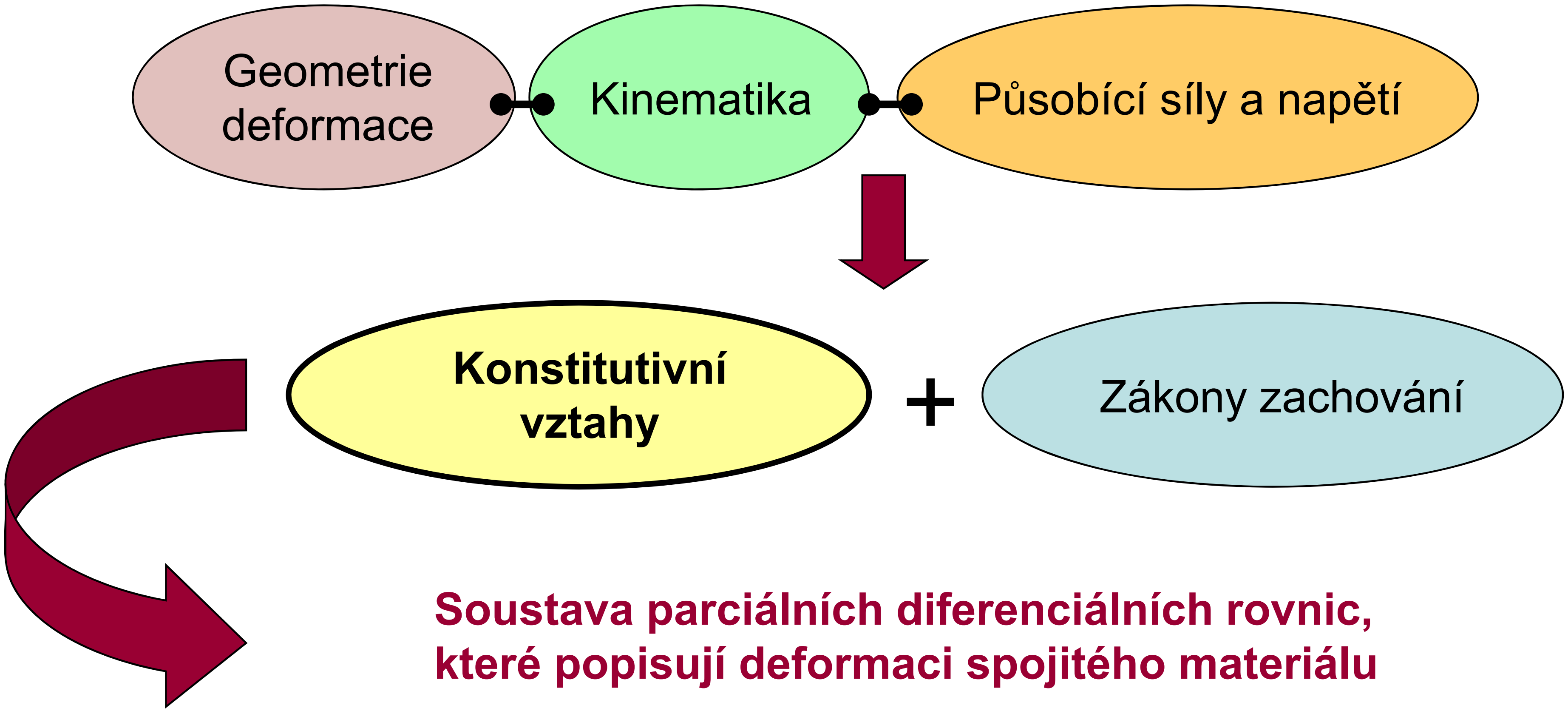
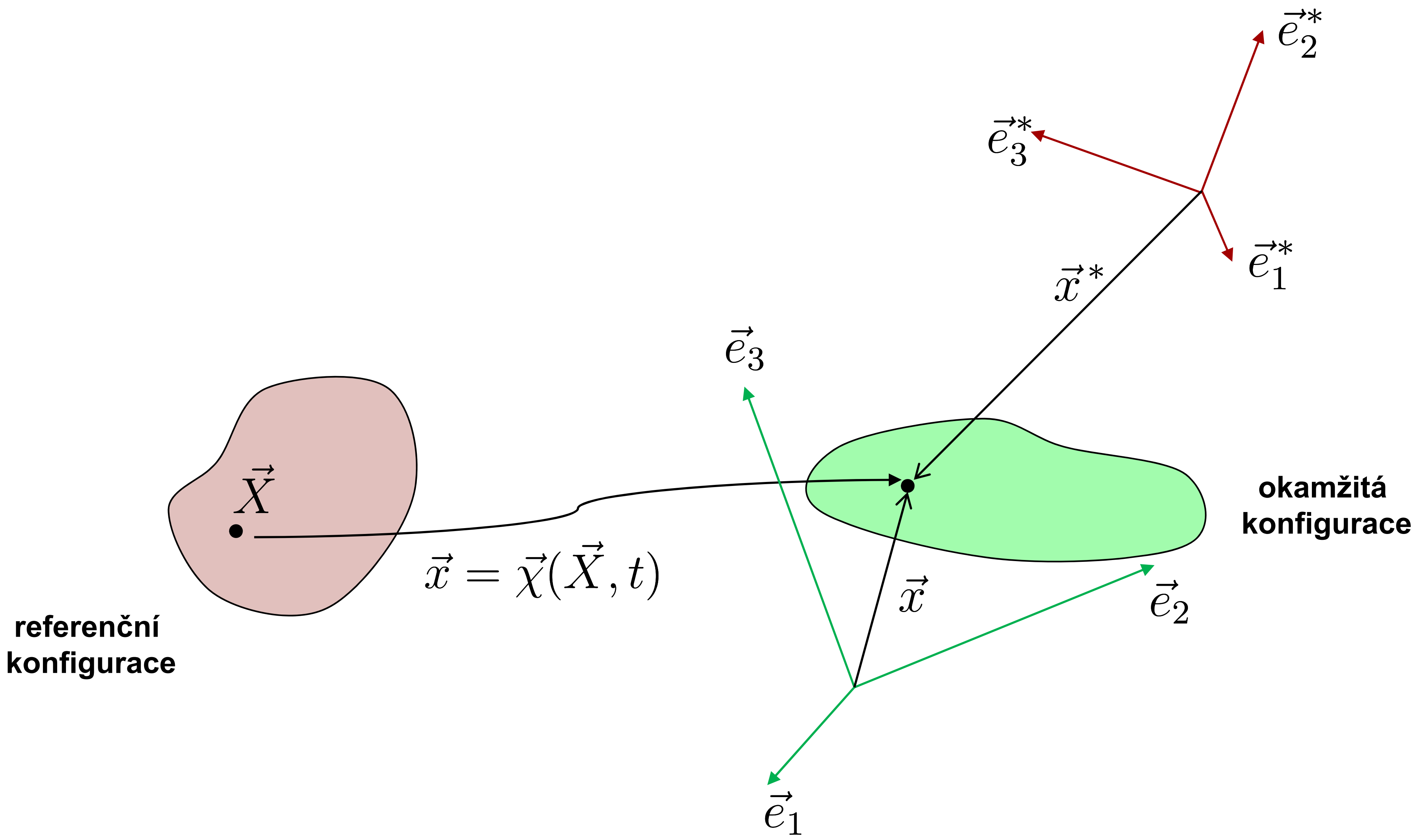
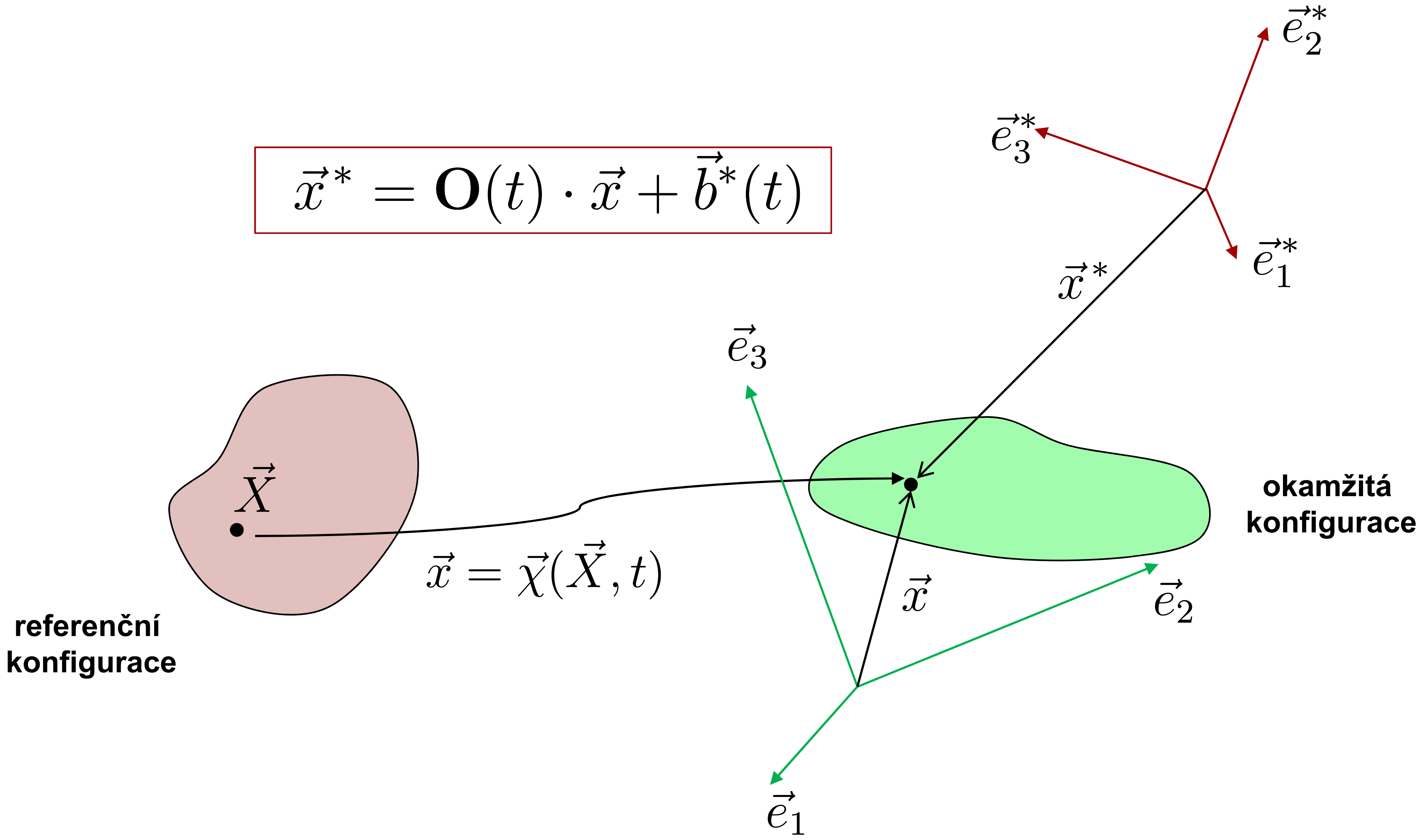
Mechanika kontinua – část 9
Konstitutivní vztahy II



Soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují deformaci spojitého materiálu

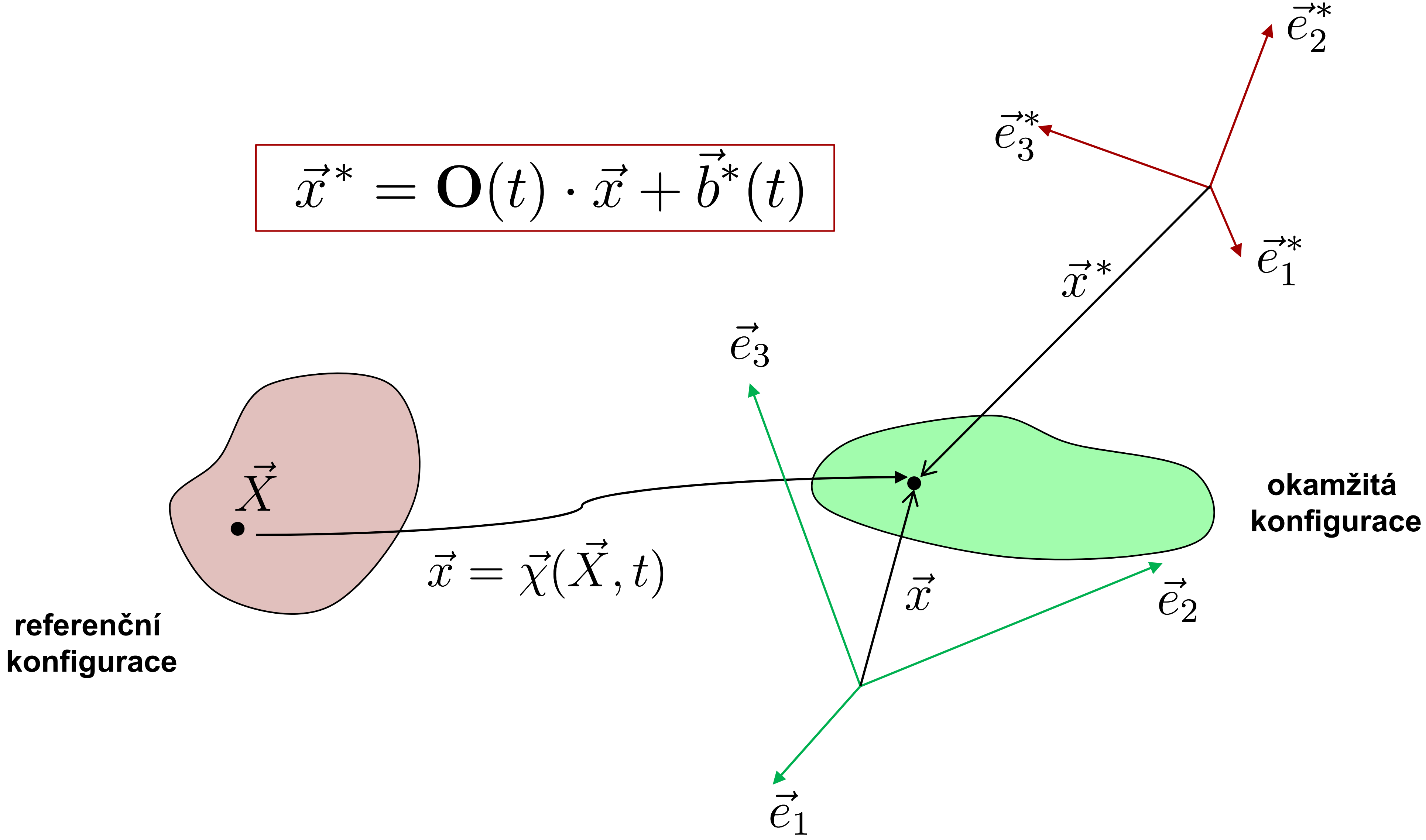
- Formální potřebnost konstitutivních vztahů
- Jednoduché příklady „zúplnění“ systému rovnic
- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy:
  deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- Koncept objektivity
- Kinematická podmínka
- **Materiálové symetrie, homogenní a izotropní materiály**
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti


$\vec{e}_2^{\,*}$
$\vec{e}_3^{\,*}$
$\vec{e}_1^{\,*}$
$\vec{x}^{\,*}$
$\vec{e}_3$
$\vec{X}$
okamžitá
konfigurace
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
referenční
konfigurace
$\vec{e}_1$



$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t)$
$\vec{e}_2^*$
$\vec{e}_3^*$
$\vec{e}_1^*$
$\vec{x}^*$
$\vec{e}_3$
$\vec{X}$
okamžitá konfigurace
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
referenční konfigurace
$\vec{e}_1$

$$\boxed{\vec{x}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{x} + \vec{b}^*(t)}$$



$$\mathbf{t} = \lambda(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left(\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^T\right]$$

⇩ **?**

$$\mathbf{t}^* = \lambda^*(\operatorname{div}\vec{u}^*)\mathbf{I} + \mu^*\left(\operatorname{grad}\vec{u}^* + (\operatorname{grad}\vec{u}^*)^T\right]$$

Objektivita kinematických veličin
Objektivita zákonů zachování

Objektivita kinematických veličin
Objektivita zákonů zachování

Transformační vlastnosti objektů popisujících deformaci

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$
$$\mathbf{F}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{R}$$
$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}},$$
$$\boldsymbol{l}^* = \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}$$

Objektivita kinematických veličin
Objektivita zákonů zachování

Transformační vlastnosti objektů popisujících deformaci

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}},$$

$$\boldsymbol{l}^* = \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}$$

Předpoklad objektivity některých veličin
Transformační vlastnosti fyzikálních veličin

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad \mathbf{T}^{(2)^*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Objektivita kinematických veličin

Objektivita zákonů zachování

Transformační vlastnosti objektů popisujících deformaci

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}},$$

$$\boldsymbol{l}^* = \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}$$

Předpoklad objektivity některých veličin

Transformační vlastnosti fyzikálních veličin

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad \mathbf{T}^{(2)^*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Objektivní materiálová derivace

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

$$\left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right)_\alpha = \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}) + \alpha\,(\mathbf{d} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{d})$$

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

$\longleftarrow$ Obecný implicitní tvar

$$\underset{\vec{X}' \in B,\, \tau \leq t}{\mathcal{R}} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

$\longleftarrow$ Obecný implicitní tvar

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \underset{\vec{X}' \in B,\, \tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right]$$

$\longleftarrow$ Předpoklad: napětí, tepelný tok a hustotu vnitřní energie lze vyjádřit explicitně

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0 \quad \longleftarrow$$

Obecný implicitní tvar

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right] \quad \longleftarrow$$

