Mechanika kontinua – část 5
Zákony zachování

Geometrie deformace — Kinematika — Působící síly a napětí

Konstitutivní vztahy + **Zákony zachování**

V této přednášce

Zákon zachování hmoty

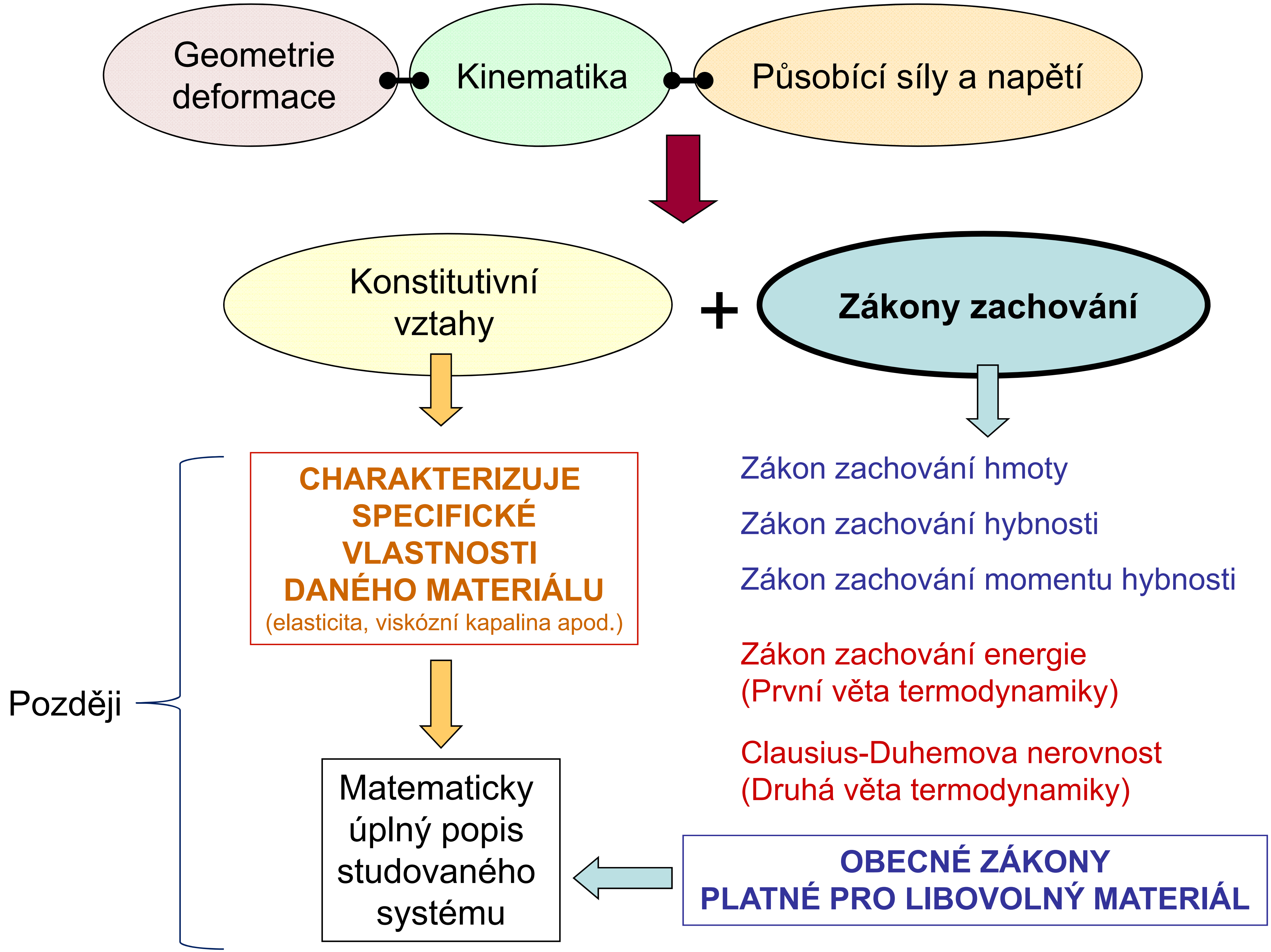
Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Zákon zachování energie
(První věta termodynamiky)

