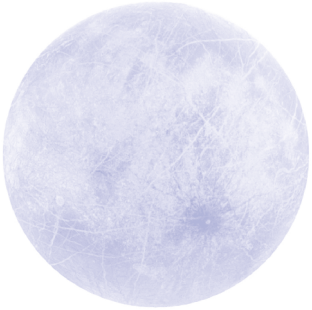


Ledovce na Zemi a ve Sluneční soustavě

Matematické modelování termomechanických dějů v ledu

Ondřej Souček[1], Marie Běhounková[2], Klára Kalousová[2]

[a] Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Sokolovská 49/83, 180 00 Praha 8; ondrej.soucek@mff .cuni.cz.
[b] Katedra geofyziky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, V Holešovičkách 747/2, 180 00 Praha 8

Úvod

Přírodní útvary tvořené vodním ledem hrají důležitou roli v řadě pozemských geologických procesů. Kupříkladu pevninské ledovce zásadním způsobem ovlivňují vývoj klimatu a dominují změnám výšky hladiny světových oceánů. Led se však nevyskytuje pouze na Zemi – nachází se také na dalších tělesech Sluneční soustavy, například na Marsu. Některé měsíce velkých planet, např. Jupiterova Europa či Saturnův Enceladus, mají dokonce svou vlastní hydrosféru, kde několik desítek kilometrů mocná ledová vrstva tvoří jejich vnější obal. Tektonické útvary pozorované na povrchu těchto těles odrážejí vnitřní procesy, které v nich probíhají, a poskytují cenné informace o jejich složení a geologickém vývoji.

Zde si stručně představíme úlohu matematického modelování a numerických simulací fyzikálních procesů probíhajících v pozemských ledovcích a planetárních ledových slupkách měsíců obřích planet ve Sluneční soustavě. Nejdříve popíšeme materiálové vlastnosti ledu a jeho chování na různých časových škálách (reologii ledu) a následně se zaměříme na tři vybrané podtřídy geofyzikálních úloh:

- tečení pevninských ledovců – úloha vzniku a vývoje pozemských či planetárních ledových pokrývek, deformujících se viskózním tečením v důsledku vlastní tíže na časových škálách jednotek až stovek tisíců let;
- slapová deformace planetárních slupek – periodická elastická či viskoelastická deformace ledových slupek v nitrech měsíců obřích planet ve Sluneční soustavě, vyvolaná slapovým působením mateřských planet na časové škále dní;
- tání a transport taveniny v planetárních slupkách – proces porézního tečení, zahrnující mechanické provázání viskózní deformace ledové matrice a darcyovského proudění taveniny, odehrávající se na časových škálách stovek až milionů let.

Ačkoli je společným jmenovatelem všech výše uvedených fyzikálních procesů jeden materiál, vodní led, tyto děje se podstatně liší ve způsobu, jakým v nich led popisujeme. Stejně dramaticky se liší různá zanedbání a zjednodušení obsažená v matematických modelech těchto procesů, která umožňují efektivně hledat jejich numerická řešení.

Při popisu ledovců považujeme led za viskózní nenewtonovskou tekutinu s teplotně a napěťově závislou viskozitou. Při deformaci slapovými silami na kratších, řádově denních periodách se led chová jako elastická či viskoelastická látka. Konečně, při popisu částečného natávání ledové matrice a transportu taveniny již nevystačíme s popisem ledu jako jednoduchého materiálu, ale musíme pracovat s konceptem dvousložkové směsi kapalné vody a pevné ledové matrice, které navzájem mechanicky i termálně interagují.

Jednotícím rámcem, zastřešujícím matematický popis všech výše uvedených procesů, bude v našem případě mechanika a termodynamika kontinua. Stavebními kameny této teorie jsou matematické abstrakce fyzikálních veličin coby hladkých polí, jejichž bodové hodnoty reprezentují reálné vlastnosti materiálu vystředované přes určitý malý reprezentativní objem. Vztahy mezi těmito polními veličinami a jejich vývojem jsou popsány systémy parciálních diferenciálních rovnic, doplněnými o příslušné okrajové a počáteční podmínky. Z fyzikálního pohledu vycházejí tyto rovnice ze zobecnění tradičních bilančních zákonů (či zákonů zachování) pro hmotu, hybnost, moment hybnosti a energii.

V následujícím textu si nejprve stručně představíme některé základní fyzikální vlastnosti ledu, zejména jeho mechanickou odezvu na zatížení, tzv. reologii. V další části se zaměříme na základy matematického modelování deformace pevninských ledovců na velkých prostorových škálách. Následně si přiblížíme nejenom popis slapové deformace planetárních slupek měsíců obřích planet ve Sluneční soustavě, ale i popis procesu vzniku taveniny (kapalné vody) v nitrech těchto slupek a její transport. Každou z aplikací doprovodíme stručnou ukázkou příslušných numerických simulací.

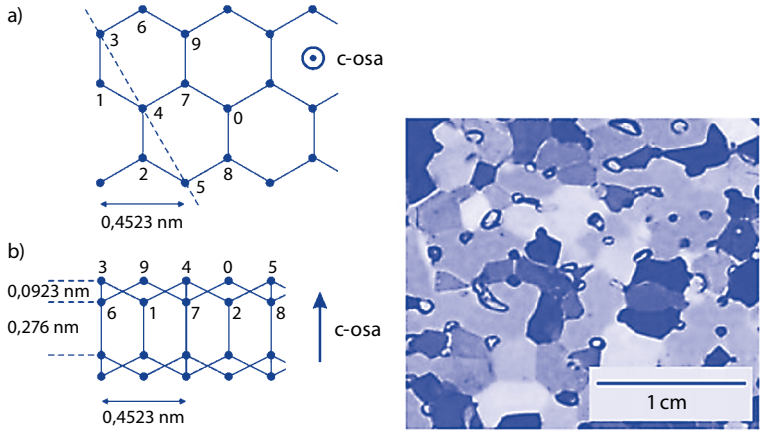
1 Reologie ledu

Led, pevné skupenství vody, byl přímo či nepřímo objeven na většině planet a měsíců ve Sluneční soustavě, což z něj činí jeden z nejvíce rozšířených známých těkavých materiálů. V současné době je známo více než sedmnáct různých krystalických struktur vodního ledu [1] a několik dalších amorfních fází. Pozemská kryosféra, tedy pevná vodní část klimatického systému Země, jakož i vnější slupky tzv. ledových měsíců ve Sluneční soustavě, jsou složeny z nízkotlaké ledové fáze I_h – hexagonálního (šesterečného) ledu.

Monokrystal ledu I_h se skládá z molekul vody uspořádaných do (bi)planárního šestiúhelníkového vzoru, jak je znázorněno na obr. 1 (vlevo). Vrstva se šestiúhelníky tvoří tzv. bazální rovinu a na ni kolmá osa se nazývá optická neboli c-osa. Díky tomuto uspořádání vykazuje krystal ledu I_h šesterečnou (hexagonální) symetrii vzhledem k bazální rovině a díky relativně slabé vazbě mezi sousedními bazálními rovinami i silnou mechanickou anizotropii.

V přírodě se však led vyskytuje především jako polykrystalický materiál, tedy agregát jednotlivých ledových zrn, viz obr. 1 (vpravo). Pokud nejsou zrna uspořádána deformací nebo specifickými podmínkami růstu, je jejich orientace náhodná a výsledný materiál se tedy chová jako izotropní. Z pohledu odezvy na působící mechanické napětí disponují monokrystaly ledu širokou paletou deformačních režimů – od elastického a viskoelastického až po viskózní a plastický. V polykrystalické struktuře se navíc složitost mechanického chování zvyšuje vlivem aktivace dalších deformačních mechanismů spojených s procesy na hranicích zrn nebo s rekrystalizací. I izotropní polykrystalický led tak vykazuje velmi komplexní mechanické chování. Charakteristická křivka tečení (*creep response*) polykrystalického šesterečného ledu I_h v jednoduchém smykovém experimentu je načrtnuta na obr. 2.

Při mechanickém zatížení nastává nejprve okamžitá elastická reakce a dále prochází deformace vzorku několika fázemi. Primární (přechodové) tečení je fáze s klesající rychlostí deformace, kterou připisujeme postupně narůstajícímu množství geometrických nekompatibilit v polykrystalickém vzorku s náhodnou orientací krystalů. Po dosažení minimální rychlosti tečení přechází led do další fáze deformace – tzv. sekundárního (ustáleného) tečení. Tato fáze je charakterizována stacionárním tečením trvajícím až do okamžiku, kdy tepelný nebo napěťový stav materiálu vybudí tzv. dynamickou rekrystalizaci – strukturální změny v polykrystalu, které generují větší množství krystalů s orientací příznivou pro deformaci. Pokud



Obr. 1 Schéma molekulární struktury monokrystalu šesterečného ledu I_h (vlevo) a fotografie polykrystalického ledu z pozemského ledovce mezi polarizačními filtry (vpravo). *Převzato z [2]*

se tento proces aktivuje, rychlost deformace se dále zvyšuje, dokud nedosáhne nového ustáleného stavu (ovšem s větší rychlostí deformace oproti sekundárnímu tečení) – tato fáze se nazývá terciární (nestabilní) tečení. Pojďme si stručně shrnout některé z uvedených mechanických vlastností a popsat základy reologie ledu.

1.1 Elastické vlastnosti I_h ledu

Mechanická odezva monokrystalu ledu I_h je elastická v režimu malých deformací a krátkých časových škál (vysokých frekvencí). Za těchto předpokladů lze led popsat jako obecně anizotropní hookeovskou (elastickou) pevnou látku pomocí tenzoru 4. řádu elastických parametrů C, který popisuje vztah složek tenzoru malých deformací $\boldsymbol{\varepsilon} = ½ (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$ ($\mathbf{u}$ značí posunutí) a Cauchyho tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ rovnicí (s použitím Einsteinovy sumační konvence)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{1a}$$

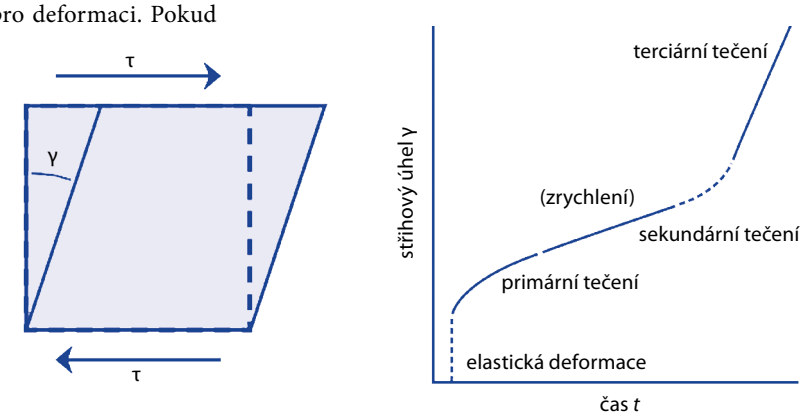
Z 21 nezávislých koeficientů pro obecnou anizotropní pevnou látku je u monokrystalu ledu I_h díky jeho hexagonální symetrii pouze 5 nezávislých. Tenzor elastických parametrů se pak obvykle zapisuje v tzv. Voigtově 6×6 reprezentaci jako

$$\tilde{\sigma}_\alpha = \tilde{C}_{\alpha\beta}\tilde{\varepsilon}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6, \tag{1b}$$

kde

$$(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4, \tilde{\sigma}_5, \tilde{\sigma}_6) = \\ = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}), \tag{1c}$$

$$(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3, \tilde{\varepsilon}_4, \tilde{\varepsilon}_5, \tilde{\varepsilon}_6) = \\ = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}), \tag{1d}$$



Obr. 2 Schematické zobrazení jednoduchého smykového experimentu (vlevo) a odpovídající charakteristická křivka tečení ledu (vpravo). *Převzato z [2]*

> Z pohledu dlouhodobých časových měřítek se polykrystalický led chová jako viskózní kapalina, v kontrastu s běžnou zkušeností s ledem coby pevnou látkou.

a v této reprezentaci platí [3]:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{pmatrix}. \quad (1e)$$

Zprůměrovaná elastická odezva polykrystalických agregátů náhodně orientovaných monokrystalů ledu I_h je však izotropní i přes jejich individuální anizotropii. V důsledku toho charakterizují elastické vlastnosti polykrystalického ledu pouze dva nezávislé elastické parametry, například smykový modul pružnosti μ a druhý Lamého parametr λ, a platí

$$\sigma = (\lambda \mathrm{Tr}\varepsilon)\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon, \quad (2a)$$

kde $\mathbb{I}$ značí identický tenzor a stopa $\mathrm{Tr}\varepsilon = \varepsilon_{kk}$. Alternativně může být tento vztah vyjádřen pomocí Youngova modulu pružnosti E a Poissonova poměru ν

$$\sigma = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{Tr}\varepsilon\mathbb{I} + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon. \quad (2b)$$

Vzájemný vztah těchto dvou párů lze vyjádřit následovně

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad (2c)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2d)$$

Charakteristické hodnoty těchto parametrů, *převzaté z [4]* (při $\vartheta = -16$ °C), jsou uvedeny v tabulce 1.