Předpoklad: napětí, tepelný tok a hustotu vnitřní energie lze vyjádřit explicitně

$$\left.\begin{aligned}
\chi(\vec{X}',\tau) &\approx \chi(\vec{X},\tau)+\mathbf{F}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}\\
\rho(\vec{X}',\tau) &\approx \rho(\vec{X},\tau)+\mathrm{Grad}\,\rho(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}\\
T(\vec{X}',\tau) &\approx T(\vec{X},\tau)+\vec{G}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X},
\end{aligned}\right\} \quad \longleftarrow$$

Princip lokálního působení

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

$\longleftarrow$ Obecný implicitní tvar

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$

$\longleftarrow$ Předpoklad: napětí, tepelný tok a hustotu vnitřní energie lze vyjádřit explicitně

$$\left.\begin{aligned}\chi(\vec{X}',\tau)&\approx\chi(\vec{X},\tau)+\mathbf{F}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}\\ \rho(\vec{X}',\tau)&\approx\rho(\vec{X},\tau)+\mathrm{Grad}\,\rho(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}\\ T(\vec{X}',\tau)&\approx T(\vec{X},\tau)+\vec{G}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X},\end{aligned}\right\}$$

$\longleftarrow$ Princip lokálního působení

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]$$

$\longleftarrow$ Jednoduché materiály

$$\mathop{\mathcal{R}}_{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0 \longleftarrow$$

Obecný implicitní tvar

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\mathop{\mathcal{F}}_{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right] \longleftarrow$$

Předpoklad: napětí, tepelný tok a hustotu vnitřní energie lze vyjádřit explicitně

$$\left.\begin{aligned}
\chi(\vec{X}',\tau) &\approx \chi(\vec{X},\tau)+\mathbf{F}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}\\
\rho(\vec{X}',\tau) &\approx \rho(\vec{X},\tau)+\mathrm{Grad}\,\rho(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}\\
T(\vec{X}',\tau) &\approx T(\vec{X},\tau)+\vec{G}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X},
\end{aligned}\right\} \longleftarrow$$

Princip lokálního působení

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \longleftarrow$$

Jednoduché materiály

Aplikujeme princip objektivity

$$\mathbf{O}(t)\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=$$

$$=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]=$$

$$=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}(\tau)\cdot\chi(\vec{X},\tau)+\vec{b}^*(\tau),\mathbf{O}(\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]$$

Konstitutivní vztah pro jednoduché materiály lze v materiálově objektivním tvaru

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2} \left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_3} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Konstitutivní vztah pro jednoduché materiály lze v materiálově objektivním tvaru

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2} \left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_3} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right]$$

Konstitutivní vztah pro jednoduché materiály lze v materiálově objektivním tvaru

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2} \left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_3} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right]$$

Kinematická podmínka – nestlačitelný materiál

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G}, ...)$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = -p\mathbf{C}^{-1} + \mathcal{G}, ...(\mathbf{C}, T, \vec{G}), \quad \mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G}, ...)$$

Konstitutivní vztah pro jednoduché materiály lze v materiálově objektivním tvaru

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_2}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_3}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Kinematická podmínka – nestlačitelný materiál

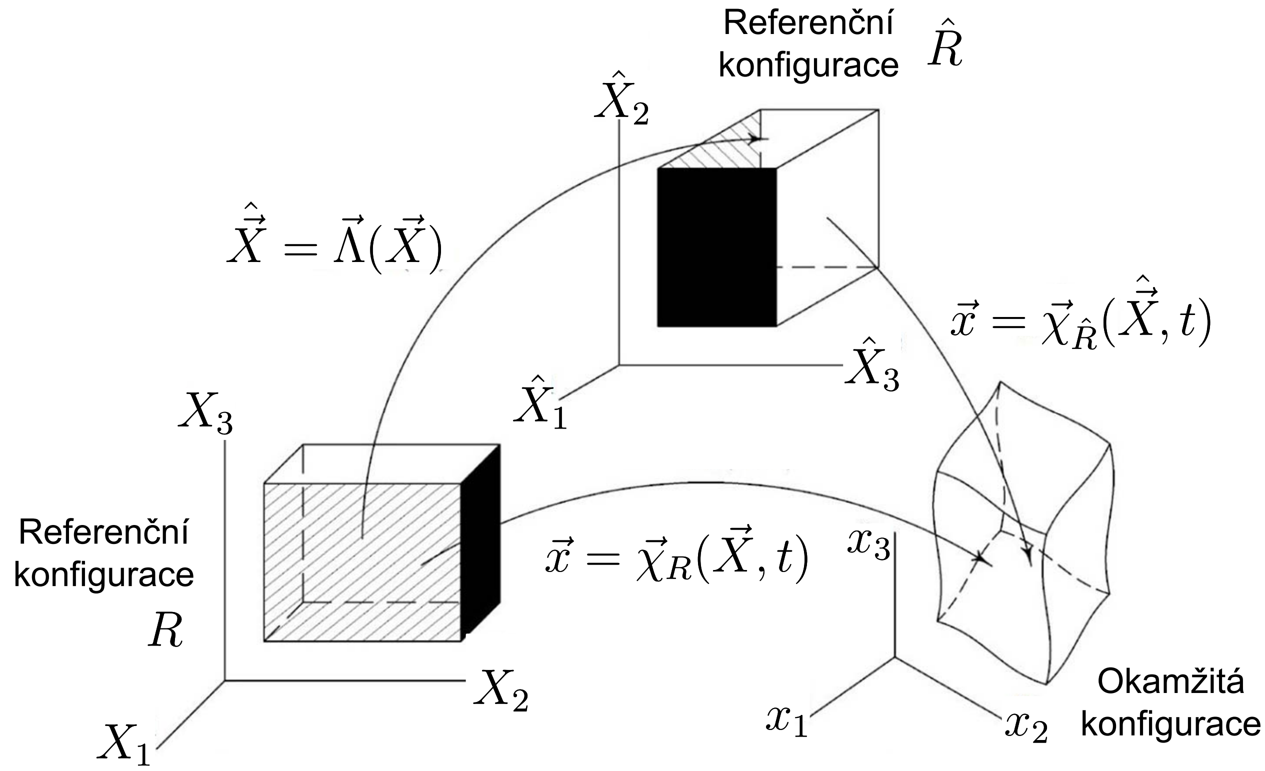
$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G}, ...)$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = -p\mathbf{C}^{-1} + \mathcal{G}, ...(\mathbf{C}, T, \vec{G}), \quad \mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G}, ...)$$

Zjednodušení: homogenní materiál

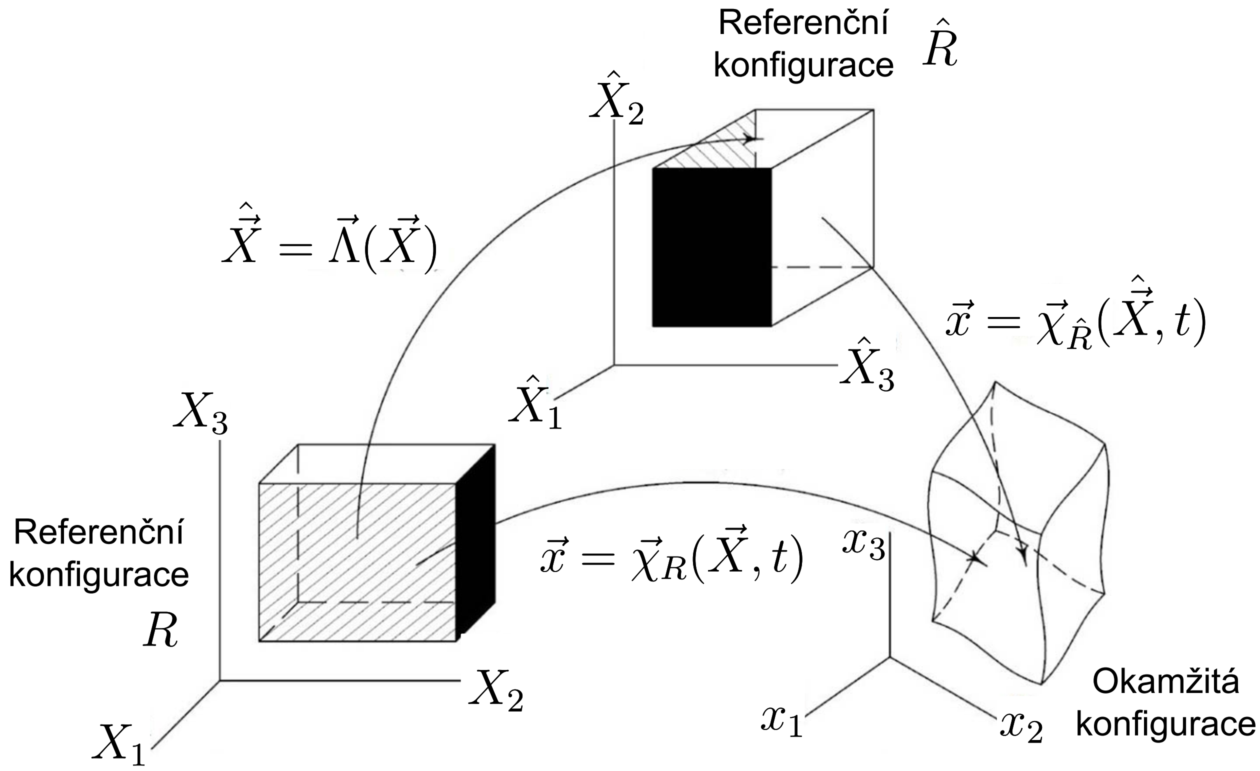
$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_1}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \cancel{\vec{X}}\right]$$