Clausius-Duhemova nerovnost
(Druhá věta termodynamiky)

OBECNÉ ZÁKONY
PLATNÉ PRO LIBOVOLNÝ MATERIÁL


Geometrie deformace
Kinematika
Působící síly a napětí
Konstitutivní vztahy
+
Zákony zachování
CHARAKTERIZUJE SPECIFICKÉ VLASTNOSTI DANÉHO MATERIÁLU
(elasticita, viskózní kapalina apod.)
Zákon zachování hmoty
Zákon zachování hybnosti
Zákon zachování momentu hybnosti
Zákon zachování energie
(První věta termodynamiky)
Clausius-Duhemova nerovnost
(Druhá věta termodynamiky)
Později
Matematicky úplný popis studovaného systému
OBECNÉ ZÁKONY
PLATNÉ PRO LIBOVOLNÝ MATERIÁL

Zákon zachování hmoty (*mass conservation* nebo *continuity equation*)

Celková hmota tělesa se při deformaci nemění.

$$\int_V \rho_0 \, \mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho \, \mathrm{d}v$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \, \mathrm{d}v = 0}$$ ← integrální formulace zákona zachování hmoty

Pro získání lokálního tvaru zákona zachování hmoty použijeme Reynoldsův transportní teorém, který jsme odvodili v části Kinematika na str. 8 a kde obecnou skalární funkci ϕ nahradíme hustotou ρ.

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \, \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{v} \right) \mathrm{d}v}_{\text{Reynoldsův transportní teorém}} = 0$$

Odtud

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{v} = 0}$$ ← *rovnice kontinuity* (lokální formulace zákona zachování hmoty)

Vyjádříme-li materiálovou derivaci a použijeme-li identitu $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \rho \mathrm{div}\vec{v} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\rho$, dostaneme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\rho + \rho \, \mathrm{div}\vec{v} = \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0}$$ ← alternativní tvar rovnice kontinuity

Zákon zachování hybnosti – pohybová rovnice (*momentum equation*)

Časová změna hybnosti tělesa je rovna celkové síle, která na těleso působí.

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho\,\vec{v}\,\mathrm{d}v = \int_{s(t)} \vec{t}_{(\vec{n})}\,\mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho \vec{f}\,\mathrm{d}v}$$

← integrální tvar pohybové rovnice

síla vztažená na jednotku hmoty (!)

K odvození lokálního tvaru zákona použijeme opět Reynoldsův transportní teorém (Kinematika na str. 9), kde vektorovou funkci $\vec{q}$ nahradíme součinem $\rho\vec{v}$.

Rozepišme nejprve levou stranu integrálního zákona:

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho\,\vec{v}\,\mathrm{d}v = \underbrace{\int_{v(t)}\left[\frac{D(\rho\,\vec{v})}{Dt} + \rho\vec{v}\mathrm{div}\,\vec{v}\right]\mathrm{d}v}_{\text{Reynoldsův transportní teorém}} = \int_{v(t)}\left[\vec{v}\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} + \rho\vec{v}\mathrm{div}\,\vec{v}\right]\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\left[\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{v}\underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)}_{=\,0\ \text{(rovnice kontinuity)}}\right]\mathrm{d}v$$

Pravá strana: $$\int_{s(t)} \vec{t}_{(\vec{n})}\,\mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}v = \int_{s(t)} \vec{n}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \mathrm{div}\,\mathbf{t}\,\mathrm{d}v + \int_{v(t)} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left(\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f}\right)\mathrm{d}v$$

Odtud $$\int_{v(t)}\left[\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} - \left(\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f}\right)\right]\mathrm{d}v = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} \quad \text{resp.} \quad \mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}\right)}$$

← lokální tvar pohybové rovnice

Poznámka: české slovo *hybnost* se v angličtině vyjadřuje jako *linear momentum.*

Zákon zachování momentu hybnosti* – symetrie Cauchyho tenzoru

Časová změna momentu hybnosti tělesa je rovna celkovému momentu všech sil, které na těleso působí.

