky:

$$\vec{U}(\vec{X},t) = \vec{\chi}(\vec{X},t) - \vec{X} + \vec{b}, \qquad \vec{u}(\vec{x},t) = \vec{x} - \vec{\chi}^{-1}(\vec{x},t) + \vec{b}$$

Vynásobme první výraz vektorem $\vec{e}_k$ a druhý výraz vektorem $\vec{E}_K$:

$$\mathrm{U}_k(\vec{X},t) = \chi_k - \delta_{kL}X_L + b_k, \qquad u_K(\vec{x},t) = \delta_{Kl}x_l - \chi_K^{-1} + b_K$$

„shifter“
viz str. 7

Gradient posunutí (*displacement gradient tensor*)

$$\mathrm{U}_k(\vec{X},t) = \chi_k - \delta_{kL}X_L + b_k, \quad u_K(\vec{x},t) = \delta_{Kl}x_l - \chi_K^{-1} + b_K$$

Zderivujme první výraz vzhledem k X_K a druhý výraz vzhledem k x_k :

$$\mathrm{U}_{k,K}(\vec{X},t) = \chi_{k,K} - \underbrace{\delta_{kL}\delta_{LK}}_{\delta_{kK}}, \quad u_{K,k}(\vec{x},t) = \underbrace{\delta_{Kl}\delta_{lk}}_{\delta_{Kk}} - \chi_{K,k}^{-1}$$

Odtud viz str 7.

$$\mathrm{U}_{k,K}(\vec{X},t) = \chi_{k,K} - \delta_{kK}, \quad u_{K,k}(\vec{x},t) = \delta_{Kk} - \chi_{K,k}^{-1}$$

Obecně všechny fyzikální veličiny reprezentující míru deformace mohou být vyjádřeny pomocí vektoru posunutí a jeho gradientu.

Lagrangeovský a eulerovský tenzor deformace

$$2\mathrm{E}_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = \chi_{k,K}\chi_{k,L} - \delta_{KL} = (\delta_{kK} + U_{k,K})(\delta_{kL} + U_{k,L}) - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{k,K}U_{k,L}$$

$$2\mathrm{e}_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = \delta_{kl} - \chi_{K,k}^{-1}\chi_{K,l}^{-1} = \delta_{kl} - (\delta_{Kk} - u_{K,k})(\delta_{Kl} - u_{K,l}) = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{K,k}u_{K,l}$$

$$E_{KL} = \tfrac{1}{2}\left(U_{K,L} + U_{L,K} + U_{k,K}U_{k,L}\right), \quad e_{kl} = \tfrac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k} - u_{K,k}u_{K,l}\right)$$

Pokud jsou eulerovský souřadný systém totožný s lagrangeovským, redukují se *shiftery* na Kroneckerovo δ.
Potom

$$\vec{U}(\vec{X},t) = \vec{\chi}(\vec{X},t) - \vec{X}$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{H}(\vec{X},t) := \mathrm{Grad}\vec{U}(\vec{X},t)$$
$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T)$$

$\boxed{\text{Cvičení}}$

Posunutí $\vec{U}(\vec{X},t) = \vec{\chi}(\vec{X},t) - \vec{X}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{H}(\vec{X},t) := \mathrm{Grad}\vec{U}(\vec{X},t) \quad .$$

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T)$$

$$\vec{\chi}(\vec{X},t): \quad \begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \qquad\qquad \boxed{\vec{U}(\vec{X},t): \quad \begin{aligned} U_1 &= X_2 t \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= 0 \end{aligned}}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} & \frac{\partial U_2}{\partial X_1} & \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} & \frac{\partial U_2}{\partial X_2} & \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial X_3} & \frac{\partial U_2}{\partial X_3} & \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & t/2 & 0 \\ t/2 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