Experimentálně naměřená teplotní závislost elastických parametrů ledu je relativně mírná a lze ji aproximovat vztahem [4]

$$X(\vartheta) = X_0\left(1 - 1{,}42 \times 10^{-3}(\vartheta[°C] + 16)\right), \quad (3)$$

kde X zastupuje E, λ, μ a X_0 značí referenční hodnoty těchto veličin při $\vartheta = -16$ °C; Poissonův poměr ν se s teplotou výrazně nemění.

1.2 Viskózní deformace ledu

Pokud je led vystaven mechanickému namáhání smykovým napětím, začne se přetvářet a deformovat kombinací vnitřních procesů, které mohou v principu probíhat neomezeně dlouho. Z pohledu dlouhých časových měřítek se tedy polykrystalický led chová jako viskózní kapalina, v kontrastu s běžnou zkušeností s ledem coby krystalickou pevnou látkou. Na úrovni jednotlivých monokrystalických ledových zrn nebo polykrystalických shluků je smyková odezva ledu určena celou řadou deformačních mechanismů. Pojďme si některé z nich představit.

1.2.1 Plastická deformace ledových monokrystalů

Jednotlivé bazální roviny monokrystalického I_h ledu jsou relativně daleko od sebe v porovnání se vzdáleností atomů a molekul v bazální rovině (viz obr. 1b). Při smykovém zatížení proto dochází k vzájemnému prokluzu těchto rovin, a jelikož je jejich vzájemná vazba v krystalické struktuře zdaleka nejslabší, je proces bazálního skluzu dominantním deformačním mechanismem pro monokrystal ledu I_h. Deformace v jiných než bazálních rovinách jsou rovněž možné, avšak výrazně obtížnější, smyková odezva I_h monokrystalů je z toho důvodu tedy obecně anizotropní. Deformace monokrystalu ledu je možná také tvorbou a šířením tzv. dislokací, tj. poruch krystalické struktury, které umožňují deformaci i pro relativně malá aplikovaná napětí procesem tzv. dislokačního tečení. Pro popis v přírodě se vyskytujícího ledu je však důležitější určit chování polykrystalického ledu než studovat chování jednotlivých monokrystalů.

parametr	hodnota	jednotka
Youngův modul pružnosti E	$9{,}33 \times 10^9$	Pa
Poissonův poměr ν	0,325	–
Lamého parametr λ	$6{,}54 \times 10^9$	Pa
smykový modul pružnosti μ	$3{,}52 \times 10^9$	Pa

Tab. 1 Moduly pružnosti pro izotropní polykrystalický led při $\vartheta = -16$ °C.

1.2.2 Tečení polykrystalického ledu

Režim vysokého napětí – dislokační tečení a Glenův zákon

V pozemských ledovcích se led deformuje především sekundárním (ustáleným) tečením a vztah napětí a rychlosti, který se velmi často používá v matematických modelech, je vyjádřen Glenovým zákonem tečení [5]. Tento zákon definuje vztah mezi bezestopou částí $\mathbb{S}$ celkového Cauchyho tenzoru napětí σ a symetrickou částí rychlostního gradientu $\mathbb{D}(\mathbf{v})$ (také bezestopou kvůli předpokládané nestlačitelnosti ledu), tedy

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}, \ \mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\eta}\mathbb{S}, \text{ přičemž } \frac{1}{2\eta} = \\ = \mathcal{A}(p,\vartheta)\mathbb{S}_{II}^{n-1}, \quad (4)$$

kde $n = 3$ a kde p je tlak (střední normální napětí), h je viskozita ledu, $\mathcal{A}$ je rychlostní faktor závislý na tlaku a teplotě ϑ. Symbol $\mathbb{S}_{II}$ označuje druhý invariant $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ je bezestopý tenzor):

$$\mathbb{S}_{II} = \sqrt{\frac{\mathbb{S}:\mathbb{S}}{2}} = \sqrt{\frac{\mathbb{S}_{ij}\mathbb{S}_{ij}}{2}}. \quad (5)$$

Nedávné experimenty (jednoosé zatěžování) při diferenciálních napětích přesahujících 1 MPa (tj. v režimu vysokého mechanického napětí) však naznačují vyšší exponenty, až $n = 4$, spojené s režimem dislokačního tečení (*dislocation creep*). Pro mírně nižší napětí je naopak pozorován přechod k nižšímu exponentu $n = 1{,}8$ a $n = 2, 4$, který je přičítán mechanismu tečení po hranicích zrn (*grain boundary sliding* – GBS) a skluzu v bazálních rovinách zrn (*basal slip* – BS) [6]. Z tohoto pohledu Glenův zákon tečení představuje určitý zprůměrovaný popis viskózní deformace v tomto rozsahu napěťových režimů.

Vztah (4) lze inverzně vyjádřit pomocí

$$\mathbb{S} = 2\eta\mathbb{D}(\mathbf{v}), \text{ kde } \eta = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\vartheta,p)^{-\frac{1}{n}}\mathbb{D}_{II}^{\frac{1-n}{n}}, \quad (6)$$

kde $\mathbb{D}_{II}$ značí druhý invariant $\mathbb{D}(\mathbf{v})$. Všimněme si, že pro $n = 3$ v Glenově zákonu proudění se led v tomto režimu chová jako materiál změkčující se smykem – jeho viskozita η klesá s rostoucí rychlostí deformace. Rychlostní faktor $\mathcal{A}$ v Glenově zákonu je Arrheniova typu (např. [2]):

$$\mathcal{A}(\vartheta,p) = \mathcal{A}_0 e^{-(E+pV)/R\vartheta}, \quad (7)$$

kde E je aktivační energie, V je aktivační objem, R je univerzální plynová konstanta a $\mathcal{A}_0$ je prefaktor. Závislost rychlostního faktoru $\mathcal{A}$ na působícím tlaku p je v zásadě omezena na tlakovou závislost teploty tání

[2]. Zavedením relativní teploty vzhledem k bodu tání $\vartheta' = \vartheta - \vartheta_m(p) + \vartheta_0$, kde $\vartheta_0 = 273{,}15$ K a teplota tání $\vartheta_m(p)$ je dána Clausiovým–Clapeyronovým vztahem $\vartheta_m(p) = \vartheta_0 - \beta p$, kde $\beta = 7{,}42 \times 10^{-8}$ K Pa^{-1} pro čistý led [7], rychlostní faktor lze aproximovat následovně

$$\mathcal{A}(\vartheta') = \tilde{\mathcal{A}}_0 e^{-\frac{\tilde{E}}{R\vartheta'}}. \tag{8}$$

Režim středních a nízkých napětí

Jednoduchý Glenův zákon proudění s $n = 3$ však již s největší pravděpodobností neplatí pro dynamická napětí menší než 0,1–0,2 MPa (např. [8, 9]). Tento rozsah napětí je relevantní nejenom pro viskózně se deformující (prohřáté) části planetárních ledových vrstev [6], ale pravděpodobně také pro některé oblasti velkých polárních ledových příkrovů na Zemi. Dominantním deformačním mechanismem se v tomto napěťovém režimu stává prokluz podél hranic zrn a v jejich bazální rovině prostřednictvím dislokací. Pro tyto mechanismy dochází ke snížení hodnoty exponentu na $n = 1{,}8$ (GBS – *grain boundary sliding*) a pro ještě nižší napětí na $n = 2{,}4$ (BS – *basal slip*). Newtonovské chování, tj. $n = 1$, bylo teoreticky předpovězeno pro velmi nízká napětí ≤75 kPa a je přisuzováno mechanismu tzv. difuzního tečení (*diffusion creep*) [6]. Pro všechny mechanismy v režimu středních a nízkých napětí je navíc deformace závislá nejenom na napětí, ale i na velikosti zrna. Diagram různých deformačních mechanismů založených na napěťovém režimu a jejich srovnání s Glenovým zákonem tečení jsou ilustrovány na obr. 3.

Kompozitní tečení

Čtyři deformační mechanismy polykrystalického ledu I_h – dislokační tečení, klouzání podél hranic zrn, bazální skluz a difuzní tečení se všechny vyznačují obecnou viskozitní závislostí ve tvaru

$$\eta_i = \frac{1}{2}\frac{d^{m_i}}{A_i \mathbb{S}_{II}^{n_i - 1}} exp\left(\frac{E_i + pV_i}{R\vartheta}\right), \tag{9}$$

kde, navíc oproti Glenovu zákonu tečení, je uvažována explicitní závislost viskozity na velikosti zrn d. Exponenty, aktivační energie a objemy se u jednotlivých mechanismů liší, hodnoty těchto parametrů na základě [9] jsou uvedeny v tabulce 2. Poloempirický kompozitní zákon smykového tečení kombinující všechny výše uvedené mechanismy byl navržen v práci [9]. Při vyjádření pomocí efektivní viskozity η_{eff} má tvar

$$\frac{1}{\eta_{eff}} = \frac{1}{\eta_{diff}} + \frac{1}{\eta_{disl}} + \frac{1}{\eta_{bs} + \eta_{gbs}}. \tag{10}$$

Výše uvedená efektivní viskozita vychází z pozorované nezávislosti mechanismů deformace v režimu vysokých (dislokační), středních (prokluz podél hranic zrn a v bazální rovině) a nízkých napětí (difuzní), zatímco prokluz podél hranic zrn a v bazální rovině jsou mechanismy vzájemně závislé. V aplikacích se tento vztah někdy rozšiřuje o výraz $1/\eta_{max}$, který omezuje viskozitu shora hodnotou η_{max}. V planetárních aplikacích je to nutné, aby se zabránilo modelům předpovídat nerealisticky vysoká napětí v horních, velmi studených částech ledových slupek, kde běžně uvažovaná teplotní závislost viskozity předpovídá zcela extrémní hodnoty napětí přesahující mez pevnosti ledu. V těchto oblastech je aktivním mechanismem uvolňování napětí spíše křehká nebo plastická deformace, které nejsou ve výše uvedeném modelu zahrnuty.

Mechanismus	A (Pa^{-n} m^m s^{-1})	n	m	E (kJ mol^{-1})
dislokace ($\vartheta \leq 258$ K)	4,0 10^{-19}	4,0	0,0	60
dislokace ($\vartheta > 258$ K)	6,0 10^{4}	4,0	0,0	180
GBS ($\vartheta \leq 255$ K)	6,2 10^{-14}	1,8	1,4	49
GBS ($\vartheta > 255$ K)	5,6 10^{15}	1,8	1,4	192
BS	2,2 10^{-7}	2,4	0,0	60
difuze	3,3 10^{-10}	1,0	2,0	59

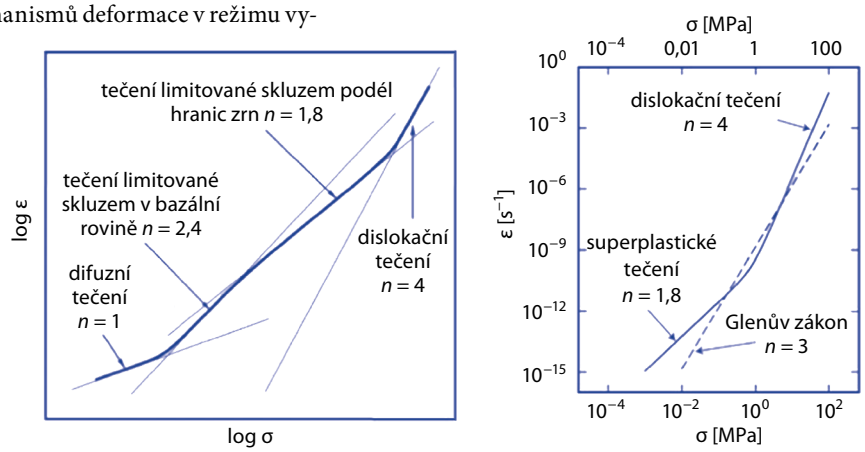
Tab. 2 Hodnoty parametrů různých mechanismů smyku podle [9], aktivační objem pro všechny mechanismy se obvykle bere $V = -13 \times 10^{-6}$ m^3 mol^{-1}.