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{v(t)}(\vec{x}\times\rho\,\vec{v})\;\mathrm{d}v=\int_{s(t)}\left(\vec{x}\times\vec{t}_{(\vec{n})}\right)\;\mathrm{d}a\;+\int_{v(t)}\left(\vec{x}\times\rho\vec{f}\right)\;\mathrm{d}v}\quad\longleftarrow\ \text{integrální tvar}$$

K odvození lokálního tvaru zákona budeme v prvním kroku potřebovat

Cauchyho vztah pro napětí $\vec{t}_{(\vec{n})}=\vec{n}\cdot\mathbf{t}\,,$

tenzorovou identitu $\vec{v}\times(\vec{w}\cdot\mathbf{A})=-\vec{w}\cdot(\mathbf{A}\times\vec{v})$

a Gaussovu větu pro tenzor: $\int_v \mathrm{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}v=\int_s \vec{n}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}a.$

"dot cross product"

$$\boxed{\mathbf{A}\dot{\times}\mathbf{B}=A_{ij}B_{jk}\epsilon_{lik}\vec{e}_l}$$

S pomocí Gaussovy věty převedeme povrchový integrál přes moment plošné síly na objemový integrál:

$$\int_{s(t)}\left(\vec{x}\times\vec{t}_{(\vec{n})}\right)\;\mathrm{d}a\;=-\int_{v(t)}\mathrm{div}\,(\mathbf{t}\times\vec{x})\;\mathrm{d}v\underset{\uparrow}{=}-\int_{v(t)}\left[(\mathrm{div}\,\mathbf{t})\times\vec{x}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathrm{grad}\,\vec{x}\right]\mathrm{d}v\underset{\uparrow}{=}-\int_{v(t)}\left[(\mathrm{div}\,\mathbf{t})\times\vec{x}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}\right]\mathrm{d}v\,.$$

$\boxed{\text{identita}\quad \mathrm{div}\,(\mathbf{t}\times\vec{u})=(\mathrm{div}\,\mathbf{t})\times\vec{u}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\mathrm{grad}\,\vec{u}}$ $\boxed{\mathrm{grad}\,\vec{x}=\mathbf{I}}$

Tento výraz dosadíme do integrálního tvaru zákona zachování hybnosti a současně rozepíšeme časovou derivaci prvního integrálu podle Reynoldsova transportního teorému:

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)}(\vec{x}\times\rho\,\vec{v})\,\mathrm{d}v=\underbrace{\int_{v(t)}\left[\frac{D\,(\vec{x}\times\rho\,\vec{v})}{Dt}+(\vec{x}\times\rho\,\vec{v})\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right]\mathrm{d}v}_{\boxed{\text{materiálová derivace časové změny celkového momentu hybnosti rozepsaná s pomocí Reynoldsova transportního teorému}}}=\underbrace{-\int_{v(t)}\left[(\mathrm{div}\,\mathbf{t})\times\vec{x}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}\right]\mathrm{d}v}_{\boxed{\text{upravený integrál přes moment plošné síly}}}+\underbrace{\int_{v(t)}\left(\vec{x}\times\rho\vec{f}\right)\mathrm{d}v}_{\boxed{\text{moment objemových sil}}}$$

* Poznámka: české spojení *moment hybnosti* se v angličtině vyjadřuje jako *angular momentum* nebo *moment of momentum.*

Zákon zachování momentu hybnosti – symetrie Cauchyho tenzoru (pokračování)

$$\int_{v(t)}\left[\frac{D\left(\vec{x}\times\rho\,\vec{v}\right)}{Dt}+\left(\vec{x}\times\rho\,\vec{v}\right)\operatorname{div}\vec{v}\right]\mathrm{d}v=-\int_{v(t)}\left[\left(\operatorname{div}\mathbf{t}\right)\times\vec{x}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}\right]\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\left(\vec{x}\times\rho\vec{f}\right)\mathrm{d}v$$