Materiálová symetrie



Materiálová symetrie

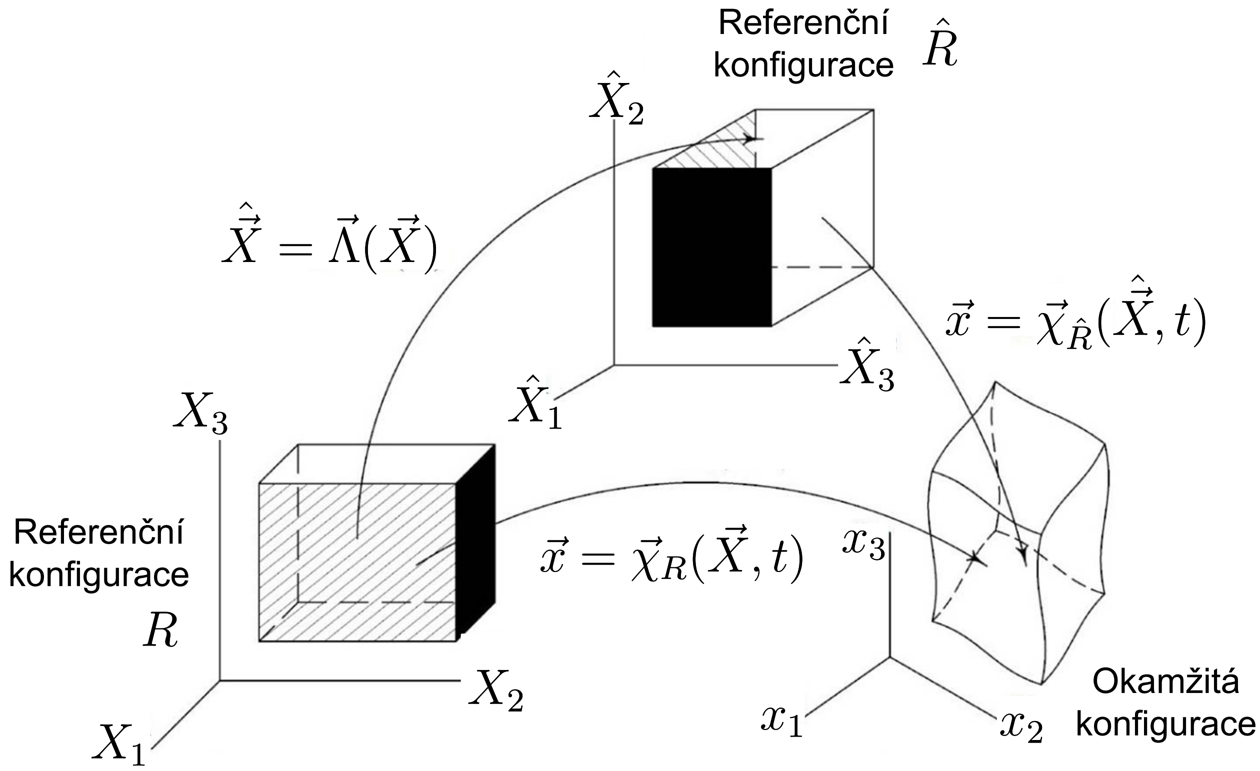
$$\vec{x} = \vec{\chi}_R(\vec{X}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\vec{\Lambda}(\vec{X}), t)$$



Materiálová symetrie

$$\vec{x} = \vec{\chi}_R(\vec{X}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\vec{\Lambda}(\vec{X}), t)$$

$$F_{kK} = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} = \frac{\partial \chi_k}{\partial \Lambda_{\hat{L}}} \frac{\partial \Lambda_{\hat{L}}}{\partial X_K} = \hat{F}_{k\hat{L}} P_{\hat{L}K}$$



Materiálová symetrie

$$\vec{x} = \vec{\chi}_R(\vec{X}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\vec{\Lambda}(\vec{X}), t)$$

$$F_{kK} = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} = \frac{\partial \chi_k}{\partial \Lambda_{\hat{L}}} \frac{\partial \Lambda_{\hat{L}}}{\partial X_K} = \hat{F}_{k\hat{L}} P_{\hat{L}K}$$

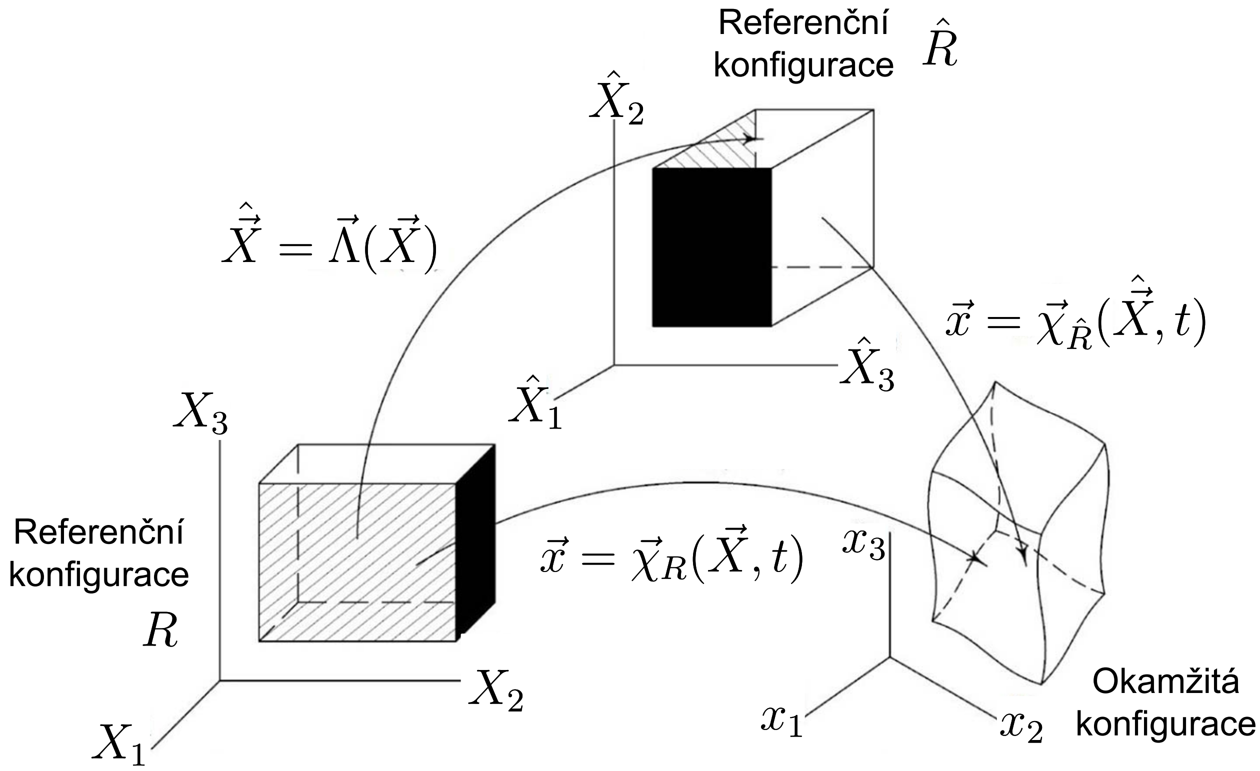
Neboli invariantně

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

kde

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) = \left(\mathrm{Grad}\, \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t)\right)^T$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}) = \left(\mathrm{Grad}\, \vec{\Lambda}(\vec{X})\right)^T$$



Materiálová symetrie

$$\vec{x} = \vec{\chi}_R(\vec{X}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\vec{\Lambda}(\vec{X}), t)$$

$$F_{kK} = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} = \frac{\partial \chi_k}{\partial \Lambda_{\hat{L}}} \frac{\partial \Lambda_{\hat{L}}}{\partial X_K} = \hat{F}_{k\hat{L}} P_{\hat{L}K}$$

