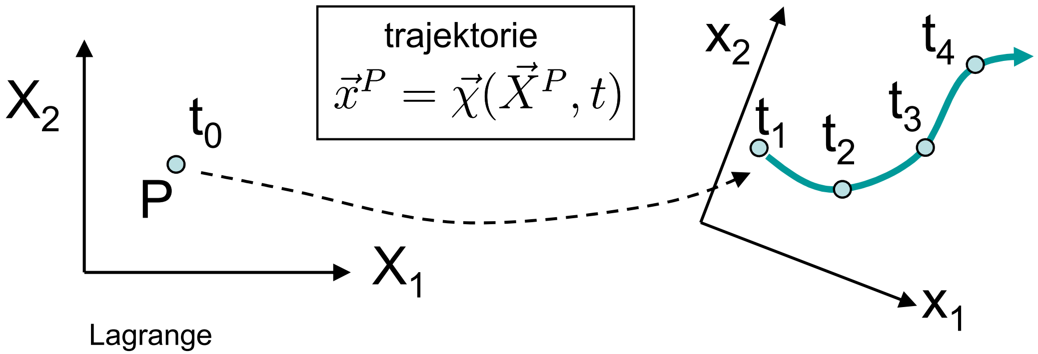
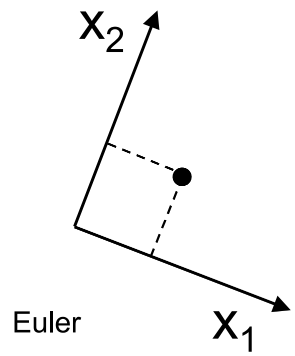
Mechanika kontinua – část 3
Kinematický popis

Dva základní problémy, kterými se budeme zabývat:

1. Popis časových změn veličin v okamžité konfiguraci → $\boxed{\text{materiálová derivace}}$

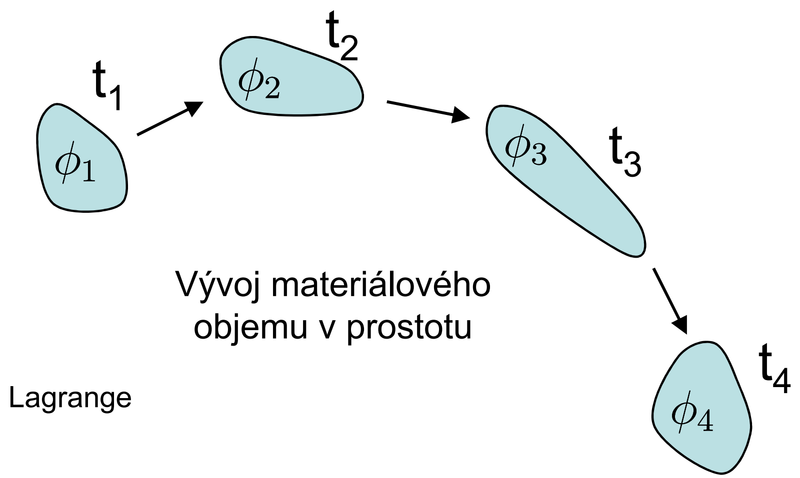


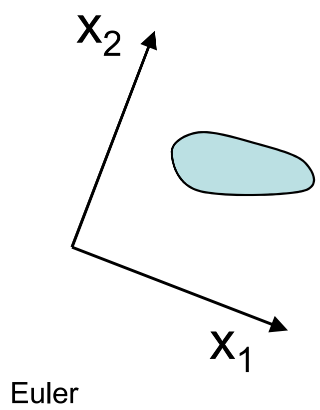


Otázka:
Jak popsat časové změny vlastností částice, neznáme-li trajektorii?