$$\int_{v(t)}\left[\frac{D\left(\vec{x}\times\rho\,\vec{v}\right)}{Dt}+\left(\vec{x}\times\rho\,\vec{v}\right)\operatorname{div}\vec{v}+\left(\operatorname{div}\mathbf{t}\right)\times\vec{x}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}-\left(\vec{x}\times\rho\vec{f}\right)\right]\mathrm{d}v=0$$

$$\boxed{\frac{D\left(\vec{x}\times\rho\,\vec{v}\right)}{Dt}=\left(\vec{x}\times\vec{v}\right)\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{D\vec{x}}{Dt}\times\vec{v}\right)+\rho\left(\vec{x}\times\frac{D\vec{v}}{Dt}\right)}$$

$$\int_{v(t)}\left[\left(\vec{x}\times\vec{v}\right)\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\vec{v}\right)+\rho\left(\frac{D\vec{x}}{Dt}\times\vec{v}\right)+\underline{\rho\left(\vec{x}\times\frac{D\vec{v}}{Dt}\right)}+\underline{\left(\operatorname{div}\mathbf{t}\right)\times\vec{x}}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}-\underline{\left(\vec{x}\times\rho\vec{f}\right)}\right]\mathrm{d}v=0$$

Z podtržených členů vytkneme $\vec{x}$:

$$\int_{v(t)}\left[\left(\vec{x}\times\vec{v}\right)\underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\vec{v}\right)}_{\boxed{=0\quad\text{(rovnice kontinuity)}}}+\rho\underbrace{\left(\frac{D\vec{x}}{Dt}\times\vec{v}\right)}_{\boxed{=\rho\vec{v}\times\vec{v}=0}}+\vec{x}\times\underbrace{\left(\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}-\operatorname{div}\mathbf{t}-\rho\vec{f}\right)}_{\boxed{=0\quad\text{(pohybová rovnice)}}}+\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}\right]\mathrm{d}v=0$$

$$\int_{v(t)}\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}\,\mathrm{d}v=0$$

$$\int_{v(t)}\mathbf{t}^T\dot{\times}\,\mathbf{I}\,\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(t_{ji}\delta_{jk}\right)\epsilon_{lik}\vec{e}_l\,\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\epsilon_{lij}\,t_{ji}\right)\vec{e}_l\,\mathrm{d}v=\underbrace{\int_{v(t)}\left[(t_{32}-t_{23})\vec{e}_1+(t_{31}-t_{13})\vec{e}_2+(t_{21}-t_{12})\vec{e}_3\right]\mathrm{d}v=0}_{\text{musí platit pro libovolný tenzor napětí}}$$

$$\boxed{\mathbf{t}=\mathbf{t}^T}\quad\longleftarrow$$

Cauchyho tenzor napětí je symetrický

Zákon zachování energie

Časová změna součtu vnitřní a kinetické energie je rovna součtu výkonu objemových a povrchových sil a všech dalších energií, které z tělesa unikají nebo do něj vstupují za jednotku času.

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(\mathcal{E}+\mathcal{K})=\mathcal{W}+\sum_i \mathcal{U}_i}$$

V prvním kroku budeme vyšetřovat mechanickou část této rovnice. Nejprve vyjádříme v integrálním tvaru **výkon objemových a povrchových sil**:

$$\mathcal{W}=\int_{v(t)}\left(\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}v+\int_{s(t)}\left(\vec{t}_{(\vec{n})}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}a=\int_{v(t)}\left(\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}v+\int_{s(t)}\left(\vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}a$$

$$\boxed{\vec{t}_{(\vec{n})}=\vec{n}\cdot\mathbf{t}}$$

Nyní s pomocí Gaussovy věty převedeme plošný integrál na objemový:

$$\int_{s(t)}\left(\vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}a=\int_{s(t)}\left(\vec{v}\cdot\mathbf{t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{a}=\int_{v(t)}\mathrm{div}\left(\vec{v}\cdot\mathbf{t}\right)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\left(\vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{t}\right)\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\left(\mathbf{t}:\mathbf{d}\right)\mathrm{d}v$$

$$\boxed{\left(\vec{n}\cdot\mathbf{t}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}a=\left(\vec{v}\cdot\mathbf{t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{a}}\qquad \boxed{\text{Gaussova věta}}\qquad \boxed{\mathrm{div}\left(\vec{v}\cdot\mathbf{t}\right)=\vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{t}+\mathbf{t}:\mathrm{grad}\vec{v}}$$

