Mechanika kontinua – část 4
Síly a napětí

Geometrie deformace

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X})\,,\;\; \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T\,,\;\; \mathbf{F}^{-1}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \;\ldots$$

změny délek, ploch a objemů

posunutí $\vec{U}\,,\;\vec{u}$

$$\mathbf{H} = \mathrm{Grad}\vec{U}$$

malé deformace

Kinematika

materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \dfrac{\partial\bullet}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\bullet}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\boldsymbol{l} = (\mathrm{grad}\vec{v})^T$$

$$\dot{\mathbf{F}},\;\; \dot{J},\;\; d\dot{\vec{x}},\;\; d\dot{\vec{a}}, d\dot{v},\;\; \dot{\vec{n}},\;\; \dot{\mathbf{E}},\;\; \ldots$$

Reynoldsův transportní teorém

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \phi\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\mathrm{d}v$$

Působící síly a napětí

Vyjdeme z pohybových zákonů, které postulovali Newton a Euler, a použijeme je k odvození vztahů pro síly uvnitř spojitého prostředí.

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n}\cdot\mathbf{t}$$

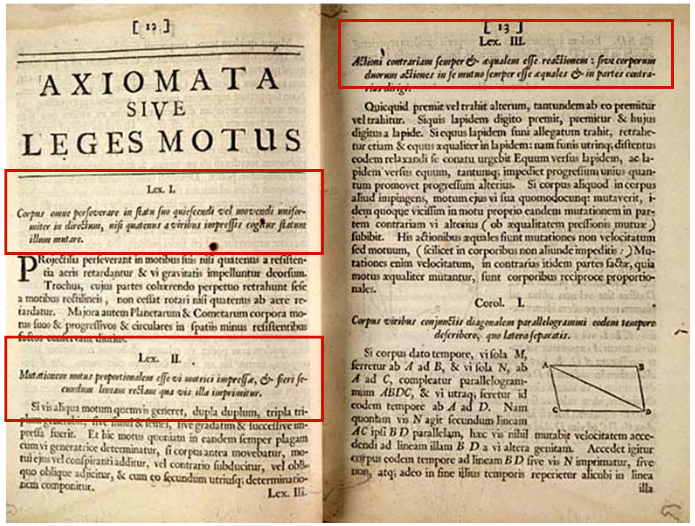
vektor napětí (trakce)

Cauchyho tenzor napětí

Problém: Jak definovat tenzor napětí v referenční konfiguraci?

→ První a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor

Newtonovy pohybové zákony (1687)



[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

[13]

Lex. III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumq; impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunq; mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola M, ferretur ab A ad B, & vi sola N, ab A ad C, compleatur parallelogrammum $ABDC$, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab A ad D. Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD sive vis N imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak řečeno: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

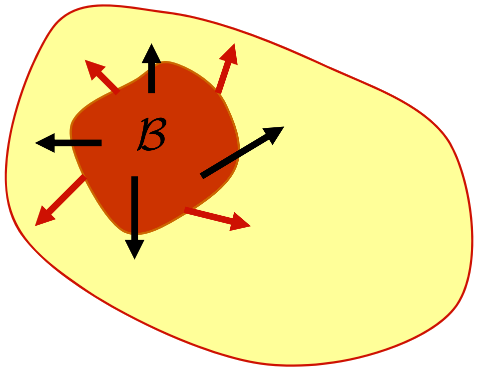
Eulerovy pohybové zákony (impulsové věty, ~1740)

1. V inerciální soustavě je časová změna hybnosti <u>libovolné části tělesa</u> rovna celkové síle, působící na tuto část.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\mathcal{B}) \quad \text{nebo jinak} \quad \frac{d}{dt}\int_v \rho\vec{v}dv = \int_s \vec{g}da + \int_v \vec{f}dv$$

povrchové (kontaktní) síly

objemové síly



2. V inerciální soustavě je časová změna momentu hybnosti <u>libovolné části tělesa</u> rovna celkovému momentu sil, působící na tuto část.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\mathcal{B})\,, \quad \frac{d}{dt}\int_v \vec{r}\times\rho\vec{v}dv = \int_s \vec{r}\times\vec{g}da + \int_v \vec{r}\times\vec{f}dv$$

Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděluje těleso na dvě části. Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.