Neboli invariantně

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

kde

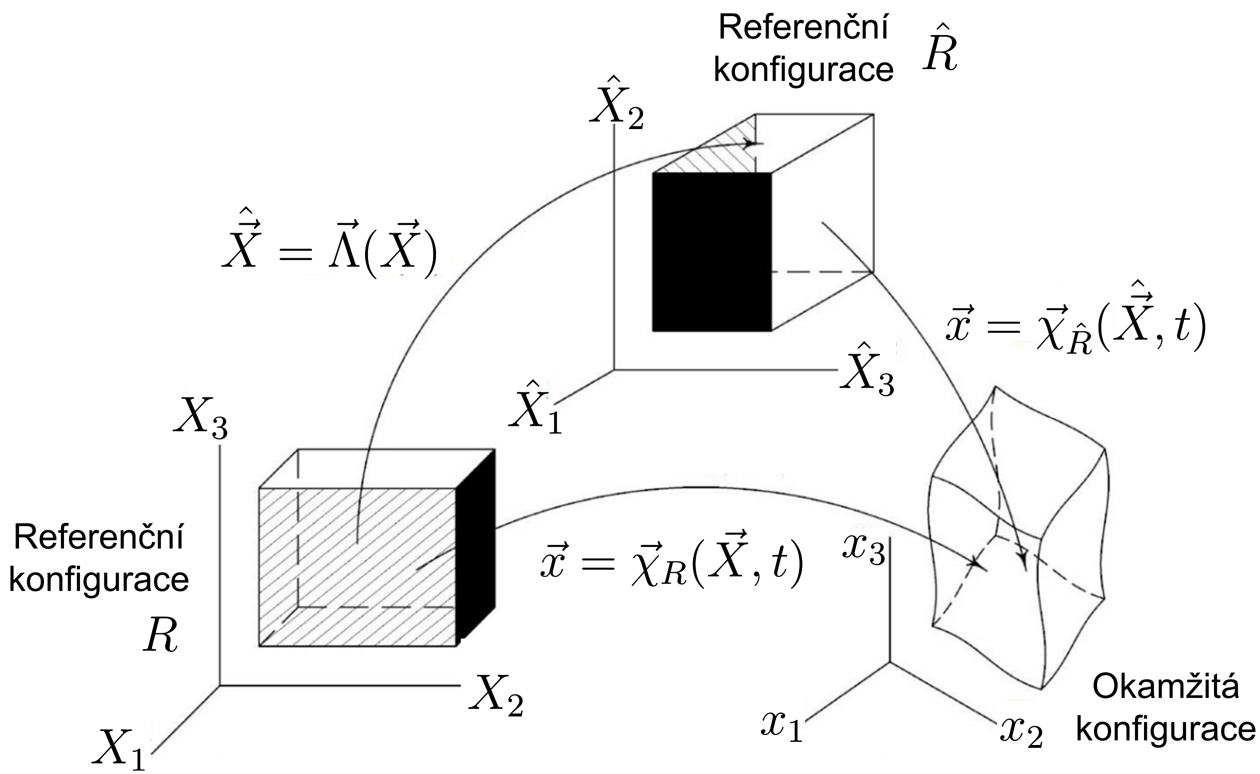
$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) = \left(\mathrm{Grad}\, \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t)\right)^T$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}) = \left(\mathrm{Grad}\, \vec{\Lambda}(\vec{X})\right)^T$$

Analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, t) = \hat{\vec{G}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

$$T(\vec{X}, t) = \hat{T}(\hat{\vec{X}}, t)$$



Materiálová symetrie

$$\vec{x} = \vec{\chi}_R(\vec{X}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\vec{\Lambda}(\vec{X}), t)$$

$$F_{kK} = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} = \frac{\partial \chi_k}{\partial \Lambda_{\hat{L}}} \frac{\partial \Lambda_{\hat{L}}}{\partial X_K} = \hat{F}_{k\hat{L}} P_{\hat{L}K}$$

Neboli invariantně

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

kde

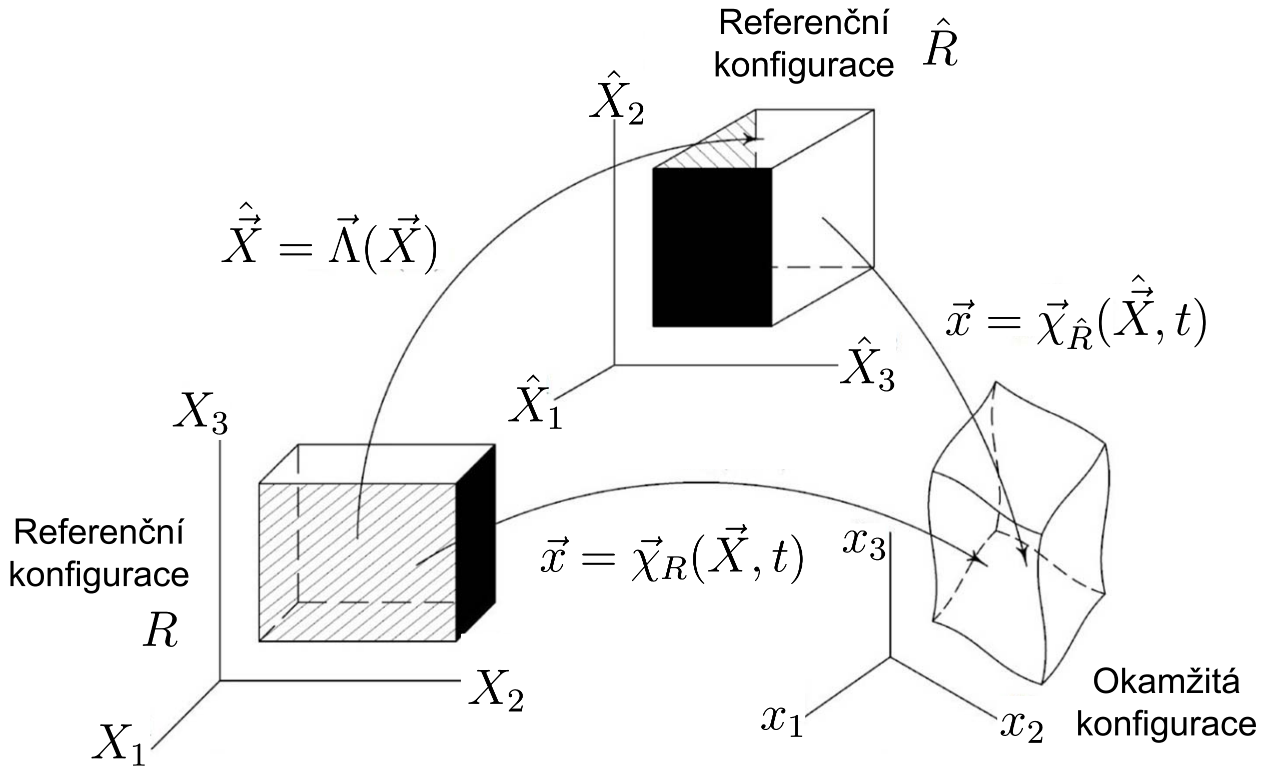
$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) = \left(\mathrm{Grad}\, \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t)\right)^T$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}) = \left(\mathrm{Grad}\, \vec{\Lambda}(\vec{X})\right)^T$$

Analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, t) = \hat{\vec{G}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

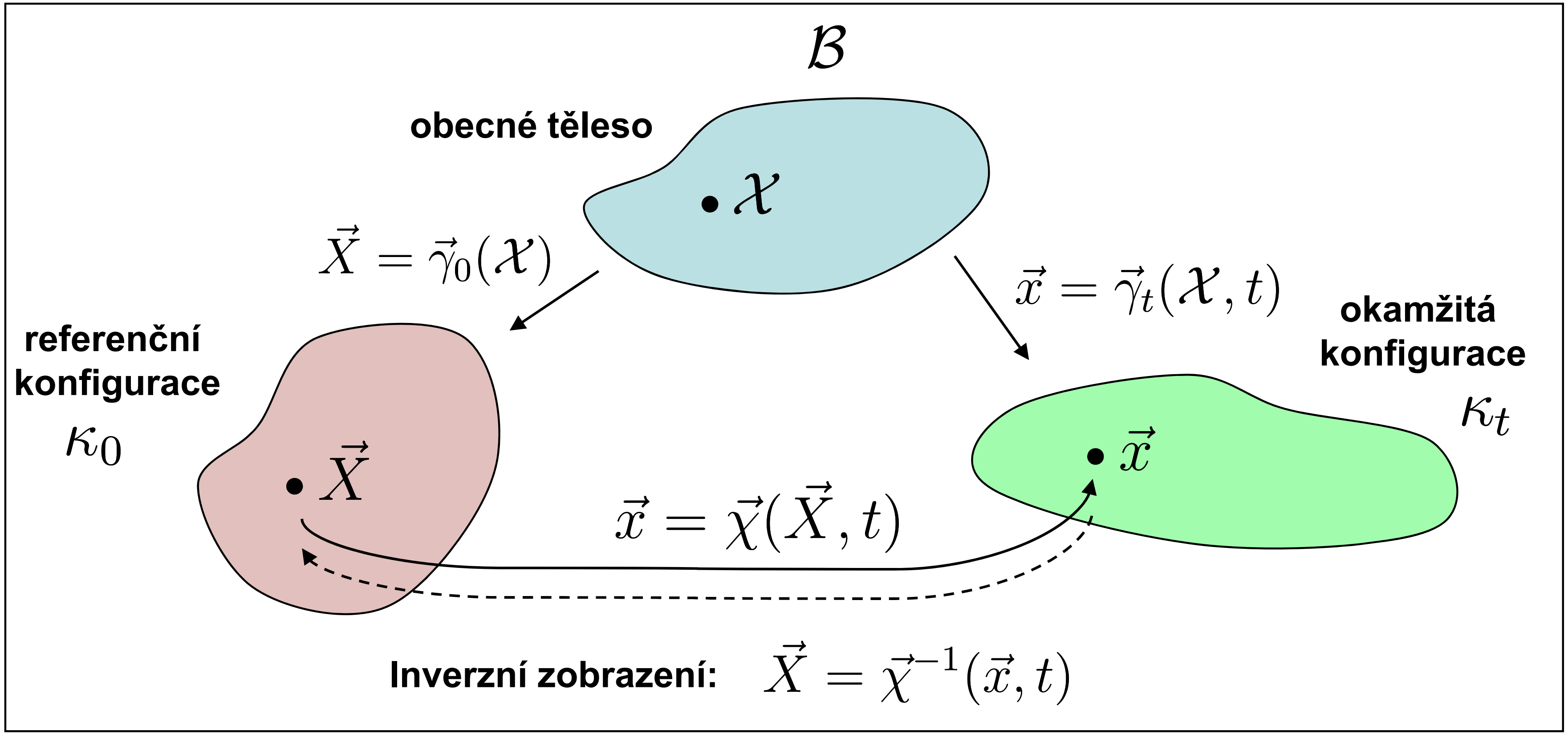
$$T(\vec{X}, t) = \hat{T}(\hat{\vec{X}}, t)$$