V případě posledního členu jsme využili toho, že Cauchyho tenzor je symetrický, tj.

$$\mathbf{t}:\mathrm{grad}\vec{v}=\mathbf{t}:\boldsymbol{l}=\mathbf{t}:\tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}^T\right)=\mathbf{t}:\mathbf{d}$$

pohybová rovnice

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{t}+\rho\vec{f}=\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}}$$

Celkový výkon povrchových a objemových sil tedy můžeme psát ve tvaru

$$\mathcal{W}=\int_{v(t)}\left(\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\right)\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\left(\vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{t}\right)\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\left(\mathbf{t}:\mathbf{d}\right)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\rho\left(\vec{v}\cdot\frac{D\vec{v}}{Dt}\right)\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\left(\mathbf{t}:\mathbf{d}\right)\mathrm{d}v$$

Zákon zachování energie - pokračování

$$\mathcal{W} = \int_{v(t)} \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) \mathrm{d}v + \int_{v(t)} (\mathbf{t} : \mathbf{d})\, \mathrm{d}v$$

← výkon objemových a plošných sil

Nyní vyjádříme **časovou změnu celkové kinetické energie**:

$$\frac{D\mathcal{K}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \int_{v(t)} \rho |\vec{v}|^2 \mathrm{d}v \right) = \frac{1}{2} \int_{v(t)} \rho \frac{D}{Dt} |\vec{v}|^2 \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) \mathrm{d}v$$

kde jsme využili materiálové identity

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \phi \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} \mathrm{d}v \, .$$

Odvození:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \phi \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \underbrace{\left[\frac{D(\rho\phi)}{Dt} + (\rho\phi) \mathrm{div}\, \vec{v} \right]}_{\text{Reynoldsův teorém}} \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \left\{ \phi \underbrace{\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathrm{div}\, \vec{v} \right]}_{= 0 \text{ (rovnice kontinuity)}} + \rho \frac{D\phi}{Dt} \right\} \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} \mathrm{d}v \, .$$

Nyní vyjádříme zákon zachování energie s pomocí právě odvozených vztahů pro $\mathcal{W}$ a $\frac{D\mathcal{K}}{Dt}$:

$$\frac{D}{Dt} (\mathcal{E} + \mathcal{K}) = \mathcal{W} + \sum \mathcal{U}_i$$

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt} + \underbrace{\int_{v(t)} \rho \cancel{\left(\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)} \mathrm{d}v}_{\frac{D\mathcal{K}}{Dt}} = \underbrace{\int_{v(t)} \rho \cancel{\left(\vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)} \mathrm{d}v + \int_{v(t)} (\mathbf{t} : \mathbf{d})\, \mathrm{d}v}_{\mathcal{W}} + \sum \mathcal{U}_i$$

Zákon zachování energie - pokračování

$$\frac{D}{Dt}(\mathcal{E}+\mathcal{K}) = \mathcal{W} + \sum \mathcal{U}_i$$

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt} = \int_{v(t)} (\mathbf{t} : \mathbf{d})\,\mathrm{d}v + \sum \mathcal{U}_i$$

Celkovou vnitřní energii $\mathcal{E}$ vyjádříme jako integrál přes hustotu vnitřní energie ε :

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho\epsilon\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \rho\frac{D\epsilon}{Dt}\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} (\mathbf{t} : \mathbf{d})\ \mathrm{d}v + \sum \mathcal{U}_i \qquad ❋$$

Z ostatních energií uvažujme pro jednoduchost pouze energii tepelnou. Poslední člen pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{U} = -\int_{s(t)} (\vec{q}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho h\,\mathrm{d}v\,,$$

kde $\vec{q}$ značí tepelný tok přes hranici oblasti a h jsou tepelné zdroje vztažené k jednotce hmotnosti.
Dosadíme do ❋ a použijeme Gaussovu větu:

$$\int_{v(t)} \rho\frac{D\epsilon}{Dt}\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} (\mathbf{t} : \mathbf{d})\ \mathrm{d}v - \int_{s(t)} (\vec{q}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho h\,\mathrm{d}v = \int_{v(t)} (\mathbf{t} : \mathbf{d} - \mathrm{div}\,\vec{q} + \rho h)\,\mathrm{d}v$$