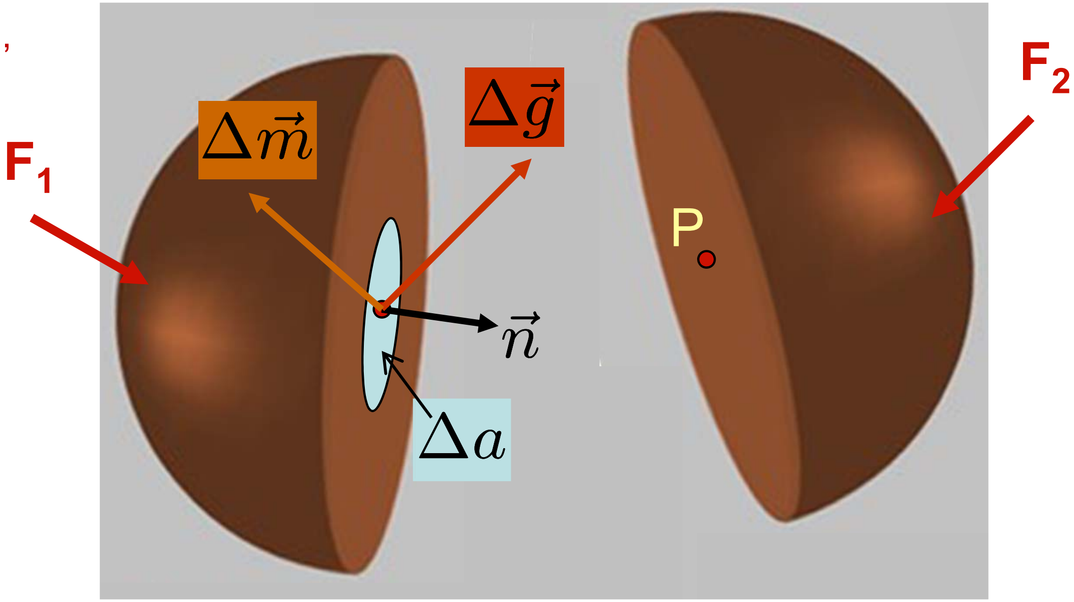
$$\Delta\vec{g} = \vec{t}^{*}_{(\vec{n})}\Delta a$$

střední hodnota napětí

střední hodnota momentu síly

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta\vec{g}}{\Delta a} =: \vec{t}_{(\vec{n})} \qquad \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta a} = 0$$

Cauchyho vektor napětí
neboli
Cauchyho trakční vektor



Cauchyho postulát

Napěťový vektor $\vec{t}_{(\vec{n})}$ je stejný pro všechny možné povrchy procházející bodem P, které mají stejnou normálu $\vec{n}$, tj. charakterizované stejnou tečnou rovinou v bodě P. Napěťový vektor je tedy dán pouze normálou v daném bodě a není ovlivněn křivostí povrchu.

Cauchyho fundamentální lemma (Cauchyho reciproční teorém)

$$\vec{t}_{(-\vec{n})} = -\vec{t}_{(\vec{n})} \qquad \longleftarrow \text{ analogie třetího Newtonova zákona}$$

Stav napjatosti tělesa v daném čase může být tedy charakterizován polem husoty plošné (kontaktní) síly $\vec{t}(\vec{n}, \vec{x}, t)$.

normála čas polohový vektor

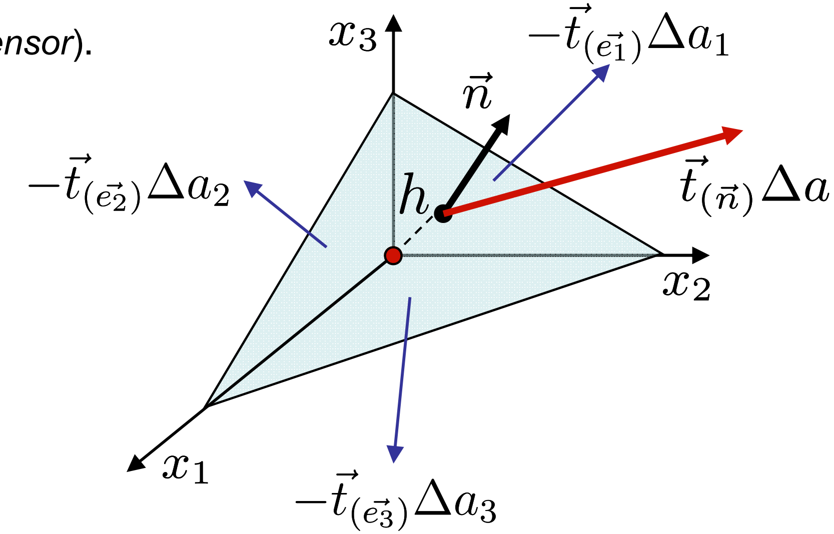
Na první pohled je tedy napětí v daném bodě určeno nekonečně mnoha hodnotami vektoru $\vec{t}_{(\vec{n})}$, neboť daným bodem lze proložit nekonečně mnoho různých rovin.