2. Popis časových změn objemových a plošných integrálů v okamžité konfiguraci

→ $\boxed{\text{Reynoldsův transportní teorém}}$ → umožní nám později formulovat zákony zachování

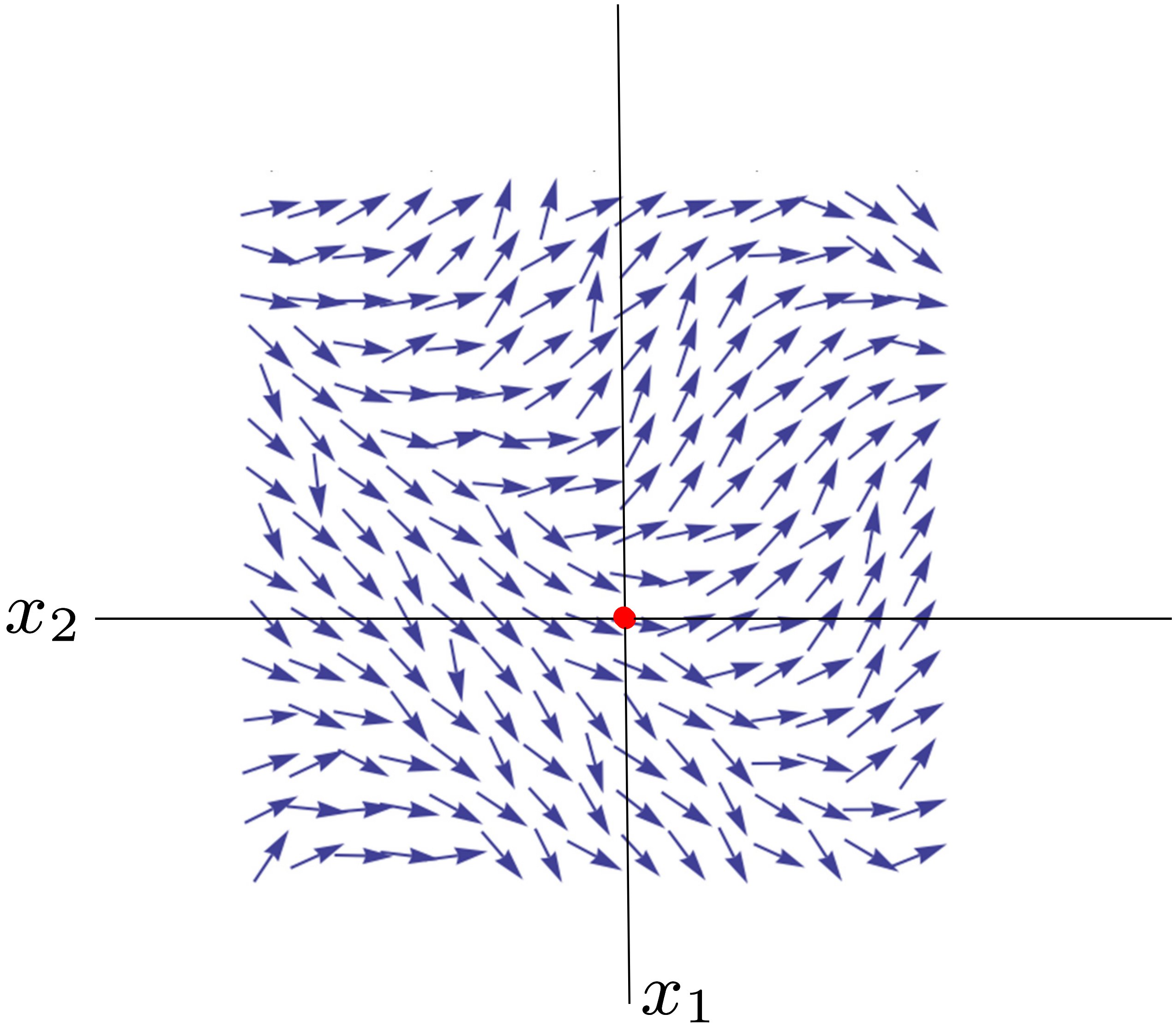




$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} \phi \mathrm{d}v = \; ???$$

Otázka:
Jak spočítat časovou změnu integrálu, jehož objem se mění v čase.