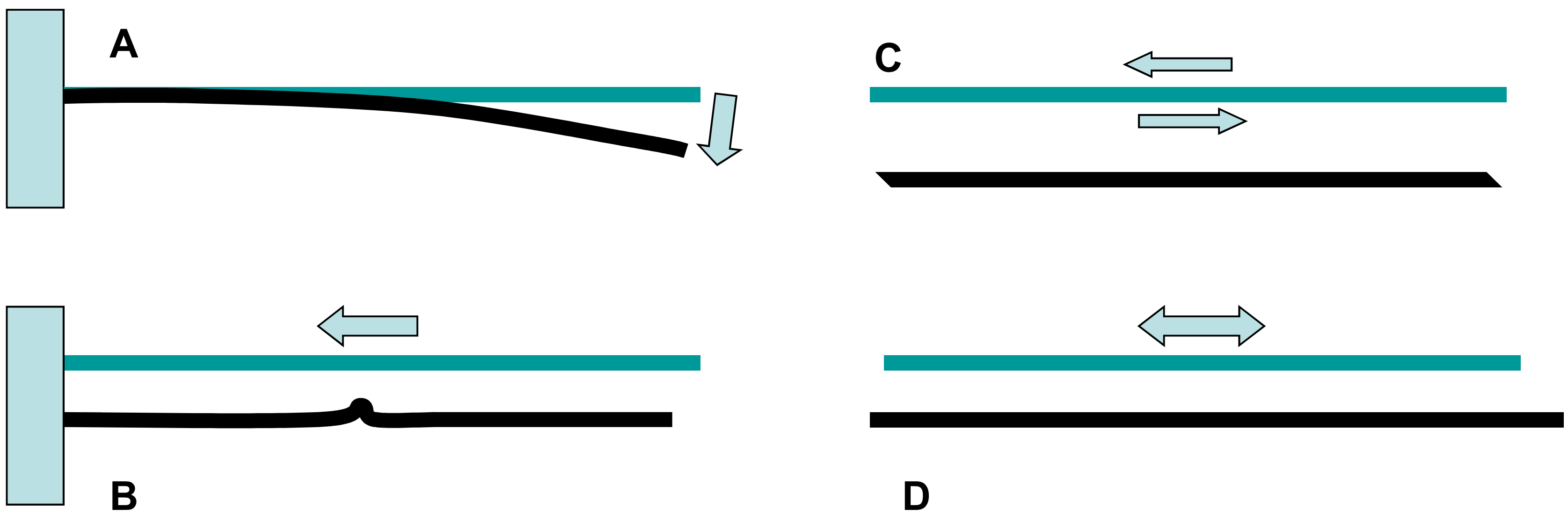
Geometrická linearizace (1)

V řadě aplikací, zejména v elasticitě, se setkáváme s případem tzv. malých deformací, který odpovídá matematické podmínce

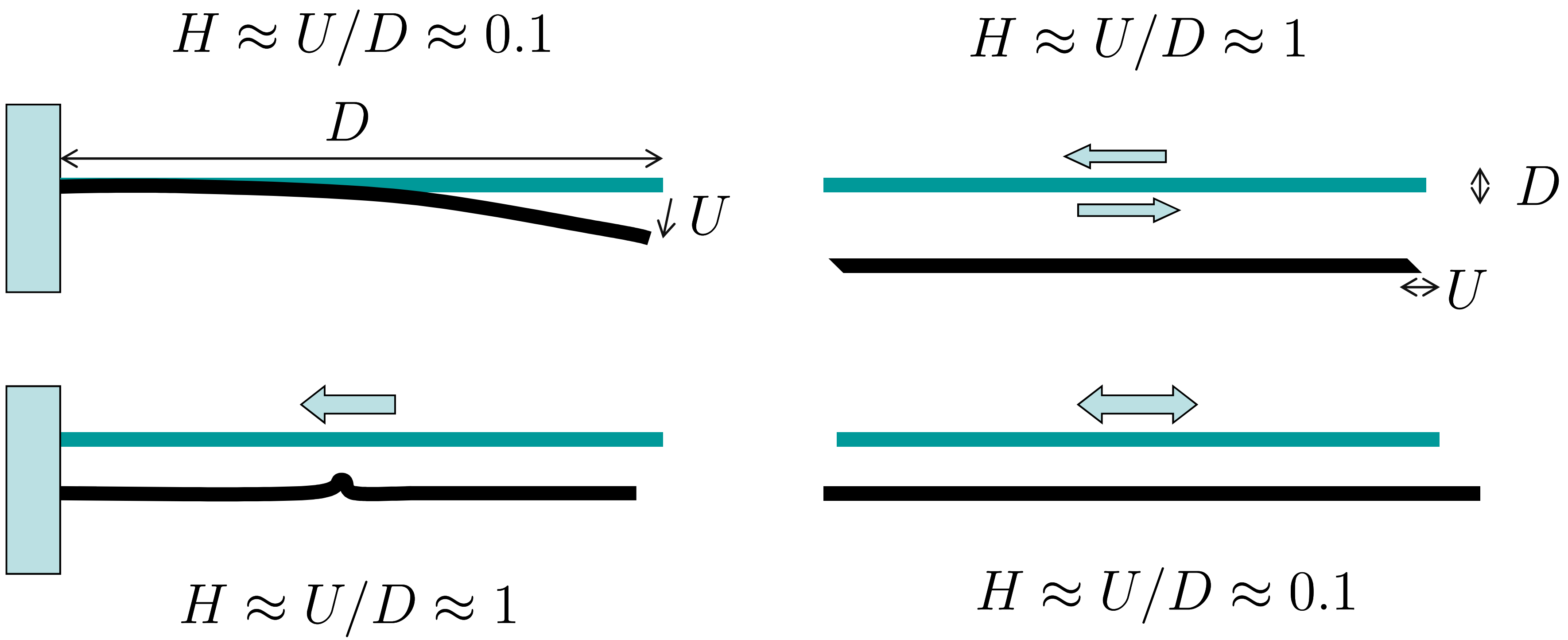
$$|\mathbf{H}| \ll 1, \quad \text{kde} \quad |\mathbf{H}| = \sqrt{H_{KL}H_{KL}} = \sqrt{\mathbf{H} : \mathbf{H}^T}$$