Cauchyho fundamentální věta (Cauchyho napěťový teorém)

K určení $\vec{t}_{(\vec{n})}$ pro libovolné $\vec{n}$ v daném bodě stačí znát napěťový vektor na třech navzájem kolmých rovinách procházejících tímto bodem. Existuje tedy tenzor 2. řádu nezávislý na $\vec{n}$ a takový že $\vec{t}_{(\vec{n})}$ je lineární funkcí $\vec{n}$:

$$\boxed{\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = \mathrm{t}_{ij} n_i \vec{e}_j}$$

Tenzor $\mathbf{t}$ se označuje jako **Cauchyho tenzor napětí** (*Chauchy stress tensor*).



Cauchyho čtyřstěn

Odvození Cauchyho fundamentální věty

Zákon zachování hybnosti pro Cauchyho čtyřstěn:

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho\vec{v}dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^{3} \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

Použijeme větu o střední hodnotě

$$\frac{d}{dt}(\rho\vec{v})^*\Delta v = \vec{t}^*_{(\vec{n})}\Delta a - \sum_{k=1}^{3} \vec{t}^*_{(\vec{e}_k)}\Delta a_k + \vec{f}^*\Delta v$$

a dále použijeme, že

$$\Delta v = \tfrac{1}{3} h \Delta a$$

$$\Delta \vec{a} = \vec{n}\Delta a = \Delta a_k \vec{e}_k \quad \rightarrow \quad \Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}(\rho\vec{v})^*\Delta v = \vec{t}^*_{(\vec{n})}\Delta a - \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\vec{t}^*_{(\vec{e}_k)}\Delta a_k + \vec{f}^*\Delta v \\ \Delta a_k = n_k\Delta a \\ \Delta v = \frac{1}{3}h\Delta a\end{array}\right\} \quad \frac{1}{3}\frac{d}{dt}(\rho\vec{v})^* h\cancel{\Delta a} = \vec{t}^*_{(\vec{n})}\cancel{\Delta a} - \sum_{k=1}^{3}\vec{t}^*_{(\vec{e}_k)}n_k\cancel{\Delta a} + \frac{1}{3}\vec{f}^* h\cancel{\Delta a}$$

V limitě $h \to 0$ odtud dostaneme $\quad \vec{t}_{(\vec{n})} = \sum_{k=1}^{3}\vec{t}_{(\vec{e}_k)}n_k = \mathrm{t}_{kl}\, n_k\, \vec{e}_l$, kde $\mathrm{t}_{kl} := \vec{t}_{(\vec{e}_k)}\cdot\vec{e}_l$, a tedy $\vec{t}_{(\vec{e}_k)} = \mathrm{t}_{kl}\,\vec{e}_l$.

Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí

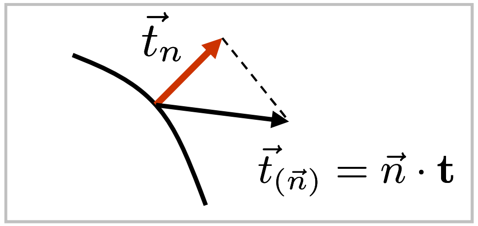
1. Normálové napětí (*normal stress*)

normálová složka napětí

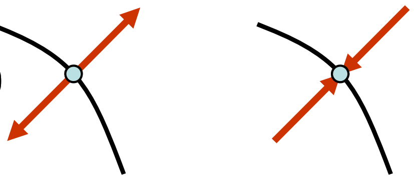
$$t_n = \vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{n}$$