Vsuvka



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = ?$$

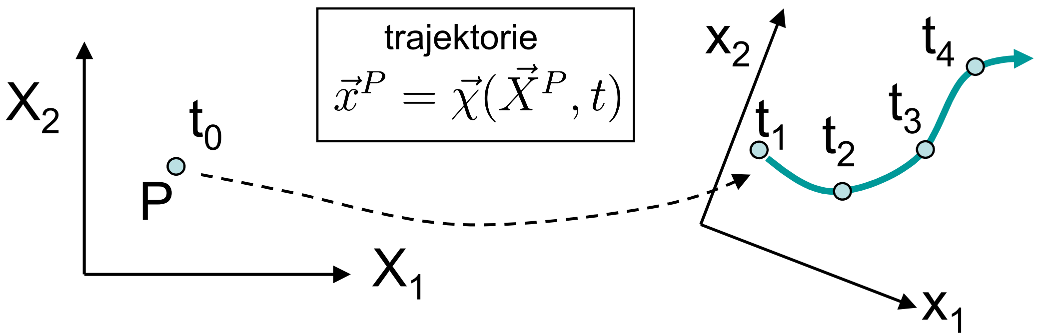
Otázka: Máme stacionární pole proudění.
Jaké zrychlení působí na částici v bodě (x_1,x_2) ?

Vsuvka

Leibnizův vzorec pro derivaci integrálu podle meze

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = f(x,b(x))\frac{db}{dx} - f(x,a(x))\frac{da}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

Rychlost a zrychlení **v lagrangeovském (částicovém) popisu**



Rychlost je dána změnou polohy částice podél trajektorie:

$$\vec{V}^P = \frac{\mathrm{d}\vec{x}^P}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}\right)_{\vec{X}=\vec{X}_P}$$

$$\boxed{\vec{V}(\vec{X}, t) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)_{\vec{X}} = \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}\right)_{\vec{X}}}$$

lagrangeovská reprezentace rychlosti
neboli
materiálová časová derivace

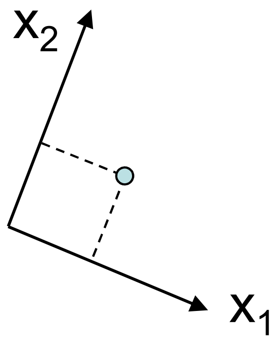
$$\boxed{\vec{A}(\vec{X}, t) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\vec{X}} = \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)_{\vec{X}} = \left(\frac{\partial^2 \vec{\chi}}{\partial t^2}\right)_{\vec{X}}}$$

lagrangeovská reprezentace
zrychlení

… nebo pomocí posunutí (viz Geometrie deformace str. 20):

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_{\vec{X}}, \quad \vec{A}(\vec{X}, t) = \left(\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}\right)_{\vec{X}}$$

Rychlost a zrychlení v okamžité konfiguraci
Vyjádření materiálové derivace **v eulerovském (prostorovém) popisu**



<u>Neznáme trajektorii.</u>
Rychlost v daném bodě prostoru
tedy definujeme jako rychlost částice,
která se v tomto bodě právě nachází.

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{V}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x},t),t)$$

eulerovská reprezentace rychlosti

$$\rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}(\vec{X},t),t)$$

Zrychlení v daném bodě v prostoru:

$$\vec{a}(\vec{x},t) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\vec{X}} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)_{\vec{X}}}_{= v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\vec{v}}$$

Eulerovská reprezentace zrychlení

$$\vec{a}(\vec{x},t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\vec{v}$$