Někdy je v aplikacích možné uvažovat následující praktické zjednodušení nelineární kompozitní reologie. V tomto případě zafixujeme lokální mechanické napětí a velikosti zrn na určité hodnotě při zachování obecné teplotní závislosti. Zahrnutím ostatních faktorů do referenční, obecně prostorově závislé viskozity η^0_{eff} a pro danou referenční teplotu ϑ_{ref} dostaneme následující zjednodušený vzorec pro viskozitu

$$\eta_{eff} = \eta^0_{eff} \exp\left(\frac{E_i}{R}\left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_{ref}}\right)\right). \tag{11}$$

1.2.3 Vliv velikosti zrna

Z tabulky 2 je zřejmé (exponent $m > 0$), že jak smyk na hranicích zrn, tak difuzní tečení závisí silně na velikosti zrn. Skutečná velikost zrn a její vývoj může proto velmi ovlivnit vlastnosti ledu. Bohužel pro většinu aplikací je tato informace o hrubosti struktury nedostupná. V pozemských ledovcích se velikost zrna obvykle pohybuje mezi 1 a 10 mm, ale kupříkladu na Europě byly teoreticky předpovězeny i mnohem větší velikosti



Obr. 3 Vlevo: schéma režimů tečení pro led I_h. *Převzato z [9]* Vpravo: srovnání Glenova zákona tečení a dislokačního smyku/superplastického toku. *Převzato z [6]*

„Při periodickém mechanickém namáhání ledu v časovém měřítku hodin a dnů není možné popsat led ani jako viskózní, ani jako dokonale elastický.“

zrna (až 80 mm), pokud však k dynamické rekrystalizaci nepřispívá i slapově buzení. V takovém případě by maximální velikost zrna byla pravděpodobně menší [10]. Z fyzikálního hlediska je vývoj velikosti zrn dán dynamickou rovnováhou mezi dvěma konkurenčními procesy – spontánním růstem zrn a jejich zmenšováním – tzv. *dynamickou rekrystalizací*. První proces je termodynamicky řízen redukcí volné energie rozhraní, druhý souvisí s disipací mechanické energie při vzniku a vývoji dislokací (např. [10, 3]). Rovnovážná (tzv. piezometrická) velikost zrna závisí pouze na napětí a lze ji aproximovat jako [10]

$$\frac{d}{b} = D\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{-1,25}, \tag{12}$$

kde b je velikost Burgersova vektoru pro led, D je bezrozměrný parametr (řádu 10^1–10^2), σ je velikost mechanického napětí a μ je elastický smykový modul pružnosti. Výše uvedené hodnoty platí pro čistý H_2O led. Pokud jsou přítomny další nečistoty, jako je prach nebo klatráty, zachycení hranic ledových zrn na tyto nečistoty (*pinning*) dále snižuje maximální velikost zrna [11].

1.2.4 Vliv taveniny

Částečné tání v ledové matrici usnadňuje její viskózní (tvárnou) deformaci. Tavenina vzniká nejprve na hranicích zrn, proto je účinek kapalné fáze primárně spojen s podporou prokluzu podél hranic zrn [3]. Při přiblížení k bodu tání se projeví určité mechanické zeslabení a tzv. předtavné efekty v podobě změny odpovídajících aktivačních energií a rychlostních prefaktorů nejen pro prokluz podél hranic zrn, ale i pro dislokační creep (viz tab. 2). Přítomnost taveniny, charakterizovaná objemovým zlomkem ϕ, tak vede k silnému snížení efektivní viskozity [12]. Tento vztah lze pro hodnoty do $\phi \approx 0{,}3$ parametrizovat pomocí [13]

$$\eta_{\mathrm{eff}} = \eta^0_{\mathrm{eff}} \exp(-\gamma\phi), \tag{13}$$

kde $\gamma \simeq 45$, což odpovídá pozorovanému snížení viskozity cca o řád v důsledku 5% zvýšení porozity.

1.2.5 Přechod mezi tažným a křehkým režimem deformace

Při dostatečně vysokých diferenciálních napětích (a často při dostatečně nízkých teplotách), například v oblastech blízkých povrchům slapově zatížených ledových měsíců nebo na povrchu ledovců tekoucích dostatečně rychle nad zvlněnou topografií skalního podloží, tvárné tečení nestačí k přizpůsobení napětí v ledu a spustí se další deformační mechanismus – křehké porušení, tedy vznik a šíření trhlin. Lineární elastická lomová mechanika (LEFM) poskytuje energeticky založená kritéria pro iniciaci a šíření trhlin v závislosti na různých režimech mechanického zatížení (viz např. [14, 3]). I když se zde tímto tématem nebudeme zabývat, zmiňme se pouze o tom, že v planetárních aplikacích, například v ledové kůře Europy, se očekává přechod z křehkého deformačního režimu na tvárný, oddělující horní křehkou a spodní tvárnou část, v hloubce charakterizované podmínkami, za kterých se napětí spojená s tvárným smykem stávají srovnatelnými s mezí pevnosti ledu při dané teplotě (např. [15]).

1.3 Viskoelastická deformace polykrystalického ledu

Při periodickém mechanickém namáhání ledu v časovém měřítku hodin a dnů, ke kterému dochází například v důsledku slapové zátěže buzené na ledových měsících jejich mateřskými planetami, není možné popsat led ani jako viskózní, ani jako dokonale elastický. Tzv. *viskoelastickou deformaci*, charakterizovanou ztrátou perfektní vratné (elastické) odezvy v důsledku změn mikrostruktury ledu, provází disipace mechanické energie. Ta může hrát významnou roli v energetické bilanci měsíců, značně ovlivnit jejich termální vývoj a může být zásadní pro vytváření a udržování vnitřních oceánů (např. [13, 16, 17, 18, 19]). Ztráta perfektní elasticity ledu vystaveného periodickému slapovému zatížení je důsledkem mikrostrukturálních změn v materiálu. To znamená, že deformace není po odlehčení plně vratná, ale obsahuje i jistou nevratnou složku. Experimenty naznačují, že tyto procesy nevratné deformace zahrnují všechny ty, které byly popsány v předchozí části o tvárném viskózním tečení, jako je dislokační tečení nebo prokluz podél hranic zrn [20, 21]. To pak ospravedlňuje použití stejného konceptu viskozity ve dvou velmi odlišných procesech – viskózním tečení v geologickém časovém měřítku a v periodické slapové deformaci na časovém měřítku dnů. Deformace vyvolaná slapovými jevy je však typicky velmi malá ve srovnání s deformací v důsledku viskózního tečení v geologických časových měřítcích, takže deformační režimy, ve kterých tyto mechanismy fungují, se výrazně liší.

V planetárních aplikacích je viskoelastická odezva ledu obvykle omezena na smykovou složku deformace, zatímco objemová složka zůstává ve většině případů elastická. Vzhledem k režimu malé deformace jsou většinou uvažovány lineární modely viskoelasticity a složitosti nelineární viskozity jsou potlačeny nebo parametrizovány. Pro lineární modely lze viskoelasticitu charakterizovat tzv. kompliancí (poddajností) J, svazující historii deviátorické části Cauchyho napětí $\mathbb{S}$ a tenzoru deformace ε^d v čase t [22]:

$$2\varepsilon^d(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\dot{\mathbb{S}}(\tau,.)\,d\tau, \tag{14}$$

nebo ve frekvenční oblasti na frekvenci ω

$$2\widehat{\varepsilon^d}(\omega) = J(\omega)\widehat{\mathbb{S}}(\omega), \text{ kde } \bar{J}(\omega) = \\ = \int_0^{\infty} \dot{J}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{15}$$

kde Fourierovy obrazy ε^d a $\mathbb{S}$ jsou označeny $\widehat{\varepsilon^d}$ a $\widehat{\mathbb{S}}$.

Existuje řada empirických reologií popisující neelastické chování, viz přehledový článek [21]. Pro zkoumání disipace slapové energie v planetárních ledových slupkách jsou nejčastěji používány Maxwellovy a Andradeho modely, jejíž kompliance v časové oblasti splňují

$$J(t-\tau) = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{t-\tau}{\tau_M}\right)H(t-\tau)$$

Maxwellův model

$$J(t-\tau) = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{t-\tau}{\tau_M} + \left(\frac{t-\tau}{\zeta_A\tau_M}\right)^{\alpha}\right)H(t-\tau) \tag{16}$$

Andradeho model

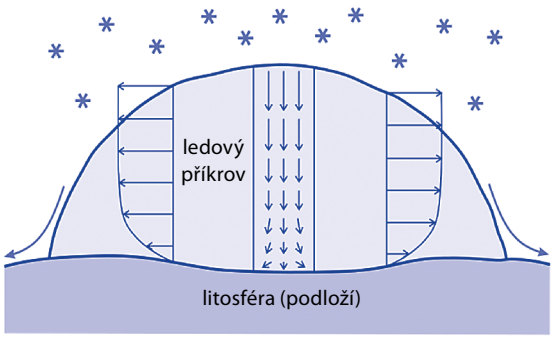
nebo, vyjádřeno ve frekvenční oblasti,

$$\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{i}{\omega\tau_M}\right)$$

Maxwellův model

$$\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{i}{\omega\tau_M} + (i\omega\zeta_A\tau_M)^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\right) \tag{17}$$

Andradeho model



Obr. 4 Náčrt ledové pokrývky podle [2].

Zde τ_M označuje Maxwellův čas definovaný jako $\tau_M = \eta/\mu$, kde η je viskozita, ζ_A a α jsou Andradeho parametry, H je Heavisideova funkce a Γ označuje gama funkci. Maxwellův model je oblíbený pro svou extrémní jednoduchost jak z hlediska numerické implementace, tak i z hlediska frekvenční charakteristiky mechanické disipace – má jediné globální maximum pro frekvenci $\omega = 1/\tau_M$. Maxwellův model tak předpovídá maximum disipativního ohřevu, když se budicí (slapová) perioda rovná Maxwellovu času. Vzhledem k teplotní závislosti viskozity a vlivu zahřívání na vnitřní dynamiku těles může být vývoj slapové odezvy a vnitřní dynamiky těles úzce propojen (např. [13, 16, 23, 24, 25]). Slabinou Maxwellova modelu je, že pravděpodobně podceňuje disipaci pro kratší periody buzení, než je Maxwellův čas. Přesnější parametrizaci poskytuje model Andradeho [26, 27] nebo jeho aproximace Maxwellova typu [28, 25] či rozšířený Burgerserův [21] nebo Sundbergův–Cooperův model [29].

2 Tečení pevninských ledovců

V této kapitole si stručně představíme matematické modelování vývoje ledovců a ledových příkrovů. Základní procesy, které řídí jejich vývoj a dynamiku, jsou v principu relativně jednoduché. Místní klimatické a atmosférické podmínky, především prostorové rozložení a časový vývoj teploty a srážek, vedou v příznivých oblastech a obdobích ke každoroční akumulaci sněhu a ledu, která převyšuje úhrn ročního odtávání a sublimace. To má za následek postupné ukládání sněhu, jeho zhutňování vlastní tíží, postupnou přeměnu sněhu na led a narůstání ledové hmoty – vznik ledovce. Pokud tyto příznivé podmínky přetrvávají dostatečně dlouho, objem ledovce se zvětšuje a postupně narůstající smyková napětí v ledu nakonec spustí proces viskózního tečení. Ledovec se tedy začne deformovat a stékat do nižších poloh, pokud mu v tom nebrání topografie skalního podloží, viz ilustrativní náčrt na obr. 4.