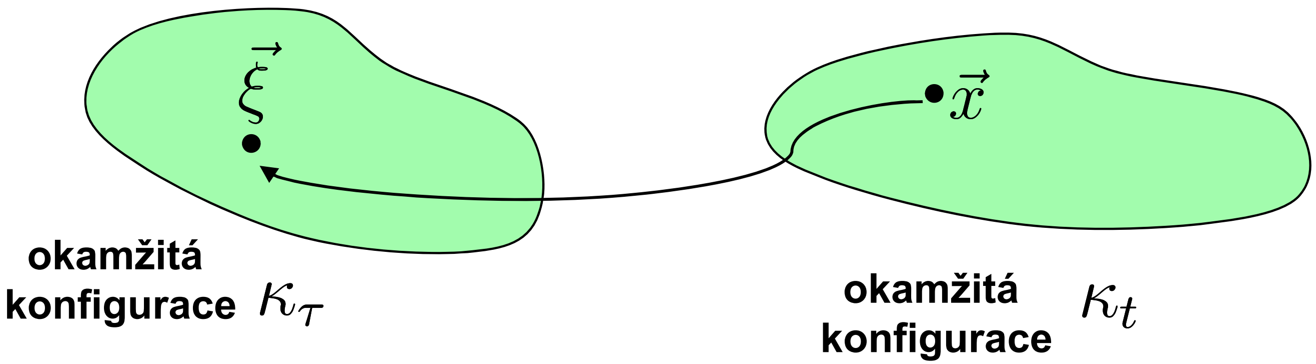
Materiálová symetrie vzhledem k transformaci $\mathbf{P}$:

$$\underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_R}\left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau)\right] = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_R}\left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X}), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})\right]$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu



Relativní pohyb mezi dvěma časovými okamžiky: $\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$



Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Konstitutivní vztahy 4

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$

$\longleftarrow$ funkce relativního pohybu

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$

← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$

← relativní deformační gradient

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ⟵ funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T , \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ⟵ relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ⟵ funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ⟵ relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\mathrm{grad}\, \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

$$\tau = t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := \left(\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)\right)^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial(\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial(\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

$$\tau = t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ⟵ funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ⟵ relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

$$\tau = t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \Big(\mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau)\Big) \cdot \Big(\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)\Big)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := \left(\mathrm{grad}\, \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)\right)^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

$$\tau = t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \left(\mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \underbrace{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau)\right) \cdot \left(\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau)}_{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) =: \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau)} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)\right)$$

← relativní Greenův deformační tenzor

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$

← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\operatorname{grad} \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial(\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$

← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial(\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

$$\tau = t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \left(\mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \underbrace{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau)\right) \cdot \left(\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau)}_{} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)\right)$$

$$\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) =: \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau)$$

← relativní Greenův deformační tenzor

$$\boxed{\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, viz Geometrie deformace)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \ \text{ a } \ \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, viz Geometrie deformace)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \;\text{ a }\; \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t)\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t)\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) \quad \star$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, viz Geometrie deformace)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \ \text{ a } \ \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) \quad \star$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t: $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X}, t)$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, viz Geometrie deformace)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \ \text{ a } \ \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x},\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X},t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x},\tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x},\tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t) \cdot \vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x},\tau) \quad \star$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t: $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X},t)$

Nyní použijeme konstitutivní vztah ve tvaru, který jsme odvodili v předchozí přednášce:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, Geometrie deformace str. 10-11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \ \text{ a } \ \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}}$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau)$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t: $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X}, t)$

Nyní použijeme konstitutivní vztah ve tvaru, který jsme odvodili v předchozí přednášce:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t)$$

Ve zkrácené notaci a pro homogenní materiál:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, Geometrie deformace str. 10-11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \;\text{ a }\; \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t)\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t)\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) \quad \star$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t: $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X},t)$

Nyní použijeme konstitutivní vztah ve tvaru, který jsme odvodili v předchozí přednášce:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Ve zkrácené notaci a pro homogenní materiál:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau)\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Po dosazení $\star$

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\sqrt{\mathbf{C}}, T(\vec{x},\tau), \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau)\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, Geometrie deformace str. 10-11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t)\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X},\tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X},t)\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) = \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau) \quad \star$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t: $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X},t)$

Nyní použijeme konstitutivní vztah ve tvaru, který jsme odvodili v předchozí přednášce:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Ve zkrácené notaci a pro homogenní materiál:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau)\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Po dosazení $\star$

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}\cdot\sqrt{\mathbf{C}}, T(\vec{x},\tau), \sqrt{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau)\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

což můžeme alternativně vyjádřit také jako

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}, T(\vec{x},\tau), \mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

byl izotropní:

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^\mathbf{T}$$

byl izotropní:

$$\mathbf{Q} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{Q}^\mathbf{T} =$$

$$= \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T\right]$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^\mathbf{T}$$

byl izotropní:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{Q}^\mathbf{T} =$$

$$= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t} \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T\right]$$

Neboť $\vec{X}$ a t jsou v relativním popisu fixovány, můžeme zvolit $\mathbf{Q}(\vec{X}) = \mathbf{R}(\vec{X}, t)$.

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^\mathbf{T}$$

byl izotropní:

$$\mathbf{Q} \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{Q}^\mathbf{T} =$$

$$= \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T\right]$$

Neboť $\vec{X}$ a t jsou v relativním popisu fixovány, můžeme zvolit $\mathbf{Q}(\vec{X}) = \mathbf{R}(\vec{X}, t)$.

$$\mathbf{R} \cdot \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^\mathbf{T} =$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

byl izotropní:

$$\mathbf{Q} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{Q}^{\mathbf{T}} =$$

$$= \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T\right]$$

Neboť $\vec{X}$ a t jsou v relativním popisu fixovány, můžeme zvolit $\mathbf{Q}(\vec{X}) = \mathbf{R}(\vec{X}, t)$.

$$\mathbf{R} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}\right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} =$$

$$= \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T\right]$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\mathbf{R}\cdot \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}, T(\vec{x},\tau), \mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{R}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^T\right]$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\underbrace{\mathbf{R}\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}, T(\vec{x},\tau), \mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}}_{\mathbf{t}(\vec{X},t)} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{R}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^T\right]$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\underbrace{\mathbf{R}\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}, T(\vec{x},\tau), \mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}}_{\mathbf{t}(\vec{X},t)} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \underbrace{\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^T}_{\substack{\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^T \\ =\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}=\mathbf{b}}}\right]$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\underbrace{\mathbf{R}\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}, T(\vec{x},\tau), \mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}}_{\mathbf{t}(\vec{X},t)} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \underbrace{\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^T}_{\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{b}}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b}\right]}$$

konstitutivní rovnice pro jednoduché homogenní izotropní materiály v relativním popisu

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\underbrace{\mathbf{R}\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)\cdot\mathbf{R}, T(\vec{x},\tau), \mathbf{R}^T\cdot\vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{C}\right]\cdot\mathbf{R^T}}_{\mathbf{t}(\vec{X},t)} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \underbrace{\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}^T}_{\substack{\mathbf{R}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}^T \\ =\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}=\mathrm{b}}}\right]$$

⇩

$$\boxed{\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b}\right]}$$

konstitutivní rovnice pro jednoduché homogenní izotropní materiály v relativním popisu

Zbývá ukázat, že konstitutivní rovnice je invariantní vůči libovolné ortogonální transformaci referenční konfigurace, a nikoliv pouze pro $\mathbf{Q}(\vec{X}) = \mathbf{R}(\vec{X},t)$. Důkaz je triviální, neboť $\mathbf{c}_t$ nezávisí na referenční konfiguraci a pro Fingerův deformační tenzor máme

$$\hat{\mathrm{b}} = \hat{\mathrm{F}}\cdot\hat{\mathrm{F}}^T = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T)\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T)\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}^T) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T = \mathrm{b}$$

kde jsme použili $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{Q}$ (viz str. 2).