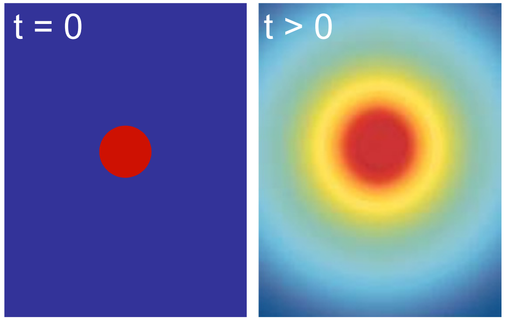
konvektivní člen $\left(\vec{v}\cdot \mathrm{grad}\vec{v} = \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{v}\right)$

prostorová časová derivace = lokální rychlost změny

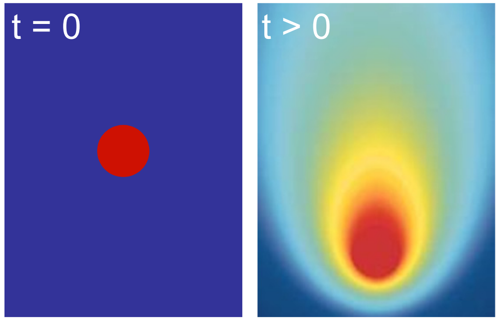
Operátor materiálové časové derivace:

$$\frac{D\bullet}{Dt} \equiv \dot{(\bullet)} := \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \bullet}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v}\cdot \mathrm{grad}\bullet \end{array} \right\} \text{ v } \left\{ \begin{array}{l} \text{lagrangeovské} \\ \text{eulerovské} \end{array} \right. \text{ reprezentaci}$$

Jiné aplikace materiálové derivace v mechanice kontinua



statický případ (v = 0)



nenulová rychlost

Materiálová difúze

$$\frac{Dc}{Dt} = \lambda \nabla^2 c$$

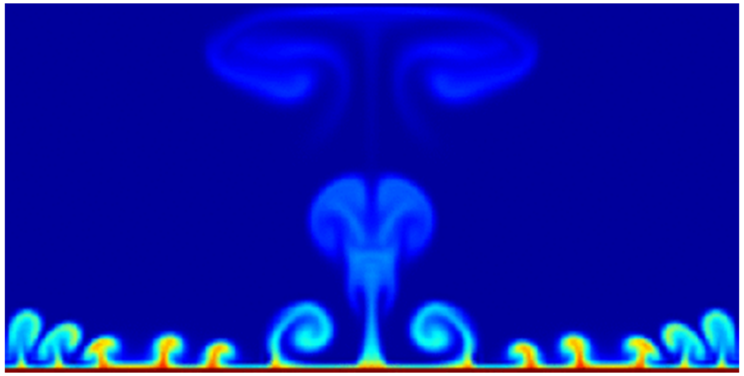
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \lambda \nabla^2 c - \vec{v} \cdot \nabla c$$

Přenos tepla

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p} \nabla \cdot (k \nabla T) - \vec{v} \cdot \nabla T + Q$$

Tato rovnice se řeší společně s rovnicemi popisujícími pohyb kapaliny.

T_0



$T_1 > T_0$

Podrobnosti později …

Tenzor gradientu rychlosti

Vyjádřeme časovou změnu tenzoru deformace $\mathbf{F} = (\mathrm{grad}\,\vec{\chi})^T$:

$$\frac{D\chi_{k,K}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial X_K}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial X_K}\right)_{\vec{X}} = \frac{\partial}{\partial X_K}\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t}\right)_{\vec{X}} = \frac{\partial V_k}{\partial X_K} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_K} = v_{k,l}\chi_{l,K}$$

Platí tedy, že $\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F}$

kde

$$\boxed{\boldsymbol{l}(\vec{x},t) := \mathrm{grad}^T \vec{v}(\vec{x},t), \quad l_{kl}(\vec{x},t) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}}$$

← tenzor gradientu rychlosti

Vyjádření rychlosti změn délky, plochy a objemu pomocí gradientu rychlosti

(1) $\boldsymbol{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$

(2) $\dot{(\mathbf{F}^{-1})} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{l}$

(3) $\dot{J} = J\,\mathrm{div}\,\vec{v} = J\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{l}$