2.1 Matematický model tečení ledovce

V matematických modelech popisujících tečení ledovců a ledových příkrovů na Zemi (případně na jiných planetách, např. na Marsu v jeho dávné minulosti) se na led obvykle nahlíží jako na ne-newtonovskou viskózní tekutinu s viskozitou závislou na rychlosti napětí/deformace, tlaku a teplotě. Matematický model popisující vývoj ledovce je formulován pomocí bilančních rovnic mechaniky kontinua – bilancí hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti a vnitřní energie. Škálovací argumenty založené na identifikaci charakteristických měřítek všech zúčastněných fyzikálních veličin a s tím související bezrozměrné formulace bilančních rovnic umožňují přejít od obecného modelu k jednoduššímu popisu. Tradičně se přijímají předpoklady nestlačitelnosti materiálu a zanedbatelné setrvačné síly. Výsledný systém obsahující bilance má tedy následující podobu tří parciálních diferenciálních rovnic pro rychlost ledu $\mathbf{v}$, tlak p a (absolutní) teplotu ϑ [2]:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{18a}$$

$$0 = -\nabla p + \operatorname{div}\mathbb{S} + \rho_i \mathbf{g}, \tag{18b}$$

$$\rho_i C_v(\vartheta)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\vartheta\right) = \\ = \operatorname{div}(k(\vartheta)\nabla\vartheta) + \mathbb{S}:\mathbb{D}(\mathbf{v}). \tag{18c}$$

Zde g je tíhové zrychlení, ρ_i hustota ledu a C_v a k jsou tepelná kapacita a tepelná vodivost ledu. Mechanická odezva (reologie) ledu je popsána jako závislost (symetrického) tenzoru deviátorického napětí $\mathbb{S}$ na tlaku p, teplotě ϑ a symetrické části gradientu rychlosti

$$\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}).$$

Jak bylo diskutováno v předchozí kapitole, u pevninských ledovců je viskózní tečení obvykle uvažováno v režimu vysokého napětí, což odpovídá dislokačnímu tečení nebo jeho přechodu do superplastického tečení. Parametrizován je na základě empirického vztahu známého jako Glenův zákon proudění [5, 30], který popisuje led jako ne-newtonovskou tekutinu s mocninnou závislostí deformace na napětí

$$\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\vartheta, p)\mathbb{S}_{II}^{n-1}\mathbb{S}. \tag{19a}$$

Přepsáním do standardní (inverzní) podoby s použitím viskozity η, dostáváme

$$\mathbb{S} = 2\eta\mathbb{D}(\mathbf{v}), \text{ pro } \eta = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\vartheta, p)^{-\frac{1}{n}}\mathbb{D}_{II}^{\frac{1-n}{n}}. \tag{19b}$$

Zde $\mathbb{S}_{II}$ a $\mathbb{D}_{II}$ označují (skalární) druhé invarianty obou tenzorů, mocninný exponent pro Glenův zákon tečení je $n = 3$ a rychlostní faktor, $\mathcal{A}(\vartheta, p)$ je dán vztahem (7) nebo (8). Tepelná kapacita ledu v rozmezí pozemských teplot závisí na teplotě lineárně. Tato závislost je poměrně slabá a popsaná empirickým vztahem [31]

$$C_v(\vartheta) = (146{,}3 + 7{,}253\vartheta[\mathrm{K}])\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}. \tag{20a}$$

Teplotní závislost tepelné vodivosti bývá uvažována ve tvaru [31]

$$k(\vartheta) = 9{,}828e^{-0{,}0057\vartheta[\mathrm{K}]}\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}. \tag{20b}$$

Řídící rovnice, získané dosazením reologie (19) a materiálových parametrů (20) do bilančních rovnic (18), je potřeba doprovodit okrajovými podmínkami na všech rozhraních ledovce s okolím. Ty lze velmi obecně formulovat výrazy ve tvaru

$$g_i(\vartheta, p, \mathrm{q}\cdot\boldsymbol{n}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_\tau, \mathbb{S}\boldsymbol{n}) = 0, i = 1, 2, \ldots, \tag{21a}$$

popisujícím vztahy mezi stavovými veličinami ϑ, p, normálovou a tečnou složkou rychlosti $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_\tau$, normálovou složkou tepelného toku $\mathrm{q}\cdot\boldsymbol{n} = -k\nabla\vartheta\cdot\boldsymbol{n}$ a povrchovou silou $\mathbb{S}\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ označující vnější jednotkovou normálu k uvažovanému povrchu). Konkrétní příklad takového souboru okrajových podmínek pro studený (tzv. netemperovaný) pevninský ledovec se dvěma odlišnými rozhraními – horním volným povrchem a spodním rozhraním led–podloží – by byl následující:

- horní povrch ledovce

$$(-p\mathbb{I} + \mathbb{S})\boldsymbol{n} = -p^{\mathrm{atm}}\boldsymbol{n}, \ \vartheta = \vartheta^S, \tag{21b}$$

„Pro vhodné klimatické podmínky vede ukládání sněhu a jeho zhutňování vlastní tíží k postupné přeměně sněhu na led a ke vzniku ledovce.“

„Analyticky vyřešit systém rovnic řídících vývoj ledovců je prakticky nemožné. V důsledku toho hrají numerické simulace v současné glaciologii klíčovou roli.“

specifikující mechanicky volný povrch (vystavený atmosférickému tlaku p^{atm}) a povrchovou teplotu ϑ^s (danou jako funkci polohy a času);

- rozhraní led–podloží

$$\mathrm{q}\cdot\boldsymbol{n} = -q^{\mathrm{geo}},\ \text{pokud}\ \vartheta < \vartheta^{\mathrm{melting}},$$
$$\mathrm{q}\cdot\boldsymbol{n} = -q^{\mathrm{geo}} + \mathbf{v}\cdot\mathbb{S}\boldsymbol{n} + La^b, \qquad (21c)$$
$$\text{pokud}\ \vartheta = \vartheta^{\mathrm{melting}},$$

a

$$\mathbf{v}_n = 0, \mathbf{v}_\tau = 0,\ \text{pokud}\ \vartheta < \vartheta^{\mathrm{melting}},$$
$$\mathbf{v}_n = \frac{a^b}{\rho_i}, \cdot\ \mathbf{v}_\tau = -\alpha(\mathbb{S}\boldsymbol{n})_\tau, \qquad (21d)$$
$$\text{pokud}\ \vartheta = \vartheta^{\mathrm{melting}},$$

Tepelné i mechanické podmínky na bázi ledovce se liší v režimu „přimrzlého“ podloží ($\vartheta < \vartheta^{\mathrm{melting}}$) a režimem „temperovaného“ podloží ($\vartheta = \vartheta^{\mathrm{melting}}$), ve kterém může dojít k tání či namrzání. První podmínka (21c) specifikuje buď spojitost normálního tepelného toku s geotermálním tepelným tokem q^{geo}, nebo dává do souvislosti rychlost tání/namrzání a^b (kladná pro tání) na spodním rozhraní (L značí latentní teplo tání) se skokem normálových tepelných toků a tepelného výkonu třecích sil na kontaktu ledovce a podloží (člen $-\mathbf{v}\cdot\mathbb{S}\boldsymbol{n}$). Druhá podmínka (21d) určuje normálovou a tečnou složku rychlosti ledu na kontaktu s podložím. Normálová složka je nula v přimrzlém režimu, nebo je dána rychlostí tání/namrzání a^b. Tečná složka (21d) je dána skluzovým zákonem v glaciologii často uvažovaném ve formě Weertmanova typu [32, 33], v tomto případě má skluzový koeficient α tvar

$$\alpha = \alpha_0 \frac{|(\sigma\boldsymbol{n})_\tau|^p}{|(\sigma\boldsymbol{n})_n|^q}, \qquad (21e)$$

tj. závisí na p, q, mocninách tečných a normálových sil $(\sigma\boldsymbol{n})_\tau = \sigma\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\sigma\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, $(\sigma\boldsymbol{n})_n = \boldsymbol{n}\cdot\sigma\boldsymbol{n}$.

Doplňme, že výše uvedené platí pro nehybné podloží. Pro velké pevninské ledové příkrovy modelované na dlouhých časových škálách bývá nutné uvážit deformaci podloží buzenou ledovcovou zátěží v procesu tzv. *izostatické relaxace* (viz např. [34, 35]). V tomto případě je třeba ve výše uvedených vzorcích nahradit rychlost na rozhraní relativní rychlostí vůči předepsané (počítané) rychlosti deformace podloží samotného.

Po zavedení počátečních podmínek ve formě počátečního rozložení teploty a počáteční geometrie ledovce, zahrnuje problém termomechanického vývoje ledovce řešení výše uvedeného systému řídících rovnic spolu s kinematickou podmínkou, tj. vývojovou rovnicí pro geometrii ledu. Pokud je geometrie ledu popsána výškovou funkcí f^s (popisující výšku povrchu ledovce nad nějakou pevnou referenční rovinou povrchu), pak je kinematická podmínka (v globálním kartézském souřadnicovém systému) popsána rovnicí

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + \mathbf{v}_x\frac{\partial f^s}{\partial x} + \mathbf{v}_y\frac{\partial f^s}{\partial y} - \mathbf{v}_z = a^s(t,x,y,z). \qquad (22)$$

Zdrojový člen na pravé straně, tzv. povrchová akumulační/ablační funkce a^s, popisuje rychlost přibývání nového ledu v důsledku srážek, nebo naopak rychlost, jakou led na povrchu odtává.

Matematicky má problém podobu systému kvazistatických (bilance hmotnosti a hybnosti) a evolučních (energetická bilance) parciálních diferenciálních rovnic (PDR), řešených ve vyvíjející se geometrii (kinematické podmínky). To činí problém v této plné obecnosti poměrně náročným jak z analytického, tak numerického hlediska, a proto jsou často zaváděna další zjednodušení.

2.2 Aproximace mělkého ledu a její zobecnění

Analyticky vyřešit systém rovnic řídících vývoj ledovců, jak je uvedeno výše, je prakticky nemožné, s výjimkou několika velmi speciálních případů. V důsledku toho hrají numerické simulace v současné glaciologii klíčovou roli. Zajímavé je, že i při možnostech moderních superpočítačů zůstává řešení výše specifikovaného, tzv. plného Stokesova–Fourierova modelu náročné zejména pro dlouhodobé a rozsáhlé simulace ledových příkrovů, jako jsou antarktický nebo grónský. V těchto případech musejí být zavedena další zjednodušení, která umožní snížit výpočetní požadavky a učinit výpočty proveditelnými. Pro pevninské ledovce a ledové příkrovy, tedy ledové masy spočívající na nějakém pevném podloží (na rozdíl od plovoucích ledových mas – tzv. ledových šelfů), je populární a široce používané zjednodušení založeno na formálním asymptotickém rozšíření systému řídících rovnic pomocí malého parametru – poměru ε = H/L, vyjadřujícím „plochost“ ledovce ve smyslu poměru jeho charakteristické tloušťky H a charakteristického laterálního rozměru L. Pro velké ledovce a ledové příkrovy na Zemi má tento parametr typickou hodnotu $\leq 10^{-2}$. Zvláště důležitá je limita nultého řádu tohoto formálního asymptotického rozvoje, tzv. aproximace mělkého ledu (*Shallow Ice Approximation* – SIA), kterou zavedli Hutter [36] a Morland [37]. Vychází z hydrostatické aproximace za předpokladu $\mathbb{S}_{33} \simeq 0$, což umožňuje integrovat vertikální složku bilance hybnosti. SIA dále zavádí následující apriorní škálování složek tenzoru napětí

$$\mathbb{S}_{xy}, \mathbb{S}_{yz} = O(\varepsilon)\rho_i g\mathrm{H},\ \mathbb{S}_{xx}, \mathbb{S}_{yy}, \mathbb{S}_{xy} = \\ = O(\varepsilon^2)\rho_i g\mathrm{H}, \qquad (23)$$

což znamená, že smyková napětí $\mathbb{S}_{xz}$, $\mathbb{S}_{yz}$ dominují v dynamické odezvě ledovce. Zavedením tohoto škálování do řídících rovnic a použitím pouze členů nejvyššího řádu v mocninném rozvoji v ε umožňuje tato sada předpokladů explicitně vyjádřit složky smykového napětí v uzavřeném tvaru

$$\mathbb{S}_{xz} \cong -\rho_i g(f^s - z)\frac{\partial f^s}{\partial x}, \qquad (24a)$$

$$\mathbb{S}_{yz} \cong -\rho_i g(f^s - z)\frac{\partial f^s}{\partial y}, \qquad (24b)$$

tedy úměrné lokálnímu sklonu povrchu. Velkou výhodou SIA aproximace je, že umožňuje získání rychlostního pole na základě (24) integrací odpovídajících tenzorových složek Glenova zákona (reologie) (19). Výsledkem jsou následující formule

$$\mathbf{v}_x(t,x,y,z) = \\ \mathbf{v}_x^b - 2(\rho g)^n|\nabla_h f^s|^{n-1}\frac{\partial f^s}{\partial x}\int_{f^b}^{z}\mathcal{A}(\vartheta')(f^s - z')^n dz', \qquad (25a)$$

$$\mathbf{v}_y(t,x,y,z) = \\ \mathbf{v}_y^b - 2(\rho g)^n|\nabla_h f^s|^{n-1}\frac{\partial f^s}{\partial y}\int_{f^b}^{z}\mathcal{A}(\vartheta')(f^s - z')^n dz', \qquad (25b)$$

kde $\mathbf{v}_x^b$, $\mathbf{v}_y^b$ jsou složky rychlosti na kontaktu s podložím, $n = 3$ je exponent Glenova zákona toku a