Odtud

$$\boxed{\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \mathrm{div}\,\vec{q} + \rho h}$$

$\longleftarrow$ **zákon zachování energie v lokálním tvaru**

Princip růstu entropie – Clausius-Duhemova nerovnost

$$\boxed{\frac{D\mathcal{S}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \underbrace{\rho\,\eta}_{\text{hustota entropie}}\,\mathrm{d}v - \int_{v(t)} \underbrace{\rho\,b}_{\text{zdroje entropie}}\,\mathrm{d}v + \int_{s(t)} \underbrace{\vec{s}\cdot\vec{n}}_{\text{tok entropie}}\,\mathrm{da} \geq 0}$$

obvyklé vyjádření entropie

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho\,\eta\,\mathrm{d}v \geq \int_{v(t)} \frac{\rho h}{T}\,\mathrm{d}v - \int_{s(t)} \frac{\vec{q}\cdot\vec{n}}{T}\,\mathrm{da}$$

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} \geq \frac{\rho h}{T} - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)$$

Clausius-Duhemova nerovnost *

V mechanice kontinua se používá především k ověření, zda použitý reologický vztah je termodynamicky přípustný.

Vyjádření nerovnosti pomocí hustoty vnitřní energie:

Pravá strana C-D nerovnosti v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\rho h}{T} - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) = \frac{\rho h}{T} - \frac{1}{T}\mathrm{div}\,\vec{q} - \vec{q}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\rho h}{T} - \frac{1}{T}\mathrm{div}\,\vec{q} + \frac{1}{T^2}\vec{q}\cdot\mathrm{grad}\,T = \frac{1}{T}\underbrace{(\rho h - \mathrm{div}\,\vec{q})}_{=\rho\dot{\epsilon} - \mathbf{t}:\mathbf{d}} + \frac{1}{T^2}\vec{q}\cdot\mathrm{grad}\,T$$

$$\boxed{\mathrm{div}\phi\vec{a} = \phi\mathrm{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\mathrm{grad}\phi}$$

(ze zákona zachování energie)

Vynásobíme teplotou a všechny členy převedeme na levou stranu:

$$\boxed{\mathcal{D} := \rho\left(T\frac{D\eta}{Dt} - \frac{D\epsilon}{Dt}\right) + \mathbf{t}:\mathbf{d} - \frac{\vec{q}\cdot\mathrm{grad}\,T}{T} \geq 0}$$

disipace

=

produkce entropie za jednotku času vztažená k jednotkovému objemu krát absolutní teplota

* Rudolf Clausius 1822 – 1888 (Německo), Pierre Duhem 1861-1916 (Francie)

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\operatorname{div}\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \operatorname{grad}\mathbf{B}\,, \quad \operatorname{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \operatorname{grad}\bullet = \operatorname{Div}\bullet\,.$$

Potom

$$\operatorname{div}\mathbf{t} = \operatorname{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) = \operatorname{div}(J^{-1}\mathbf{F})\cdot\mathbf{T}^{(1)} + J^{-1}\mathbf{F}^T : \operatorname{grad}\mathbf{T}^{(1)} = J^{-1}\operatorname{Div}\mathbf{T}^{(1)}$$

a pohybová rovnice má tedy tvar

$$\boxed{\operatorname{Div}\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0\vec{F} = \rho_0\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}$$

Použitím vztahu $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{F}^T$ bychom odvodili analogický vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor.