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b} \right] = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \right]$$

$$= \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{F}^T \right] \quad \star$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b}] = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T\right]$$

$$= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{F}^T\right] \quad \star$$

Zvolme specifickou unimodulární transformaci

$$\mathbf{H} = (\det \mathbf{F})^{1/3}\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b}\right] = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T\right]$$

$$= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{F}^T\right] \quad \star$$

Zvolme specifickou unimodulární transformaci

$$\mathbf{H} = (\det \mathbf{F})^{1/3}\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}$$

kde jsme použili zákon zachování hmoty ve tvaru $\rho_0 = \rho J = \rho \det \mathbf{F}$.

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{b} \right] = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \right]$$

$$= \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{F}^T \right] \quad \star$$

Zvolme specifickou unimodulární transformaci

$$\mathbf{H} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \mathbf{F}^{-1}$$

kde jsme použili zákon zachování hmoty ve tvaru $\rho_0 = \rho J = \rho \det \mathbf{F}$.

Snadno se přesvědčíme o tom, že zvolená transformace je skutečně unimodulární:

$$\det \mathbf{H} = \left[(\det \mathbf{F})^{1/3} \right]^3 \det \mathbf{F}^{-1} = 1$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b}\right] = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T\right]$$

$$= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{F}^T\right] \quad \star$$

Zvolme specifickou unimodulární transformaci

$$\mathbf{H} = (\det \mathbf{F})^{1/3}\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}$$

kde jsme použili zákon zachování hmoty ve tvaru $\rho_0 = \rho J = \rho \det \mathbf{F}$.

Snadno se přesvědčíme o tom, že zvolená transformace je skutečně unimodulární:

$$\det \mathbf{H} = \left[(\det \mathbf{F})^{1/3}\right]^3 \det \mathbf{F}^{-1} = 1$$

Nyní můžeme spočítat výraz v $\star$:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{F}^T = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{b} \right] = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T \right]$$

$$= \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{F}^T \right] \quad \star$$

Zvolme specifickou unimodulární transformaci

$$\mathbf{H} = (\det \mathbf{F})^{1/3}\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}$$

kde jsme použili zákon zachování hmoty ve tvaru $\rho_0 = \rho J = \rho \det \mathbf{F}$.

Snadno se přesvědčíme o tom, že zvolená transformace je skutečně unimodulární:

$$\det \mathbf{H} = \left[(\det \mathbf{F})^{1/3} \right]^3 \det \mathbf{F}^{-1} = 1$$

Nyní můžeme spočítat výraz v $\star$:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{F}^T = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I}$$

Odtud:

$$\boxed{\mathbf{t} = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{c}_t(\vec{x},\tau), T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \rho \right]}$$

konstitutivní rovnice pro jednoduché tekutiny v relativním popisu

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X},\tau) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X},\tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \overset{(n)}{h}(\vec{X},t)(\tau - t)^n$$

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X},\tau) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X},\tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \overset{(n)}{h}(\vec{X},t)(\tau - t)^n$$

Materiálový vztah ve tvaru *funkcionálu*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau) \right]$$

pak může být vyjádřen ve tvaru *funkce*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \ldots, \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, \ldots, \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, \ldots, \overset{(N)}{\vec{G}} \right)$$

$\longleftarrow$ materiál rychlostního typu stupně N

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X},\tau) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X},\tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \overset{(n)}{h}(\vec{X},t)(\tau - t)^n$$

Materiálový vztah ve tvaru *funkcionálu*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau) \right]$$

pak může být vyjádřen ve tvaru *funkce*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, ..., \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, ..., \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, ..., \overset{(N)}{\vec{G}} \right)$$

$\longleftarrow$ materiál rychlostního typu stupně N

Pro homogenní izotropní tekutinu v referenční popisu pak *funkcionál* $\mathbf{t} = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} [\mathbf{c}_t, T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \rho]$ přejde ve *funkci*

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, ..., \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, ..., \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho \right)$$

kde

$$\mathbf{a}_n(\vec{x},t) = \left(\frac{\partial^n \mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} .$$

Nultý člen lze vynechat, neboť $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{I}$ (viz str. 4).

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$ ← funkce relativního pohybu

$$\boxed{\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\mathrm{grad}\, \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}}$$ ← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)}$$

$$\tau = t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \Big(\mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \underbrace{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau)\Big) \cdot \Big(\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau)}_{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) =: \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau)} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)\Big)$$

← relativní Greenův deformační tenzor

$$\boxed{\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)}$$

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X},\tau) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X},\tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \overset{(n)}{h} (\vec{X},t)(\tau - t)^n$$

Materiálový vztah ve tvaru *funkcionálu*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau) \right]$$

pak může být vyjádřen ve tvaru *funkce*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, ..., \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, ..., \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, ..., \overset{(N)}{\vec{G}} \right)$$

materiál rychlostního typu stupně N

Pro homogenní izotropní tekutinu v referenční popisu pak *funkcionál* $\mathbf{t} = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}} [\mathbf{c}_t, T(\vec{x},\tau), \vec{g}_t(\vec{x},\tau), \rho]$ přejde ve *funkci*

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, ..., \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, ..., \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho \right)$$

kde

$$\mathbf{a}_n(\vec{x},t) = \left(\frac{\partial^n \mathbf{c}_t(\vec{x},\tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} .$$

Nultý člen lze vynechat, neboť $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{I}$ (viz str. 4).

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$.

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech.

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \operatorname{tr} \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} \mathbf{S})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{S}^2\right], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v}$$

viz Cayley-Hamiltonova věta

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \operatorname{tr}\mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{S})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{S}^2\right], \quad III_S = \det\mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v}$$

viz Cayley-Hamiltonova věta

Izotropní skalární funkce může být tedy reprezentována ve tvaru

$$\boxed{a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})}$$

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \operatorname{tr} \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} \mathbf{S})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{S}^2\right], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v}$$

viz Cayley-Hamiltonova věta

Izotropní skalární funkce může být tedy reprezentována ve tvaru

$$\boxed{a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})}$$

Izotropní vektorové a symetrické tenzorové funkce $\vec{b}$, $\mathbf{T}$ jsou definovány předpisem

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{b}(\vec{v}, \mathbf{S}) = \vec{b}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T), \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \operatorname{tr} \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr} \mathbf{S})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 \right], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v}$$

viz Cayley-Hamiltonova věta

Izotropní skalární funkce může být tedy reprezentována ve tvaru

$$\boxed{a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})}$$

Izotropní vektorové a symetrické tenzorové funkce $\vec{b}$, $\mathbf{T}$ jsou definovány předpisem

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{b}(\vec{v}, \mathbf{S}) = \vec{b}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T), \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

a mohou být reprezentovány (bez odvození) následovně:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{b} = a_0 \vec{v} + a_1 \mathbf{S} \cdot \vec{v} + a_2 \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \\ &\mathbf{T} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{S} + a_2 \mathbf{S}^2 + a_3 \vec{v} \otimes \vec{v} + a_4 \operatorname{sym} (\mathbf{S} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}) + a_5 (\mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}), \end{aligned}}$$

kde

$$a_i = a_i(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \operatorname{sym} \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor
(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor
(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity
Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně souřadné soustavy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}\,,\ \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-\mathbf{1}} \quad \text{(viz polární rozklad)}$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor
(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity
Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně souřadné soustavy:

$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,,$ kde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}\,,\; \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-\mathbf{1}}$ (viz polární rozklad)

2. Uplatníme požadavek izotropie
Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkci pak musí platit

$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \left(a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{C} + a_2\mathbf{C}^2\right) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,,$ kde a_0, a_1, a_2 jsou funkce invariantů $I_C, II_C, III_C,$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor
(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity
Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně souřadné soustavy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}\,,\ \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1} \quad \text{(viz polární rozklad)}$$

2. Uplatníme požadavek izotropie
Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkci pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \left(a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{C} + a_2\mathbf{C}^2\right) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \quad \text{jsou funkce invariantů} \quad I_C, II_C, III_C,$$

což lze dále upravit do tvaru (viz úplně dole):

$$\boxed{\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{b}^2\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \quad \text{a} \quad a_i = a_i(I_b, II_b, III_b)}$$

Obecný reologický vztah pro izotropní elastický materiál

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V}^{\mathbf{2}} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \mathbf{b}^{\mathbf{2}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Tenzory $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ mají stejné invarianty, neboť tenzory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ mají stejná vlastní čísla.