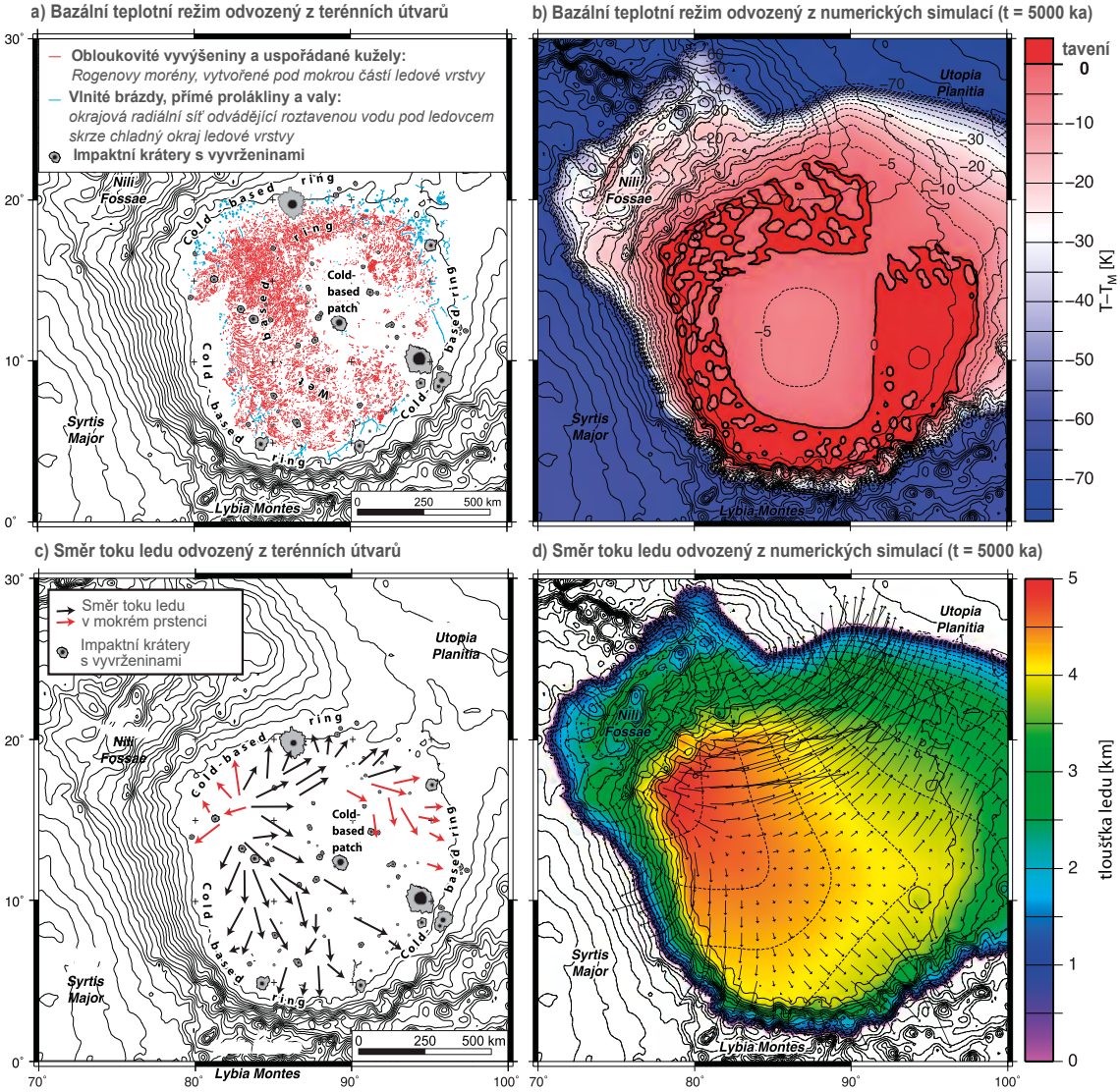
$$\nabla_h f^s = \left(\frac{\partial f^s}{\partial x}, \frac{\partial f^s}{\partial y}\right).$$

Zbývající vertikální složku rychlosti $\mathbf{v}_z$ lze získat integrací bilance hmoty (18a) a z takto získaného kompletního rychlostního pole, všechny zbývající složky napětí lze získat pomocí (19b). Díky tomu je numerická implementace mechanické části SIA problému výpočetně v podstatě triviální – omezená na jednorozměrné (vertikální) integrály. Oproti tomu libovolná jiná numerická diskretizace původního neaproximovaného problému vede typicky k nutnosti řešit veliké systémy lineárních či nelineárních algebraických rovnic. Za pozornost stojí, že evoluční rovnice pro topografii povrchu (22), která je původně hyperbolická, připouští podle předpokladů SIA přeformulování do tvaru

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} - \nabla_h \cdot (\mathcal{K}(|\nabla_h f^s|)\nabla_h f^s) = a^s. \qquad (26)$$

Pokud je při numerické implementaci této rovnice použita explicitní časová diskretizace a nelineární difuzivita $(\mathcal{K}(|\nabla_h f^s|)$, je vyhodnocena ze sklonu povrchu v předchozím časovém kroku, kinematická rovnice se stává efektivně lineární parabolickou. To samozřejmě výrazně zlepšuje numerickou stabilitu numerického řešení vývoje geometrie. Kombinace těchto implementačních výhod a stability vedla k velké oblibě SIA a jejímu častému využívání, zejména při paleosimulacích velkých ledových příkrovů, tj. v simulacích zahrnujících stovky tisíců až miliony let (např. [38, 39, 40, 34, 41, 42, 43]). Platnost aproximace mělkého ledu se bohužel opírá o specifické předpoklady na škálování složek pole napětí (23), které jsou v mnoha důležitých případech v menší či větší míře porušeny (např. [44]).

Je známo, že SIA selhává například při popisu ledových proudů (*ice streams*), rychle se deformujících zón u hranic ledovců, jimiž ústí do moří. Jejich pohyb je totiž výrazně urychlován prokluzem po vodou smáčeném podloží. SIA neplatí ani pro ledové šelfy – plovoucí ledové masy, v jejichž dynamice dominují podélná nesmyková napětí. Nepopisuje ani přechodové zóny mezi pevninskými ledovými příkrovy a ledovými šelfy, které určují dynamiku kotvicí linie (*grounding line*). Tento fenomén je zásadní pro pochopení a předpově-



Obr. 5 Srovnání mezi geomorfologickou rekonstrukcí a numerickou simulací paleoledovce v oblasti Isidis Planitia na Marsu. a) Mapa rozložení současných povrchových útvarů v oblasti Isidis spolu s jejich interpretací na základě termálního režimu podloží předpokládaného paleoledovce (podle [55]). b) Mapa numericky simulovaného teplotního rozložení na kontaktu ledovec–podloží. Tmavě červené jsou oblasti, kde dochází na kontaktu k částečnému natávání ledu, a tedy vzniku kapalné vody. c) Geomorfologická rekonstrukce směru proudění ledovce s orientací útvarů tzv. *Arcuate Ridges a Aligned Cones* (podle [55]). Červeně jsou označena místa nesouladu s numerickým modelem. d) Mapa povrchové topografie a rychlostního pole numericky simulovaného ledovce ve kvazistacionárním stavu. *Převzato z [43]*

„Dávné klimatické podmínky dovolily vytvořit masivní ledový příkrov v kráteru Isidis. Simulované proudění ledu poskytlo podporu pro interpretaci dnes pozorovaných geomorfologických útvarů.“

di destabilizace šelfových ledovců, ke kterým dochází v narůstající míře v důsledku globálních změn klimatu. V neposlední řadě jsou předpoklady SIA problematické u menších ledovců horského typu, u kterých je parametr plochosti ε mnohem větší než u ledových příkrovů a formální asymptotický rozvoj polních veličin a řídících rovnic vzhledem k tomuto parametru přestává dávat dobrý smysl.

Náprava v těchto případech byla hledána pomocí řady různých přístupů. Například zavedením alternativního apriorního škálování složek tenzoru napětí je možné získat model stejného řádu přesnosti jako SIA, avšak popisující dynamiku šelfových ledovců – takzvanou mělkou šelfovou aproximaci (*Shallow Shelf Approximation* – SSA [45, 46]). Dále byly navrženy hybridní modely kombinující SIA se SSA tak, aby zachytily dynamiku pevninských i plovoucích ledovců včetně přechodových oblastí mezi nimi (např. [47]). Tzv. modely vyššího řádu byly navrženy jako další členy formálního asymptotického rozvoje odpovídající SIA (a SSA), příkladem je SIA prvního nebo druhého řádu (FOSIA, SOSIA, např. [36, 48]). Alternativně byla odvozena samostatná třída modelů vyššího řádu přímo z úplného Stokesova problému zanedbáním jistých členů na základě škálování, ale bez použití asymptotického rozvoje. Většina těchto modelů si zachovává komponenty deviatorického napětí, opomíjené v SIA, nejpopulárnější z nich je asi Blatterův–Pattynův model [49, 50]. Systematická hierarchie modelů vyšších řádů je vybudována v [51]. A konečně, s rostoucím výpočetním výkonem moderních počítačů se v poslední době stále více využívají i plné Stokesovy modely (např. [52, 53, 54]).

Ukázka numerického modelu – hypotéza 3 miliardy let starého polytermálního ledového příkrovu v oblasti kráteru Isidis Planitia na Marsu.

Guidat et al. [55] navrhli glaciologickou interpretaci souboru geomorfologických útvarů nacházejících se v oblasti Isidis Planitia – velké rovníkové impaktní pánve na povrchu Marsu. Pro ověření této hypotézy jsme v článku [43] vyvinuli numerický kód pro simulaci podmínek na dávném Marsu před přibližně 3 miliardami let a pro zkoumání zalednění v této oblasti. Myšlenka tohoto dávného zalednění byla založena na dříve publikovaných výsledcích modelu globálního atmosférického proudění na Marsu (GCM [56]). Tento model ukázal, že během období velkého sklonu rotační osy vyskytující se v marsovské historii [57] mohly být podmínky v oblasti Isidis příznivé pro akumulaci ledu, a tedy tvorbu ledovce. Převzetím syntetických dat akumulace a povrchových teplot z GCM a jejich doplněním o model syntetického geotermálního tepelného toku na základě práce Grott and Breuer 2010 [58] naše simulace odhalily, že v kráteru Isidis se v souladu s dávnými klimatickými podmínkami mohl vytvořit masivní ledový příkrov o tloušťce několika kilometrů (obr. 5). Tepelně izolační efekt ledové pokrývky spolu s lokálním minimem geotermálního tepelného toku v důsledku chybějící kůry v oblasti impaktu vedl v našich simulacích k dosažení bodu tání v oblasti prstencového tvaru pod příkrovem ledu. To umožnilo vysvětlit přítomnost vody na podloží v takto netypicky tvarované části ledovcové základny. Společně se simulovaným prouděním ledu poskytl model i podporu pro interpretaci dnes pozorovaných geomorfologických útvarů jako pozůstatků dávné subglaciální hydrologické sítě kanálů a souvisejících glaciálních reliktů.