Zákony zachování v lagrangeovském popisu - pokračování

Symetrie tenzoru napětí

P-K1: $\mathbf{t}^T = \mathbf{t} \;\Rightarrow\; \left(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}\right)^T = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\left(\mathbf{T}^{(1)}\right)^T = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}\cdot\mathbf{F}^{-T}}$

P-K2: $\mathbf{t}^T = \mathbf{t} \quad\Rightarrow\quad \left(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{F}^T\right)^T = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{F}^T \quad\Rightarrow\quad \boxed{\left(\mathbf{T}^{(2)}\right)^T = \mathbf{T}^{(2)}}$

Zákon zachování energie

V okamžité konfiguraci $\rho\dfrac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t}:\mathbf{d} - \operatorname{div}\vec{q} + \rho h$

Krok 1 – člen $\mathbf{t}:\mathbf{d}$. Použijeme identity $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}):\mathbf{C} = \mathbf{A}:(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ a $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}):(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}) = (\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}):(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

$$\mathbf{t}:\mathbf{d} = \mathbf{t}:\boldsymbol{l} = J^{-1}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}\right):\left(\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right) = J^{-1}\left(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F}\right):\left(\mathbf{T}^{(1)}\cdot\dot{\mathbf{F}}\right) = J^{-1}\mathbf{I}:\left(\mathbf{T}^{(1)}\cdot\dot{\mathbf{F}}\right) =$$
$$= J^{-1}\left(\mathbf{I}\cdot\mathbf{T}^{(1)}\right):\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\left(\mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{F}^T\right):\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{T}^{(2)}:\dot{\mathbf{E}}$$

$$\underline{\mathbf{t}:\mathbf{d} = J^{-1}\mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{T}^{(2)}:\dot{\mathbf{E}}}$$

Krok 2 – člen $\operatorname{div}\vec{q}$:

$$\underset{\uparrow\ \text{tepelný tok v referenční konfiguraci}}{\vec{Q}}\cdot d\vec{A} = \vec{q}\cdot d\vec{a} = \vec{q}\cdot\underset{\uparrow\ \boxed{d\vec{a} = Jd\vec{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}}}{\left(Jd\vec{A}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right)} \quad\Rightarrow\quad \vec{q} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\vec{Q}$$

$$\operatorname{div}\vec{q} = \operatorname{div}\left(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\vec{Q}\right) = \operatorname{div}\left(J^{-1}\mathbf{F}\right)\cdot\vec{Q} + J^{-1}\mathbf{F}^T:\operatorname{grad}\vec{Q} = J^{-1}\operatorname{Div}\vec{Q} \quad\rightarrow\quad \underline{\operatorname{div}\vec{q} = J^{-1}\operatorname{Div}\vec{Q}}$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu - pokračování

Zákon zachování energie - pokračování

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t}:\mathbf{d} - \operatorname{div}\vec{q} + \rho h \\ &\mathbf{t}:\mathbf{d} = J^{-1}\mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{T}^{(2)}:\dot{\mathbf{E}} \\ &\operatorname{div}\vec{q} = J^{-1}\operatorname{Div}\vec{Q}\,, \quad \rho = J^{-1}\rho_0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial\epsilon}{\partial t} &= \mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{F}} - \operatorname{Div}\vec{Q} + \rho_0 H \\ &\text{nebo} \\ \rho_0\frac{\partial\epsilon}{\partial t} &= \mathbf{T}^{(2)}:\dot{\mathbf{E}} - \operatorname{Div}\vec{Q} + \rho_0 H \end{aligned}}$$

Entropická nerovnost

V okamžité konfiguraci: $\rho\left(T\frac{D\eta}{Dt} - \frac{D\epsilon}{Dt}\right) + \mathbf{t}:\mathbf{d} - \frac{\vec{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T} \geq 0$

Použitím

$$\mathbf{t}:\mathbf{d} = J^{-1}\mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{T}^{(2)}:\dot{\mathbf{E}}\,, \qquad \rho = J^{-1}\rho_0\,, \qquad \vec{q} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\vec{Q}$$

dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho_0\left(T\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\epsilon}{\partial t}\right) + \mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{F}} - \frac{\vec{Q}\cdot\operatorname{Grad}T}{T} \geq 0 \\ &\text{nebo} \\ &\rho_0\left(T\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\epsilon}{\partial t}\right) + \mathbf{T}^{(2)}:\dot{\mathbf{E}} - \frac{\vec{Q}\cdot\operatorname{Grad}T}{T} \geq 0 \end{aligned}}$$