normálový vektor napětí

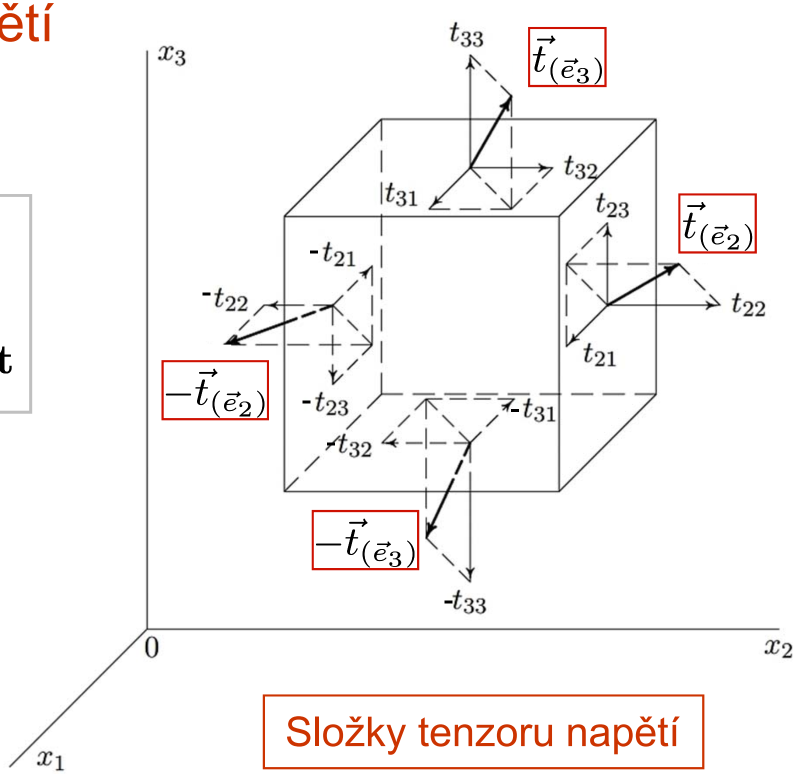
$$\vec{t}_n = (\vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$



$t_n > 0$ tenze



$t_n < 0$ komprese

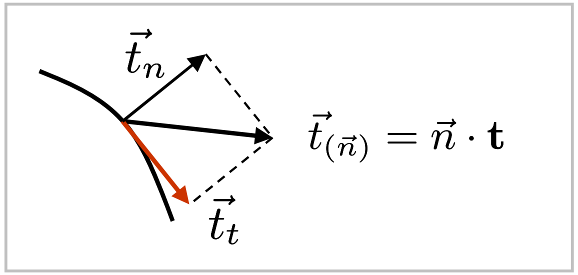


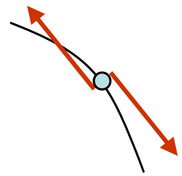
Složky tenzoru napětí

Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí - pokračování

2. Smykové napětí (*shear stress*)

$$\vec{t}_t = \vec{t}_{(\vec{n})} - \vec{t}_n = \vec{n}\cdot\mathbf{t} - (\vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$





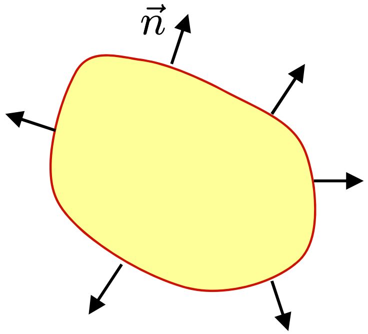
Cvičení 1: Volný povrch

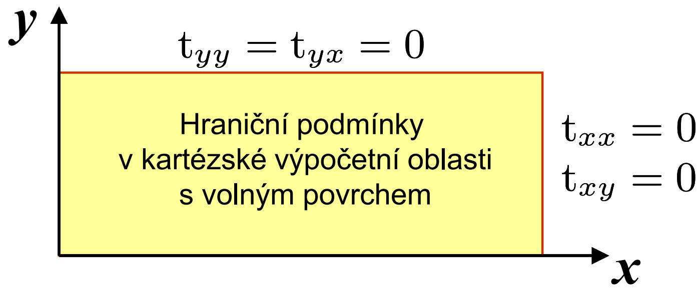
Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n}\cdot\mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n}\cdot\mathbf{t} - (\vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{n})\,\vec{n} = 0$$





Cvičení 2:

Určete vektor napětí, působící v bodě P=(0.5, 0.5 ,1.5) na plochu

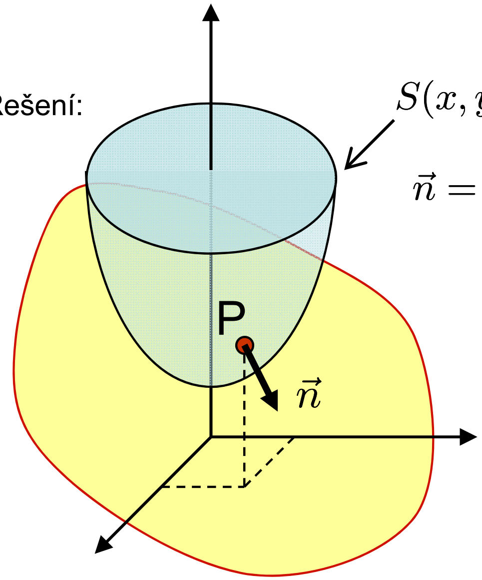
$$z = x^2 + y^2 + 1\,.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.

Řešení:



$$S(x,y,z) = x^2 + y^2 - z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

$$\vec{n} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n}\cdot\mathbf{t} =$$

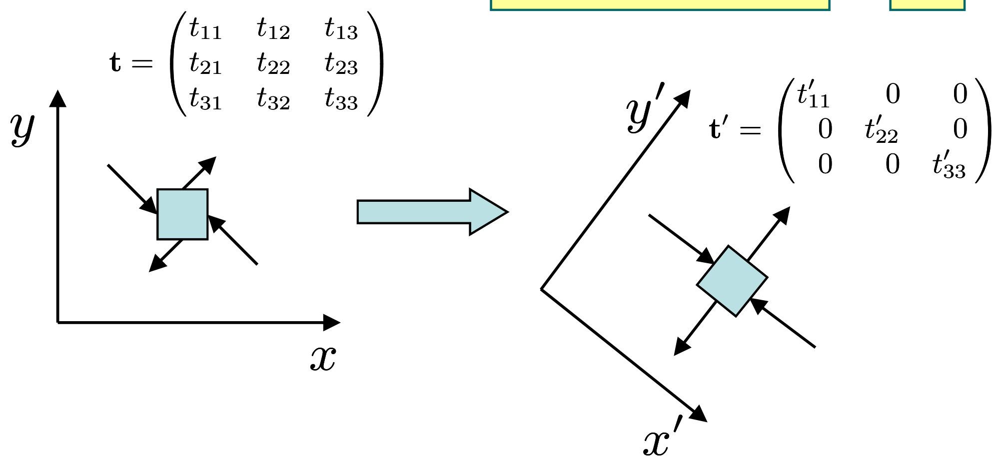
$$= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = (\sqrt{3}, 0, 0)\,, \quad t_n = \vec{t}_{(\vec{n})}\cdot\vec{n} = 1$$

$t_n > 0 \longrightarrow$ extenze

Transformace souřadné soustavy:

$$\mathbf{t}' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{Q}^T \;, \quad \text{složkově:} \quad t'_{ij} = Q_{im}Q_{jn}t_{mn}$$



$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}' = \begin{pmatrix} t'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t'_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonalizace tenzoru napětí:

$$\mathbf{t}\cdot\vec{p} = \lambda\vec{p}$$

$$\det(\mathbf{t} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Vlastní čísla Cauchyova tenzoru napětí jsou reálná,
neboť se jedná o symetrický tenzor (dokážeme později).

Invarianty tenzoru napětí:

Charakteristická rovnice: $\det(\mathbf{t} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + t_I\lambda^2 - t_{II}\lambda + t_{III} = 0$

$$t_I := t_{11} + t_{22} + t_{33} = \mathrm{tr}\;\mathbf{t}$$

$$t_{II} := t_{11}t_{22} + t_{11}t_{33} + t_{22}t_{33} - t_{12}^2 - t_{13}^2 - t_{23}^2 = \tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\;\mathbf{t})^2 - \mathrm{tr}\;(\mathbf{t}^2)\right]$$

$$t_{III} := \det\mathbf{t}$$

Rozklad tenzoru napětí na izotropní část a deviátor:

Tlak: $\boxed{p = -\tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbf{t} = -\tfrac{1}{3}\,t_{kk}}$