(4) $\dot{d\vec{x}} = \boldsymbol{l} \cdot d\vec{x}$ → časová změna elementu délky

(5) $\dot{d\vec{a}} = \left[(\mathrm{div}\,\vec{v})\mathbf{I} - \boldsymbol{l}^T\right] \cdot d\vec{a}$ → časová změna elementu plochy

(6) $\dot{dv} = (\mathrm{div}\,\vec{v})\,dv$ → časová změna elementu objemu

(4) : $\dot{d\vec{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\vec{X} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} \cdot d\vec{X} = \boldsymbol{l} \cdot d\vec{x}$

(6) : $\dot{dv} = \dot{J}\,dV = J\,(\mathrm{div}\,\vec{v})\,dV = (\mathrm{div}\,\vec{v})\,dv$

Důkaz vybraných tvrzení, ostatní později.

Tenzor rychlosti deformace (*strain rate*) a vířivosti (*vorticity*)

Rozložme tenzor gradientu rychlosti na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\boldsymbol{l} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T)}_{\text{tenzor rychlosti deformace (\textit{strain rate tensor})}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T)}_{\text{tenzor vířivosti neboli vorticita (\textit{vorticity tensor, spin tensor})}}$$

tenzor rychlosti deformace (*strain rate tensor*)

tenzor vířivosti neboli vorticita (*vorticity tensor, spin tensor*)

Tenzor rychlosti deformace:

$$\mathbf{d} := \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v}\,)^T\right] = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) & \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) & v_{2,2} & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{pmatrix}$$

Tenzor a vektor vířivosti

$$\mathbf{w} := \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T) = \tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{grad}\,\vec{v})^T - \mathrm{grad}\,\vec{v}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(v_{1,2} - v_{2,1}) & \frac{1}{2}(v_{1,3} - v_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(v_{2,1} - v_{1,2}) & 0 & \frac{1}{2}(v_{2,3} - v_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(v_{3,1} - v_{1,3}) & \frac{1}{2}(v_{3,2} - v_{2,3}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} := \tfrac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$$

Vektor vířivosti

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{kl} = \epsilon_{lkm} w_m \ , \quad w_k = \tfrac{1}{2}\epsilon_{klm} w_{ml} \ , \quad \mathbf{w}\cdot\vec{a} = \vec{w}\times\vec{a}$$

$$\boxed{\dot{d\vec{x}} = \boldsymbol{l}\cdot d\vec{x} = (\mathbf{d} + \mathbf{w})\cdot d\vec{x} = \mathbf{d}\cdot d\vec{x} + \vec{w}\times d\vec{x}}$$

Vztahy pro další materiálové derivace

(1) $$\dot{\mathbf{E}} = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}$$

(2) $$\dot{\mathbf{e}} = -\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{d} - (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T \cdot \mathbf{e})$$

(3) $$\dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

(4) $$\dot{\vec{n}} = -\vec{n} \cdot \boldsymbol{l} + (\vec{n} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

(5) $$\dot{\overline{ds^2}} = 2d\vec{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\vec{x}$$

Odvození:

(1) $$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\overline{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})}} = \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{l}^T) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot (\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{l}) \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}$$

(2) $$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\overline{(\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})}} = \dot{\overline{\mathbf{F}^{-T}}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\overline{\mathbf{F}^{-1}}} = -\boldsymbol{l}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{l} = -\boldsymbol{l}^T \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{l} =$$
$$= \boldsymbol{l}^T \cdot (2\mathbf{e} - \mathbf{I}) + (2\mathbf{e} - \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{l} = -2\mathbf{d} + 2(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T \cdot \mathbf{e})$$

(3) Stejně jako (2), ale pro $\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}$

(4) $$\dot{\vec{n}} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}}\right) = -\frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{l}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} + \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{(\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N})^3}}(\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N})$$

... použije se (2) ze str. 9 a (3) z této strany

(5) $$\dot{\overline{ds^2}} = \dot{\overline{(d\vec{x} \cdot d\vec{x})}} = d\vec{X} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\vec{x}$$

... a dále použij vztah (1) pro $\dot{\mathbf{C}}$

Reynoldsův transportní teorém

Chceme vyjádřit integrál $\dfrac{D}{Dt}\displaystyle\int_{v(t)} \phi \,\mathrm{d}v$, kde ϕ je nějaké skalární pole.