Linearizace spočívá v tom, že při úpravách podržíme členy řádu $|\mathbf{H}|$ a zanedbáme členy vyššího řádu.

KDY JE DEFORMACE MALÁ?



KDY JE DEFORMACE MALÁ?



Geometrická linearizace (1)

V řadě aplikací, zejména v elasticitě, se setkáváme s případem tzv. malých deformací, který odpovídá matematické podmínce

$$|\mathbf{H}| \ll 1, \quad \text{kde} \quad |\mathbf{H}| = \sqrt{H_{KL}H_{KL}} = \sqrt{\mathbf{H}:\mathbf{H}^T}$$

Linearizace spočívá v tom, že při úpravách podržíme členy řádu $|\mathbf{H}|$ a zanedbáme členy vyššího řádu.

Uvažujme následující rozklad:

$$\mathbf{H}^T = \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{R}}, \quad \text{kde} \quad \tilde{\mathbf{E}} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{R}} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}^T - \mathbf{H})$$

Dosazením do vztahu pro $\mathbf{E}$ (strana 21, úplně dole) dostaneme

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T) = \tilde{\mathbf{E}} + \tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + O(|\mathbf{H}|^2)}$$

Pro $\mathbf{F}$ pak dostaneme (srovnej s polárním rozkladem, str. 10)

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{I} + \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}}_{\text{linearizovaný lagrangeovský tenzor deformace}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{R}}}_{\text{linearizovaný lagrangeovský tenzor rotace}}} \quad \longleftarrow$$

Třebaže používáme linearizované objekty, tento vztah platí přesně.

$$d\vec{x} = \mathbf{F}\cdot d\vec{X} = \underbrace{\mathbf{I}\cdot d\vec{X}}_{\text{translace}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}\cdot d\vec{X}}_{\text{deformace}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{R}}\cdot d\vec{X}}_{\text{rotace}}$$

Geometrická linearizace (2) – tenzor deformace

Podobně lze ukázat, že platí:

$$\det \mathbf{F} = 1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}^T - \mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathrm{grad} \bullet = \mathrm{Grad} \bullet - \mathbf{H} \cdot \mathrm{Grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathrm{div} \bullet = \mathrm{Div} \bullet - \mathbf{H} : \mathrm{Grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathrm{div\ grad} \bullet = \mathrm{Div\ Grad} \bullet - 2\mathbf{H} : \mathrm{Grad\ Grad} \bullet - \mathrm{Div}\mathbf{H} \cdot \mathrm{Grad} \bullet + \mathrm{O}(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathrm{Grad} \bullet = \mathrm{grad} \bullet + \mathbf{H} \cdot \mathrm{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathrm{Div} \bullet = \mathrm{div} \bullet + \mathbf{H} : \mathrm{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathrm{Div\ Grad} \bullet = \mathrm{div\ grad} \bullet + 2\mathbf{H} : \mathrm{grad\ grad} \bullet + \mathrm{Div}\mathbf{H} \cdot \mathrm{grad} \bullet + \mathrm{O}(|\mathbf{H}|^2)$$

Linearizace eulerovského tenzoru deformace dává

$$\mathbf{e} \approx \tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\vec{u} + (\mathrm{grad}\vec{u})^T\right],$$

kde $\mathrm{grad}\vec{u}$ lze vyjádřit pomocí vzorce v rámečku vpravo:

$$\mathrm{grad}\vec{u} = \mathrm{Grad}\vec{U} - \underbrace{\mathbf{H} \cdot \mathrm{Grad}\vec{U}}_{\boxed{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} = O(|\mathbf{H}|^2)}} + O(|\mathbf{H}|^2) = \mathrm{Grad}\vec{U} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

V linearizované teorii tedy mizí rozdíl mezi lagrangeovským a eulerovským tenzorem deformace:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{E}} + O(|\mathbf{H}|^2)}$$

Geometrická linearizace (3) – změna délek a úhlů

Pro změny délek jsme již dříve (str. 15) odvodili, že

$$E_{(1)} = -1 + \sqrt{1+2E_{11}}\ ,\ E_{(2)} = -1 + \sqrt{1+2E_{22}}\ ,\ E_{(3)} = -1 + \sqrt{1+2E_{33}}$$

Použitím binomické věty dostaneme

$$E_{(1)} = -1 + [1 + E_{11} + O(|\mathbf{H}|^2)] \quad \rightarrow \quad E_{(1)} \approx E_{11} \approx \tilde{E}_{11}$$ a analogicky pro ostatní složky.