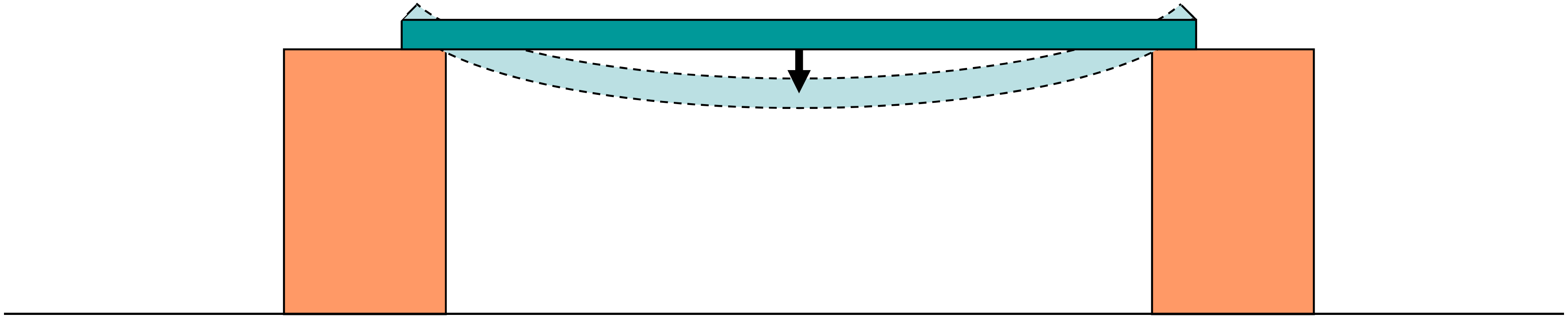
$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \underbrace{(\mathbf{t} + p\mathbf{I})}_{=:\,\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}}_{\text{izotropní část}} + \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11}+p & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}+p & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}+p \end{pmatrix}}_{\text{deviátor}}$$

Invarianty deviátoru:

$$D_I = 0$$

$$D_{II} = \tfrac{1}{2}\mathbf{D}:\mathbf{D}$$

$$D_{III} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}):\mathbf{D}$$



Cauchyho tenzor napětí popisuje napěťový stav deformovaného tělesa, tj. napětí v okamžité konfiguraci.

Problém:

Jak definovat míru napětí v referenční konfiguraci?

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$d\vec{g} = \vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}\left(\vec{x}(\vec{X}, t), t\right)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(1)}$

$$\boxed{d\vec{g} = d\vec{a} \cdot \mathbf{t} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}$$

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí vyjadřuje sílu působící na deformovanou plochu $d\vec{a}$ v bodě $\vec{x}$ pomocí referenčního elementu plochy $d\vec{A}$ v bodě $\vec{X}$.

Relaci mezi Cauchyovým tenzorem a prvním P-K tenzorem získáme pomocí vztahu $d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$, který jsme odvodili v části Geometrie deformace:

$$d\vec{g} = d\vec{a} \cdot \mathbf{t} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} \cdot \mathbf{t} = d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{T}^{(1)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}$$

Složkově: $\mathrm{T}^{(1)}_{Kl} = J X_{K,k} \mathrm{t}_{kl}\ , \quad \mathrm{t}_{kl} = J^{-1} x_{k,K} \mathrm{T}^{(1)}_{Kl}$

Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(2)}$

V analogii ke vztahu $d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}$ (Geometrie deformace, str. 8) zaveďme

$d\vec{G} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{g}$

Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor pak definujeme jako $\boxed{d\vec{G} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}$

Srovnej s P-K1:
$d\vec{g} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$

Vztah P-K2 a P-K1:

$$d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = d\vec{G} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{g} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \left(d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}\right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Vztah P-K2 a Cauchyho tenzoru napětí:

$$\boxed{\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{F}^{T}}$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}$$

Složkově: $\mathrm{T}^{(2)}_{KL} = J X_{K,k} X_{L,l} \mathrm{t}_{kl}\,, \quad \mathrm{t}_{kl} = J^{-1} x_{k,K} x_{l,L} \mathrm{T}^{(2)}_{KL}$

P-K2 a P-K1 v případě malých deformací

$$\mathbf{T}^{(1)} = (1 + \mathrm{tr}\mathbf{H})\,\mathbf{t} - \mathbf{H}^{T} \cdot \mathbf{t} + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{T}^{(2)} = (1 + \mathrm{tr}\mathbf{H})\,\mathbf{t} - \mathbf{H}^{T} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

Geometrie deformace str. 23:

$$J = \det \mathbf{F} = 1 + \mathrm{tr}\ \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$$
$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^{T} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

V případě *malých deformací* a současně i *malých napětí* lze zanedbat také členy řádu $|\mathbf{H}|.|\mathbf{t}|$.
Potom

$$\mathbf{T}^{(1)} \approx \mathbf{T}^{(2)} \approx \mathbf{t}$$