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor
(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity
Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně souřadné soustavy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}\,,\ \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-\mathbf{1}} \quad \text{(viz polární rozklad)}$$

2. Uplatníme požadavek izotropie
Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkci pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \left(a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2\right) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \quad \text{jsou funkce invariantů} \quad I_C, II_C, III_C,$$

což lze dále upravit do tvaru (viz úplně dole):

$$\boxed{\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \quad \text{a} \quad a_i = a_i(I_b, II_b, III_b)}$$

Obecný reologický vztah pro izotropní elastický materiál

<u>Odvození v Lagrangeově tvaru</u>

1. Použijeme tvar konstitutivní rovnice pro P-K2 splňující podmínku objektivity: $\mathbf{T}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C})$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V}^{\mathbf{2}} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \mathbf{b}^{\mathbf{2}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Tenzory $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ mají stejné invarianty, neboť tenzory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ mají stejná vlastní čísla.

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor
(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity
Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně souřadné soustavy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}\,,\ \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-\mathbf{1}} \quad \text{(viz polární rozklad)}$$

2. Uplatníme požadavek izotropie
Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkci pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \left(a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2\right) \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \quad \text{jsou funkce invariantů} \quad I_C, II_C, III_C,$$

což lze dále upravit do tvaru (viz úplně dole):

$$\boxed{\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \quad \text{a} \quad a_i = a_i(I_b, II_b, III_b)}$$

Obecný reologický vztah pro izotropní elastický materiál

<u>Odvození v Lagrangeově tvaru</u>

1. Použijeme tvar konstitutivní rovnice pro P-K2 splňující podmínku objektivity: $\mathbf{T}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C})$

2. Uplatníme požadavek izotropie

$$\boxed{\mathbf{T}^{(2)} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2 \quad \text{kde,} \quad a_i = a_i(I_C, II_C, III_C)}$$

Obecný reologický vztah pro izotropní elastický materiál v Lagrangeově tvaru

---

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V}^{\mathbf{2}} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\,, \quad \mathbf{b}^{\mathbf{2}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Tenzory $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ mají stejné invarianty, neboť tenzory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ mají stejná vlastní čísla.

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{b}^2.$

Předpokládejme, že deformace je malá, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}\,,$ kde $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{h}+\mathbf{h}^{\mathbf{T}}\right) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\vec{u}+(\operatorname{grad}\vec{u})^{\mathbf{T}}\right].$

Zanedbáme-li členy vyššího řádu, pak máme

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}\,,\ I_b = 3 + 2\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}}\,,\ II_b = 3 + 4\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}}\,,\ III_b = 1 + 2\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}}\,,$$

a napěťový tenzor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{b}^2 \approx k_0\mathbf{I} + k_1\,(\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{I} + 2k_2\,\tilde{\mathbf{e}}.$$

kde k_i jsou konstanty. Odtud

$$\boxed{\mathbf{t} = \lambda\,(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left[\operatorname{grad}\vec{u}+(\operatorname{grad}\vec{u})^{\mathbf{T}}\right] \quad \longleftarrow \text{Hookův zákon}}$$

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{b}^2.$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T$$

Předpokládejme, že deformace je malá, tj.

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T = (\mathbf{I}+\mathbf{H}^T)\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{H}^T)^T \approx (\mathbf{I}+\mathbf{h}^T)\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{h}^T)^T \approx \mathbf{I}+\mathbf{h}+\mathbf{h}^T = \mathbf{I}+2\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{h}+\mathbf{h}^{\mathbf{T}}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\,\vec{u}+(\mathrm{grad}\,\vec{u})^{\mathbf{T}}\right]$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{I}+2\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I}+4\tilde{\mathbf{e}}$$

$$I_b = \mathrm{tr}\,\mathbf{b} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T) \approx \mathrm{tr}\,(\mathbf{I}+2\tilde{\mathbf{e}}) = 3+2\,\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}}$$

$$II_b = 3+4\,\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}}\,,\;\; III_b = 1+2\,\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{b}+a_2\mathbf{b}^2 \approx (C_1+C_2\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{I}+(C_3+C_4\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}})(\mathbf{I}+2\tilde{\mathbf{e}})+(C_5+C_6\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}})(\mathbf{I}+4\tilde{\mathbf{e}}) =$$

$$= k_0\mathbf{I}+k_1\,(\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{I}+2k_2\,\tilde{\mathbf{e}}.$$

$$\boxed{\mathbf{t} = \lambda\,(\mathrm{div}\,\vec{u})\mathbf{I}+\mu\left[\mathrm{grad}\,\vec{u}+(\mathrm{grad}\,\vec{u})^{\mathbf{T}}\right] \;\longleftarrow\; \text{Hookův zákon}}$$

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{b}^2.$

Předpokládejme, že deformace je malá, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}\,,$ kde $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{h}+\mathbf{h}^{\mathbf{T}}\right) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^{\mathbf{T}}\right].$

Zanedbáme-li členy vyššího řádu, pak máme

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}\,,\ I_b = 3 + 2\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}}\,,\ II_b = 3 + 4\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}}\,,\ III_b = 1 + 2\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}}\,,$$

a napěťový tenzor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{b} + a_2\mathbf{b}^2 \approx k_0\mathbf{I} + k_1(\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{I} + 2k_2\,\tilde{\mathbf{e}}.$$

kde k_i jsou konstanty. Odtud

$$\boxed{\mathbf{t} = \lambda(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left[\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^{\mathbf{T}}\right] \quad \leftarrow \text{Hookův zákon}}$$

Příklad: Viskózní kapalina

Použijeme konstitutivní vztah pro izotropní tekutinu s omezenou pamětí v relativním popisu

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}}\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, \ldots, \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, \ldots, \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho\right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{a}_1, \rho)$$

Použijeme izotropní reprezentaci a všimneme si, že

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{c}_t}{\partial \tau}\right)_{\tau=t} = 2\mathbf{d}$$

takže

$$\boxed{\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{viskozita}}}{2a_1}\mathbf{d} + a_2\mathbf{d}^2, \quad \text{kde} \quad a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{nenewtonovská (Stokesova) kapalina}}$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$.
Tyto kapaliny se označují jako newtonovské.

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako newtonovské.

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + 2a_1\mathbf{d} + a_2\mathbf{d}^2, \quad \text{kde} \quad a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \longleftarrow \text{obecná kapalina}$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako newtonovské.

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + 2a_1\mathbf{d} + a_2\mathbf{d}^2, \quad \text{kde} \quad a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d)$$ ← obecná kapalina

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d}, \qquad a_1 = \eta(\rho), \qquad a_2 = 0$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako newtonovské.

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2 a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde} \quad a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \longleftarrow \text{obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d}, \qquad a_1 = \eta(\rho), \qquad a_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{t} = \xi(\rho)\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{d})\mathbf{I} + 2\eta(\rho)\mathbf{d} = \xi(\rho)\,(\mathrm{div}\,\vec{v})\mathbf{I} + \eta(\rho)\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right]$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako newtonovské.

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + 2a_1\mathbf{d} + a_2\mathbf{d}^2, \quad \text{kde} \quad a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \longleftarrow \text{obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d}, \qquad a_1 = \eta(\rho), \qquad a_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{t} = \xi(\rho)\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{d})\mathbf{I} + 2\eta(\rho)\mathbf{d} = \xi(\rho)\,(\mathrm{div}\,\vec{v})\mathbf{I} + \eta(\rho)\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right]$$

Předpokládejme, že kapalina je nestlačitelná $(\mathrm{div}\,\vec{v} = 0)$ a uplatněme kinematickou podmínku :

$$\boxed{\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\eta\,\mathbf{d} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right] \longleftarrow \text{newtonovská nestlačitelná kapalina}}$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako newtonovské.

$$\mathbf{t} = a_0\mathbf{I} + 2a_1\mathbf{d} + a_2\mathbf{d}^2, \quad \text{kde} \quad a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \longleftarrow \text{ obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d}, \qquad a_1 = \eta(\rho), \qquad a_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{t} = \xi(\rho)\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{d})\mathbf{I} + 2\eta(\rho)\mathbf{d} = \xi(\rho)\,(\mathrm{div}\,\vec{v})\mathbf{I} + \eta(\rho)\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right]$$

Předpokládejme, že kapalina je nestlačitelná $(\mathrm{div}\,\vec{v} = 0)$ a uplatněme kinematickou podmínku :

$$\boxed{\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\eta\,\mathbf{d} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right] \quad \longleftarrow \text{ newtonovská nestlačitelná kapalina}}$$

Analogicky můžeme odvodit vztahy pro další izotropní materiály, např.:

Kelvin-Voigtovo viskoelastické těleso: $\mathbf{T}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}})$

Maxwellovo viskoelastické těleso: $\dot{\mathbf{T}}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{C})$