<u>Krok 1:</u> Integraci přes časově proměnnou oblast nahradíme integrací přes pevný objem.

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \phi \,\mathrm{d}v = \frac{D}{Dt}\int_{V} \Phi \, J \mathrm{d}V$$

<u>Krok 2:</u> Integrační objem V nezávisí na čase, takže lze zaměnit pořadí derivování a integrování.

$$\frac{D}{Dt}\int_{V} \Phi \, J \mathrm{d}V = \int_{V} \frac{D}{Dt}(\Phi J)\,\mathrm{d}V = \int_{V} \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi \frac{DJ}{Dt}\right) \mathrm{d}V$$

<u>Krok 3:</u> Použijeme identitu $\dot{J} = J \,\mathrm{div}\, \vec{v}$:

$$\int_{V} \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi \frac{DJ}{Dt}\right) \mathrm{d}V = \int_{V} \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi J \,\mathrm{div}\, \vec{v}\right) \mathrm{d}V = \int_{V} \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \,\mathrm{div}\, \vec{v}\right) J \mathrm{d}V$$

<u>Krok 4:</u> Vrátíme se zpět do okamžité konfigurace $(\Phi \to \phi, \;\; J\mathrm{d}V = \mathrm{d}v)$ a dostaneme :

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \phi \,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \,\mathrm{div}\, \vec{v}\right) \mathrm{d}v}$$

Reynoldsův
nebo také Leibnitz-Reynoldsův
transportní teorém

Poznámka: Osborn Reynolds (1842 Severní Irsko -1912 Anglie; hlavní přínos v oblasti mechaniky kapalin; Reynoldsovo číslo)

Reynoldsův transportní teorém – další možné tvary

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)}\phi\,\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\frac{D\phi}{Dt}+\phi\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\mathrm{d}v$$

Rozepíšeme materiálovou derivaci v integrandu a použijeme identitu $\mathrm{div}(\phi\vec{v})=\phi\mathrm{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\phi$:

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)}\phi\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\frac{D\phi}{Dt}+\phi\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\phi+\phi\,\mathrm{div}\vec{v}\right)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}(\phi\vec{v})\right)\mathrm{d}v$$

Použijeme Gaussovu větu $\left(\int_v\mathrm{div}\vec{u}\,\mathrm{d}v=\int_s\vec{n}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}a\right)$ na druhý člen v integrandu a dostaneme

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{v(t)}\phi\,\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{s(t)}\phi(\vec{n}\cdot\vec{v})\,\mathrm{d}a}$$

Pro vektorovou veličinu ($\vec{q}$ namísto ϕ) je odvození obdobné, pouze je třeba použít identitu $\mathrm{div}(\vec{v}\otimes\vec{q})=\vec{q}\,\mathrm{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{q}$ a Gaussovu větu ve tvaru $\int_v\mathrm{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}v=\int_s\vec{n}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}a.$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{v(t)}\vec{q}\,\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\frac{D\vec{q}}{Dt}+\vec{q}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{s(t)}\vec{n}\cdot(\vec{v}\otimes\vec{q})\,\mathrm{d}a}$$

Podobně lze odvodit vztah pro materiálovou derivaci toku veličiny $\vec{q}$ přes povrch oblasti:

$$\frac{D}{Dt}\int_{s(t)}\vec{q}\cdot\mathrm{d}\vec{a}=\int_{s(t)}\left(\frac{D\vec{q}}{Dt}+(\mathrm{div}\vec{v})\,\vec{q}-\vec{q}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{a}$$