3 Slapová deformace ledových slupek

V této části se zaměříme na matematické modelování slapově buzené deformace vnějších slupek ledových měsíců ve Sluneční soustavě.

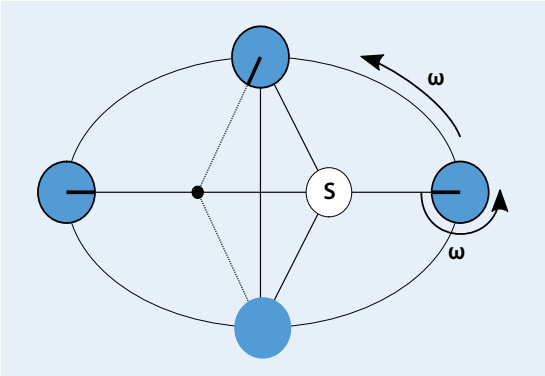
Pro ledovce a ledové příkrovy diskutované v předchozí kapitole studujeme zejména jejich vývoj v důsledku klimatických změn (sněhové srážky, tání) a jejich tečení. Hlavním deformačním mechanismem je viskózní tečení, které postupně relaxuje smyková napětí vzniklá působením gravitace. V ledových vrstvách měsíců, které tvoří například vnější slupku Jupiterova měsíce Europy či Saturnova měsíce Enceladu, může k podobné viskózní či viskoelastické relaxaci docházet také v reakci na další typy vychýlení z hydrostatické rovnováhy. Mezi tyto studované procesy patří odezva ledové slupky např. v důsledku vzniku impaktního kráteru [59] nebo heterogenit tepelného toku na kontaktu s podpovrchovým oceánem a tím vybuzeného tání či namrzání (např. [60, 61]). Na rozdíl od pozemských ledovců dochází v ledových slupkách vzhledem k povaze buzení k viskóznímu tečení typicky na dlouhých časových škálách tisíců až milionů let.

Kromě toho je však řada těchto těles vystavena časově proměnlivému silovému působení mateřských planet na výrazně kratší (orbitální, typicky v řádu dnů či desítek dnů) časové škále v důsledku působení slapových sil. Slapově buzená deformace je mnohdy klíčová jak pro vnitřní vývoj, tak pro vývoj orbitálních parametrů těchto těles a hraje i nezastupitelnou úlohu v otázce určování jejich vnitřní struktury.

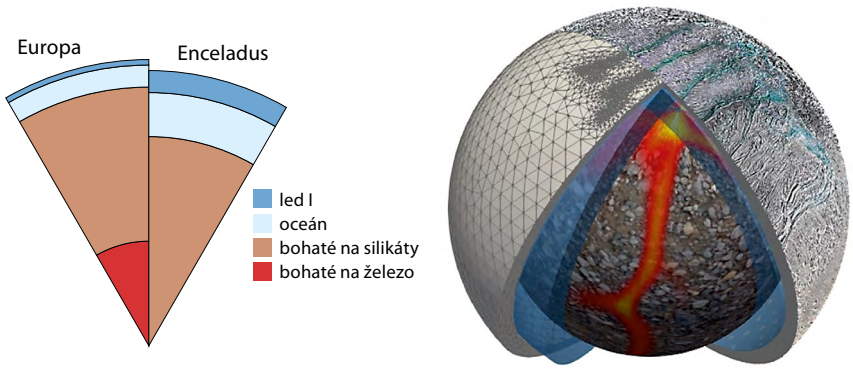
3.1 Slapová deformace ledových měsíců

Ledové měsíce obřích planet ve Sluneční soustavě jsou vystaveny slapovému silovému působení od jejich mateřských těles. Slapové síly jsou výsledkem lokální nerovnováhy mezi gravitací od mateřského tělesa na přivrácené a odvrácené straně měsíců a odstředivou silou oběhovou. Ačkoli jsou oba měsíce uzamčeny v tzv. vázané rotaci (rotační a oběhová perioda jsou si rovny), je toto slapové buzení časově proměnlivé v důsledku nenulové výstřednosti drah měsíců (obr. 7).

Časová perioda tohoto mechanického buzení je v případě Europy přibližně 85 hodin a v případě Ence-



Obr. 7 Schéma znázorňující slapové působení pro tělesa uzamčená v synchronní rotaci (rotační a oběžná perioda jsou si rovny, $\omega = 2\pi/T_{rot} = 2\pi/T_{orb}$). Slapově deformované těleso (modrý kruh) pohybující se po oběžné dráze (elipsa), v jehož ohnisku je umístěno centrální těleso (S). Černá tučná úsečka značí nultý poledník, který v prvním přiblížení směřuje do prázdného ohniska (malý kruh).



Obr. 6 Vlevo: Náčrt současné představy o struktuře Jupiterova měsíce Europy a Saturnova měsíce Enceladu. Vpravo: Vizualizace matematického modelu Enceladu s konečněprvkovou výpočetní sítí, zahuštěnou v okolí „tygřích pruhů" – čtyř významných zlomů v oblasti jižního pólu. *Zdroj NASA/JPL/SSI/USRA/LPI*

ladu necelých 33 hodin. V reakci na krátkoperiodické síly reagují ledové slupky měsíců převážně elastickou (vratnou) deformací, s pouze omezeným vlivem nevratných dějů spojených s viskoelasticitou, plasticitou apod. Tyto nevratné děje mohou způsobit časový posun mezi budící slapovou silou a vzniklou deformací. Významným důsledkem nevratné slapové deformace je disipace části mechanické energie, tzv. slapové zahřívání. Pro Europu i Enceladus je odpovídající slapové zahřívání důležitou složkou jejich energetické bilance a může být zodpovědné za vznik a udržování jejich vnitřních kapalných oceánů. Přítomnost a udržitelnost těchto oceánů je činí velmi atraktivními z astrobiologického pohledu.

Europa i Enceladus jsou diferencovaná tělesa (viz obr. 6 vlevo). Slapová odezva a mechanická disipace jsou tedy závislé na mechanických vlastnostech jednotlivých vrstev. Kupříkladu mechanická disipace v nekonsolidovaném porézním silikátovém jádře Enceladu je zřejmě nejdůležitějším vnitřním zdrojem tepla tohoto malého měsíce [17, 19]. Na Europě může být disipace v silikátovém plášti zodpovědná za udržování vulkanické aktivity až do současnosti [62]. Disipace v podpovrchových vodních oceánech byla též uvažována i numericky modelována [63, 18, 64, 65]. Výsledky numerických modelů však naznačují, že disipace v oceánech hraje v současném stadiu vývoje těchto těles až druhořadou úlohu. Její role by mohla být však zásadní v obdobích, kdy by tloušťka oceánu byla podstatně menší, než je tomu v současnosti (např. v důsledku postupného zamrzání oceánů v průběhu chladnutí měsíců). Jako potenciálně významná je uvažována i role slapové disipace ve vnějších pevných ledových slupkách [13, 23, 24], což podnítilo i náš výzkum a vedlo k řadě numerických studií, které stručně zmíníme níže poté, co si představíme matematickou formulaci těchto modelů.

3.2 Matematický model slapové deformace a zahřívání

Mechanický problém

Mechanická část matematického modelu slapové deformace ledových slupek představuje kvazistatickou rovnováhu mezi silovým zatížením slapovou objemovou silou $\mathrm{f} = -\nabla V^{\mathrm{tidal}}$, reprezentovanou slapovým potenciálem V^{tidal}, a deformací slupky, jež v tělese vybudí přírůstkové mechanické napětí reprezentované přírůstkovým Cauchyho tenzorem napětí σ (přírůstkové vzhledem k referenčnímu typicky hydrostaticky předpjatému stavu). Na rozdíl od ledovců, u nichž dochází vlivem tečení k velkým deformacím, pro planetární slapovou deformaci ledových slupek jsou typické malé deformace, kupříkladu pro Europu v řádech 10^{-5} [13, 66].

To umožňuje zanedbat objemové změny v důsledku slapové deformace a následně neřešit bilanci hmoty. Mechanický problém se tím redukuje na následující úlohu

$$\operatorname{div} \sigma - \rho_i \nabla V = 0, \tag{27}$$

kde ρ_i značí hustotu ledu. Poruchový potenciál je možné rozložit následovně

$$V = V^{\mathrm{tidal}} + \delta V^{\mathrm{tidal}}. \tag{28}$$

První člen představuje slapový potenciál buzený mateřským tělesem (Saturnem či Jupiterem) a druhý člen popisuje tzv. *selfgravitaci* – změnu gravitačního potenciálu měsíce v důsledku jeho vlastní deformace slapy. Slapový potenciál je možné přibližně (do prvního řádu vzhledem k výstřednosti) vyjádřit pro tělesa ve vázané rotaci jako explicitní funkci času t, poloměru r, a měsícopisné košířky θ a délky φ následovně [67]:

$$V^{\mathrm{tidal}} = r^2\omega^2 e \left\{ \tfrac{3}{2} P_0^2(\cos\theta)\cos\omega t - \tfrac{1}{4} P_2^2(\cos\theta) \left[3\cos\omega t \cos 2\phi + 4\sin\omega t \sin 2\phi\right] \right\}, \tag{29}$$

kde ω značí orbitální a rotační úhlovou frekvenci, P_0^2 a P_2^2 jsou přidružené Legendreovy funkce. Pro radiálně symetrické izotropní elastické těleso (často postačující aproximace reálné struktury planetárních slupek) může být efekt selfgravitace parametrizován pomocí tzv. potenciálového Loveova čísla k_ℓ [68]. To dává do vztahu dodatečný, deformací vybuzený gravitační potenciál a budicí slapový potenciál na povrchu tělesa ($r = R$) na daném stupni sférického harmonického rozvoje ℓ

$$\delta V_\ell^{\mathrm{tidal}} = k_\ell V_\ell^{\mathrm{tidal}} \text{ (pro } r = R). \tag{30}$$

Ve výše uvedeném případě slapové síly platí $\ell = 2$. Pro úplnost poznamenejme, že tento vztah je možné zobecnit i na případ lineární viskoelastické reologie, pokud se nahradí reálná Loveova čísla komplexními. Potenciálové Loveovo číslo tedy charakterizuje slapovou odezvu (gravitační efekt) a má význam zejména proto, že představuje měřitelnou veličinu.

Jelikož změny objemové hustoty uvnitř slupek jsou v průběhu jejich deformace zanedbatelné, hlavním budicím zdrojem selfgravitace jsou deformace povrchu a obecně rozhraní mezi vrstvami různých hustot. V tom případě se odpovídající selfgravitační potenciál často hledá pomocí tzv. *Helmertovy kondenzační metody* (např. [69]).

Předpoklad malých deformací umožňuje úlohu formulovat na pevné výpočetní oblasti, kde jsou deformace rozhraní nahrazeny efektivně ekvivalentními okrajovými podmínkami. Pro případ jednoduché homogenní slupky se dvěma rozhraními – horním

„Jelikož k termální konvekci a slapové deformaci dochází na velmi odlišných časových škálách, je zapotřebí tyto procesy oddělit i v numerických modelech a následně je vhodně kombinovat.“

povrchem Γ^{top} a spodním rozhraním mezi slupkou a podpovrchovým oceánem Γ^{bot} – jsou tyto podmínky v linearizovaném tvaru následovné [25]:

$$\sigma \boldsymbol{n} + \mathrm{u}_r \rho_i g \boldsymbol{n} = 0, \text{ na } \Gamma^{top}, \tag{31a}$$

$$\sigma \boldsymbol{n} - \mathrm{u}_r (\rho_w - \rho_i) g \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \rho_w V, \text{ na } \Gamma^{bot}. \tag{31b}$$

Zde $\boldsymbol{n}$ značí vnější jednotkovou normálu k povrchu, ρ_i a ρ_w jsou hustoty ledu a kapalné vody, g je velikost gravitačního zrychlení a u_r je radiální posunutí rozhraní. Členy obsahující u_r, vyjadřují efektivní tíži deformovaného rozhraní, člen na pravé straně ve druhé podmínce reprezentuje přírůstkový tlak z oceánu vybuzený slapy.