Linearizací vztahů, které jsme odvodili pro změnu úhlů (str. 16),

$$\cos\theta_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}},\ \ \cos\theta_{13} = \frac{2E_{13}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{33}}},\ \ \cos\theta_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{1+2E_{22}}\sqrt{1+2E_{33}}}$$

dostaneme

$$\cos\theta_{12} \approx 2E_{12} \approx 2\tilde{E}_{12} \quad .$$

Zaveďme

$$\gamma_{12} = \theta_{12} - \frac{\pi}{2}$$

Pak

$$\cos\theta_{12} = \sin\gamma_{12} \approx 2\tilde{E}_{12} \quad \rightarrow \quad \gamma_{12} \approx 2\tilde{E}_{12}$$

a analogicky pro ostatní složky.

Geometrická linearizace (4) – změna plochy a objemu

Pro změny plochy jsme na str. 17 odvodili, že

$$d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}, \quad da = J\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}\, dA, \quad d\vec{n} = \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}}$$

Linearizací těchto vztahů s pomocí vzorců na str. 23 dostaneme:

$$d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} = (1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \cdot d\vec{A} + O(|\mathbf{H}|^2) = [(1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H})\mathbf{I} - \mathbf{H}] \cdot d\vec{A} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$da = J\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}\, dA = (1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H})\sqrt{\vec{N} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T) \cdot \vec{N}}\, dA + O(|\mathbf{H}|^2) =$$
$$= (1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H})\sqrt{1 - 2\vec{N} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{N}}\, dA + O(|\mathbf{H}|^2) = (1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H})(1 - \vec{N} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{N})dA + O(|\mathbf{H}|^2) =$$
$$= (1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H} - \vec{N} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{N})\, dA + O(|\mathbf{H}|^2)$$

a analogicky:

$$\vec{n} = (1 + \vec{N} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{N})\vec{N} - \mathbf{H} \cdot \vec{N} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

Pro změny objemu pak máme:

$$dv = JdV = \det \mathbf{F}\ dV = (1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H})dV + O(|\mathbf{H}|^2 = (1 + \mathrm{Div}\vec{U})dV + O(|\mathbf{H}|^2)$$

neboť

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{H} = H_{KK} = U_{K,K} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} = \mathrm{Div}\vec{U}$$

V linearizovaném případě tedy platí

$$\boxed{dv \approx (1 + \mathrm{Div}\vec{U})dV}$$

Cvičení

Linearizace

$$\mathbf{V} = \ ??? + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}.\mathbf{F^T}} = \sqrt{(\mathbf{I}+\mathbf{H}^T)\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{H})} = \sqrt{\mathbf{I}+\mathbf{H}^T+\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{H}} =$$

$$= \mathbf{I} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^T+\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{H}\right) + O(|\mathbf{H}|^2) = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T+\mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T+\mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)}$$

$$\mathbf{R} = \ ??? + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$$
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{V}$$
$$\mathbf{R}^T = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{V}$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{F}^{-T}$$
$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{h}^T = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{F}^{-T} = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^T+\mathbf{H}\right)\right)\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T-\mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)}$$

Cvičení

Linearizujte výraz $\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad} \bullet = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad} \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{F}^T \cdot \mathrm{grad} \bullet$

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad} \bullet = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad} \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{F}^T \cdot \mathrm{grad} \bullet =$$

$$= (\mathbf{I}+\mathbf{H}^T)\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{H}) : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad} \bullet \ + \ \mathrm{Div}(\mathbf{I}+\mathbf{H}) \cdot \mathrm{grad} \bullet =$$

$$= \mathbf{I} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + \mathbf{H}^T : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + \mathbf{H} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + (\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{H}) : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\bullet + \mathrm{Div}\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad} \bullet =$$

$$= \mathrm{div}\ \mathrm{grad} \bullet \ + 2\mathbf{H} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad} \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{H} \cdot \mathrm{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\boxed{\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad} \bullet = \mathrm{div}\ \mathrm{grad} \bullet + 2\mathbf{H} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad} \bullet + \mathrm{Div}\mathbf{H} \cdot \mathrm{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)}$$