Reologie ledu, tedy závislost přírůstkového Cauchyho tenzoru napětí σ na deformaci, může být na slapové časové škále (3,55 a 1,37 dne pro Europu a Enceladus) dobře aproximována modelem elastické izotropní (hookeovské) pevné látky. Přesnější řešení vyžaduje zahrnutí viskoelastických efektů do smykové deformace ledu. Dva nejčastěji používané modely jsou Maxwellův a Andradeho model linearizované viskoelasticity. Reologický vztah lze zapsat ve tvaru

$$\sigma = K \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbb{I} + \mathbb{S}, \tag{32}$$

kde K je objemový modul pružnosti a deviátor přírůstkového napětí $\mathbb{S}$ splňuje Hookeův zákon $\mathbb{S} = 2\mu\varepsilon^d$ v elastickém případě, nebo

$$2\varepsilon^d = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau) \dot{\mathbb{S}}(\tau, \cdot) d\tau \tag{33}$$

v případě viskoelastických modelů. Kompliance jsou dány vztahy (16) nebo (17). V přiblížení malých deformací v těchto modelech uvažujeme často zjednodušený model viskozity typu (11), závislý pouze na teplotě

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{E}{R}\left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta_b}\right)\right), \tag{34}$$

kde E je aktivační energie, R univerzální plynová konstanta, ϑ_b je teplota na rozhraní ledu s oceánem, tj. lokální teplota tání v nitru měsíce. Prefaktor η_0 představuje nejnižší viskozitu daného materiálového modelu ledu a jedná se pro každý měsíc o volný parametr, závisející např. na velikosti ledových zrn. Pro představu, v práci [61] je ukázáno, že hodnoty tohoto parametru menší než 3×10^{14} Pa s by v případě Enceladu byly nekonzistentní s předpokladem, že pozorovaný stav tohoto měsíce je rovnovážný.

Termální problém

Teplotní rozložení uvnitř slupek ledových měsíců, které zásadně ovlivňuje například jejich viskozitu a následně tedy i disipativní ztráty, závisí zásadním způsobem na režimu, v jakém dochází k přenosu tepla v těchto tělesech. Nejdůležitějším kritériem je přitom, zda dochází v těchto planetárních vrstvách k termální konvekci (přenos tepla prouděním), či zda se teplo šíří pouze kondukcí (vedením) tepla. Zatímco přítomnost konvekce je nepravděpodobná v malinkém Enceladu s nízkou gravitací a tenkou slupkou, v o mnoho větší Europě je relativně pravděpodobná přítomnost konvektující vrstvy ledu pod svrchní chladnou konduktivní částí slupky [70].

Tyto dva režimy přenosu tepla se zásadně liší z pohledu složitosti matematických modelů, které si kladou za cíl kombinovat slapovou disipaci s termálním vývojem těles. V čistě konduktivním případě je teplotní profil ve slupkách většinou radiálně závislý. Vyčíslit ho lze buď analyticky, nebo s malými dodatečnými výpočetními nároky numericky řešením jedné skalární PDR. Pro stacionární teplotní profil se slapovým zahříváním h(r, θ, ϕ), řešíme úlohu

$$-\operatorname{div}(k(\vartheta)\nabla\vartheta) = h, \tag{35}$$

kde $k(\vartheta)$ je tepelná vodivost ledu, v planetárních aplikacích je uvažovaná většinou ve tvaru [4]

$$k(\vartheta) = \frac{k_0}{\vartheta}, \quad k_0 = 651 \ \mathrm{Wm}^{-1}. \tag{36}$$

Zdrojový člen na pravé straně h představuje časově zprůměrované (přes slapovou periodu P) disipativní slapové zahřívání

$$h = \frac{1}{P}\int_0^P \mathbb{S} : \mathbb{D}(\mathbf{v}) d\tau. \tag{37}$$

Oproti tomu druhý případ, konvektivní režim, vyžaduje hledat kombinované řešení termomechanických rovnic popisujících proudění na dlouhých časových škálách. To zahrnuje bilance hmoty, hybnosti a energie, často uvažované v tzv. Boussinesqově aproximaci. Jelikož k termální konvekci a slapové deformaci dochází na velmi odlišných časových škálách, je zapotřebí tyto procesy oddělit i v numerických modelech a následně je vhodně kombinovat.

Rovnice termální konvekce v (rozšířené) Boussinesqově aproximaci představují následující problém [71]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{38a}$$

$$0 = -\nabla p + \operatorname{div}\left(2\eta \mathbb{D}(\mathbf{v})\right) - \rho_i \alpha \left(\vartheta - \vartheta_0(r)\right) \mathrm{g}, \tag{38b}$$

$$\rho_0 C_p \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \vartheta\right) = \\ = \operatorname{div}(k(\vartheta)\nabla\vartheta) + 2\eta |\mathbb{D}(\mathbf{v})|^2 + \rho_0 \alpha \vartheta \mathbf{v} \cdot \mathrm{g} + h, \tag{38b}$$

kde $\mathbf{v}$ značí konvektivní rychlost, p dynamický tlak, η viskozitu ledu, α koeficient teplotní roztažnosti, ϑ_0 referenční teplotu, C_p tepelnou kapacitu ledu a slapové zahřívání h je opět určeno (37) na základě výpočtu slapové deformace.

Okrajové podmínky

V obou výše zmíněných případech je zapotřebí specifikovat také okrajové podmínky na obou rozhraních. Na rozhraní ledové slupky a vnitřního oceánu je teplota rovna lokální teplotě tání

$$\vartheta = \vartheta_{\mathrm{melt}} \text{ na } \Gamma^{bot}. \tag{39}$$

V případě konvektující slupky je navíc potřeba uvažovat tzv. *Stefanovu podmínku*, svazující skok normálového tepelného toku na rozhraní s rychlostí tání či namrzání vztahem

$$L\rho_i(\mathbf{v} - v) \cdot \boldsymbol{n} = (\mathrm{q}_i - \mathrm{q}_o) \cdot \boldsymbol{n} \text{ na } \Gamma^{bot}. \tag{40}$$

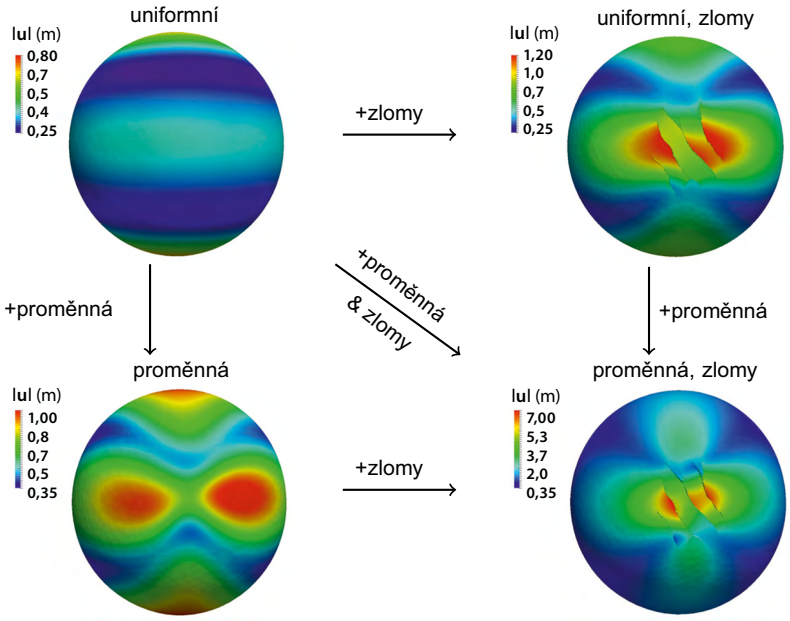
Zde L je latentní teplo tání ledu, ρ_i hustota ledu, $\mathbf{v}$ materiálová rychlost ledu na rozhraní, v rychlost pohybu rozhraní a q_i a q_o jsou tepelné toky v ledu a oceánu. Na svrchním rozhraní je buď přímo předepsaná efektivní povrchová teplota určená dopadajícím zářením

$$\vartheta_{top} \text{ na } \Gamma^{top}. \tag{41}$$

nebo je uvažována radiační podmínka

$$\mathrm{q}_i \cdot \boldsymbol{n} = \varepsilon_r \sigma_r (\vartheta^4 - \vartheta_e^4) \text{ na } \Gamma^{top}. \tag{42}$$

kde ε_r je emisivita, σ_r je Stefanova–Boltzmannova konstanta a ϑ_e je tzv. efektivní (insolační) teplota. Ta je ku-

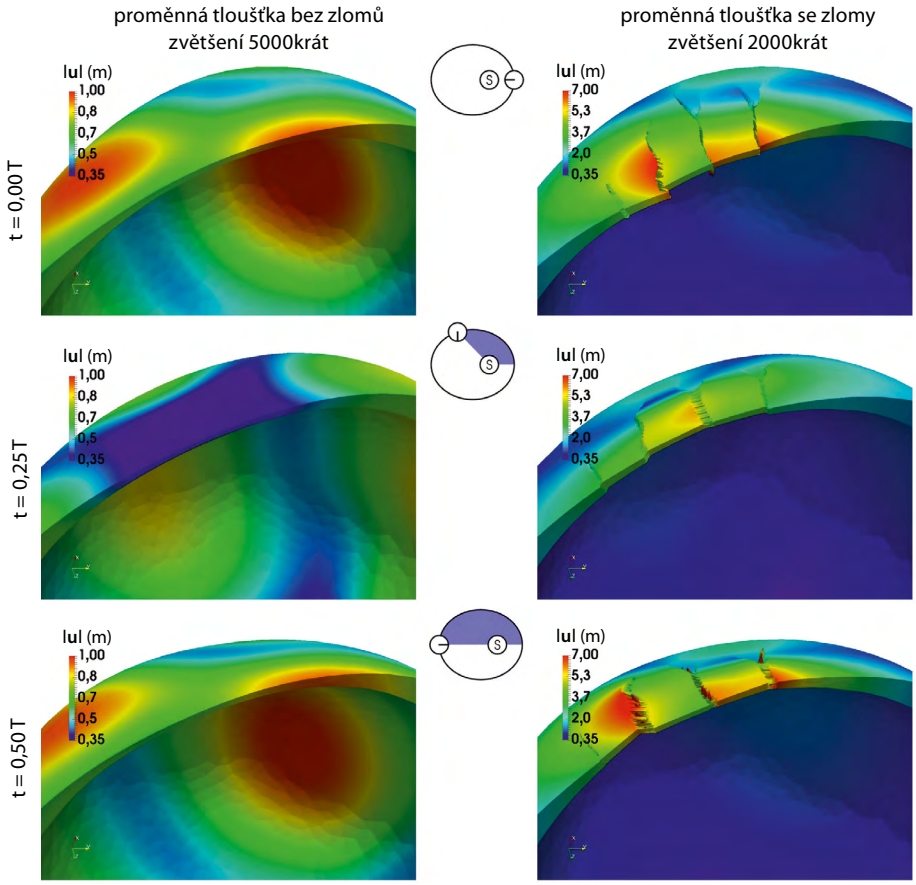


Obr. 8 Závislost deformace ledové slupky Enceladu na ztenčení ledové slupky v pericentru ($t = 0$, vzorec 29), jižní polokoule, ortografická projekce. Barevnou škálou je znázorněna velikost deformace. Vlevo nahoře: model bez zlomů a konstantní tloušťka slupky (25 km), vlevo dole: deformace v případě lokálně ztenčené slupky při zachování průměrné tloušťky, vpravo nahoře: vliv zlomů na deformaci pro model konstantní tloušťky slupky, vpravo dole: zesílení vlivem lokálního ztenčení slupky a přítomnosti zlomů.

příkladu pro Europu cca 100 K a pro Enceladus ještě méně (59 K). Pro mechanickou část problému v případě konvektujících slupek je nejčastěji uvažována tzv. *free--slip podmínka* (např. [71]).

Ukázka numerického modelu – vliv realistického tvaru slupky a přítomnosti zlomů na slapovou deformaci vnější ledové slupky Enceladu

Velikost slapové deformace je určena nejen materiálovými vlastnostmi ledu, ale i mechanickým oddělením ledové slupky od hlubších částí měsíců díky přítomnosti oceánu, tloušťkou ledové vrstvy a jejími variacemi. V sérii článků [72, 73, 25, 74] jsme se zabývali studiem vlivu realistického ztenčení ledové slupky (model tvaru získaný inverzí gravitačních a topografických dat, např. [61]) a přítomnosti systému čtyř paralelních zlomů v jihopolární oblasti Saturnova měsíce Enceladu. Numerické simulace (obr. 8) ukazují, že přítomnost lokálního ztenčení ledové slupky v jihopolární oblasti (obr. 8, vlevo dole) i přítomnost zlomů bez ztenčení slupky (obr. 8, vpravo nahoře) vyústí v mírné lokální zvýšení deformace. Synergický efekt ztenčení a mechanického oslabení zlomy (obr. 8, vpravo dole) vede k zesílení slapové deformace v této oblasti téměř o řád. Deformace tak může dosahovat několika metrů, pokud neuvažujeme tření na zlomech. Pro úplnost připomeňme, že velikost deformace přirozeně závisí na fázi vývoje (obr. 9). V pericentru je radiální posunutí v oblasti pólů negativní, zatímco v apocentru je pozitivní. Tato pravidelná deformace na krátkých časových škálách



Obr. 9 Vývoj deformace ledové slupky v okolí jižního pólu ve třech okamžicích v průběhu jednoho oběhu (zveličené změny tvaru; velikost deformace znázorněna barevnou škálou). Vlevo: model s proměnnou tloušťkou slupky bez zlomů, deformace zvětšena 5000krát. Vpravo: model s proměnnou tloušťkou se zlomy, deformace zvětšena 2000krát. Nahoře: deformace v pericentru, uprostřed: deformace v jedné čtvrtině orbity, dole: deformace v apocentru.

„Klíčová je otázka dlouhodobé stability případných podpovrchových vodních rezervoárů.“

může v případě částečně nevratné deformace vést jak k disipaci energie uvnitř ledové slupky, tak i podél zlomů, pokud je zahrnuto tření [74].

Numerický konečněprvkový model umožňuje odhadnout mechanickou disipaci a tedy slapovou deformací způsobené ohřívání slupky a kvantifikovat tak jeho roli v energetické bilanci Enceladu. Numerické simulace naznačují, že celkový disipativní výkon slupky je maximálně kolem 2 GW v celé slupce [25] a dále maximálně 1 GW podél zlomů, pokud je uvažováno tření podél zlomů [74]. Celkové tepelné ztráty měsíce jsou však řádově větší. Konduktivní ztráty jsou odhadovány na 17–26 GW pro průměrnou tloušťku slupky 30–20 km [75] a ztráty spojené se zlomy v jihopolární oblasti dosahují více než 4 GW [76]. To naznačuje přítomnost hlubších zdrojů tepla v nitru měsíce, bez kterých by vnitřní oceán zamrzl během 100 milionů let [77]. Jednou z navržených hypotéz je kupříkladu teplo generované slapovou deformací porézního a nekonsolidovaného silikátového jádra [19].

4 Tání a transport taveniny v planetárních ledových vrstvách

Nyní stručně zmíníme další důležitý fyzikální proces, který ovlivňuje dynamiku planetárních ledových vrstev, moduluje jejich tepelnou výměnu a usnadňuje prostup volatilních látek – tání ledu/zamrzání vody a pohyb taveniny.

K fázové změně (tání či namrzání) obecně dochází na rozhraní mezi vrstvami ledu a kapalné vody v důsledku lokální nerovnováhy při jejich vzájemné tepelné výměně. Termomechanická vazba mezi fázemi a vývoj jejich vzájemného rozhraní zahrnují řešení tzv. Stefanova problému nebo jeho složitějších zobecnění (viz např. [81]). Uvážení fázové přeměny je důležité, neboť změny tloušťky ledové vrstvy vyvolané táním/namrzáním mohou modulovat viskózní tečení ve velkém měřítku uvnitř těchto vrstev, naopak změny salinity spojené s fázovou změnou mohou ovlivňovat vnitřní dynamiku oceánů (např. [60, 82, 83, 84]).

Voda může vznikat také přímo v nitru ledové vrstvy, například při slapově buzené aktivaci tektonických povrchových zlomů v důsledku třecího ohřevu [85] nebo v nízkoviskózních oblastech (např. stoupajících konvekčních proudech) díky zvýšené slapové disipaci [86, 13]. Proces přípovrchového tavení byl navržen jako možné vysvětlení pro vznik řady geomorfologických útvarů na ledových měsících, jako jsou dvojité hřbety [87] nebo chaotický terén [88] na povrchu Europy. Klíčová je otázka dlouhodobé stability případných podpovrchových vodních rezervoárů, a tedy odhad doby, po kterou by mohly přetrvávat. Existují přitom minimálně dva mechanismy, které je destabilizují a odvádějí vodu hlouběji do nitra měsíců.

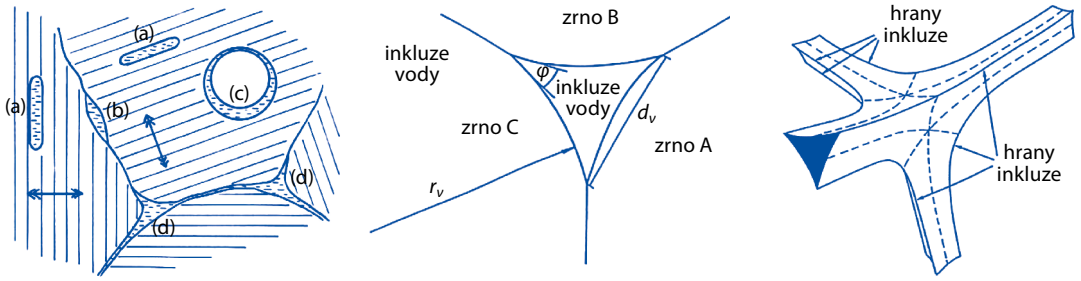
Prvním mechanismem jsou Rayleighovy–Taylorovy nestability, způsobené rozdílem hustoty tající vody relativně vůči okolnímu ledu. Druhý mechanismus souvisí s propustností ledu – jakmile ledová matrice začne tát a objemový zlomek tající vody se zvyšuje, po dosažení jisté mezní hodnoty několika procent se matrice stává permeabilní pro vodu, která je následně odváděna porézním tečením ve směru efektivního tlakového spádu (směrem dolů pro vnější vrstvy ledu I_h).

Podotkněme, že tento druhý mechanismus odvádění tající vody se velmi liší od toho, který známe z pozemských ledovců. Na Zemi je hydraulický systém kanálů a trhlin v ledovci typicky otevřený od povrchu, kde se tavenina primárně tvoří a odkud proniká dolů nejčastěji procesem hydrofrakturace [89]. V případě planetárních ledových vrstev je jejich horní povrch velmi chladný (<100 K pro Europu a 60 K pro Enceladus), takže na povrchu není přítomna žádná kapalná voda. Proto, snad s výjimkou „tygřích pruhů“ Enceladu, jihopolárních zlomů prostupujících pravděpodobně celou slupkou, je většina tající vody v nitru ledových měsíců oddělena od povrchu vrstvou nepropustného kompaktního ledu. V důsledku toho dochází k transportu vody v částečně roztavených oblastech ledových vrstev procesem analogickým spíše transportu silikátové taveniny v zemském plášti (např. [90, 91]). Transport taveniny potom sice vykazuje dynamiku Darcyho typu (viz dále), ale na rozdíl od standardní hydrologie porézních prostředí je přítomna dodatečná mechanická vazba mezi ledovou matricí a taveninou. Extrakce taveniny z matrice musí být totiž doprovázena deformací materiálu matrice vyplňujícího prostor uvolněný vytékající taveninou. S tím spojený tzv. kompakční dynamický tlak vstupuje do pohybové rovnice pro taveninu a vnáší do ní i závislost na vlastnostech ledové matrice, např. její viskozitě.

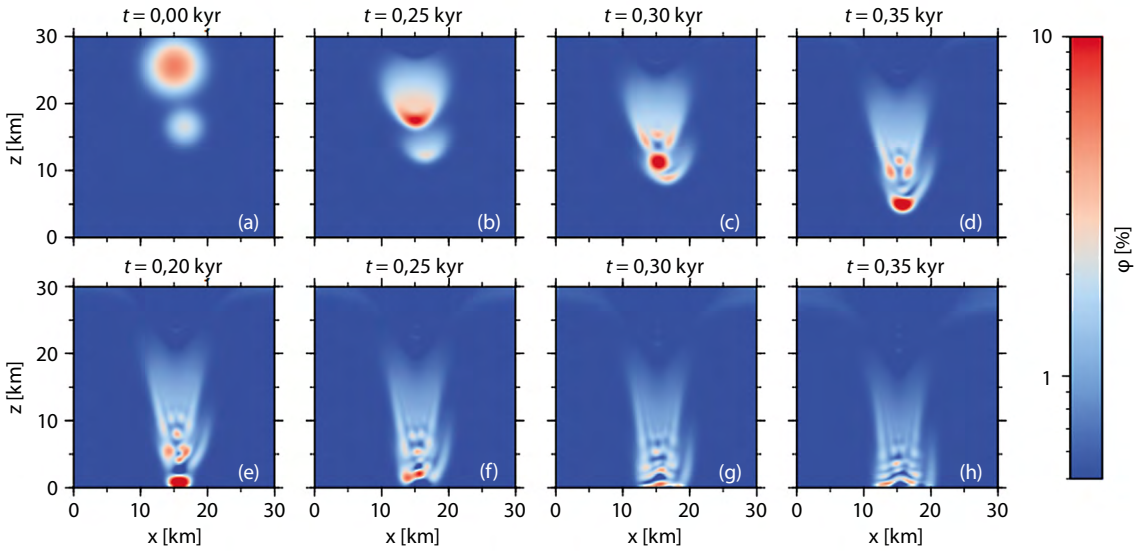
4.1 Matematický model porézního proudění vody v temperovaném ledu

Při popisu transportu tající vody v planetárních ledových vrstvách používáme matematický model proudění kapaliny ve viskózně se deformujícím porézním prostředí (temperovaném ledu, tj. ledu při bodu tání). Systém řídících rovnic obsahuje dvě parciální bilance hmotnosti a dvě parciální bilance hybnosti pro obě skupenství. Protože však obě dvě fáze mají stejnou (lokálně rovnovážnou) teplotu, uvažujeme typicky pouze jednu energetickou bilanci pro směs jako celek.

Systém řídících rovnic lze odvodit ze základních postulátů teorie vícesložkových interagujících kontinuí (teorie směsí, např. [92, 93, 94]). Po redukci modelu pomocí argumentů založených na charakteristickém škálování problému může být systém přeformulován do následující podoby, která se velmi podobá tradič-



Obr. 10 Typy kapalných vodních inkluzí v polykrystalickém ledu: (a) intrakrystalické, (b) dvouzrnné průniky, (c) vzduchové bubliny, (d) třízrnné průnikové inkluze. *Převzato z [78]* Vpravo: Detailní náčrt spojnice tří zrn [79, 80].



Obr. 11 Ukázka dynamiky dvoufázového tečení – transportu porozity – v částečně natavené oblasti vlivem gravitace. Dvě počáteční oblasti zvýšené porozity se postupně zaostřují a vytvářejí vlny porozity. V důsledku větší rychlosti šíření pro vyšší porozitu dojde ke kolizi obou útvarů.

ním dvoufázovým rovnicím pohybu taveniny v silikátech, dobře zavedeným v dynamice zemského pláště [89, 90]:

- Hmotnostní bilance:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \mathbf{v}_f) = \frac{r}{\rho_f}, \tag{43a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_m + \operatorname{div}\Big(\phi(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_m)\Big) = r\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_m}\right). \tag{43b}$$

Zde ϕ označuje porozitu (tj. objemový zlomek tekutiny), $\mathbf{v}_f$ a $\mathbf{v}_m$ označují rychlosti tekutiny a ledové matrice, r označuje rychlost tání/namrzání (pozitivní pro tání) a ρ_f, ρ_m jsou (konstantní) hustoty tekutiny a ledové matrice.

- Bilance hybnosti

$$c(\phi)(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_m) = -\phi\big(\nabla\Pi + (\rho_m - \rho_f)\mathrm{g}\big), \tag{44a}$$

$$\begin{aligned}\nabla\Pi = &-\phi(\rho_m - \rho_f)\mathrm{g} - \nabla\big((1-\phi)\mathcal{P}\big) + \\ &+ \operatorname{div}\Big(2(1-\phi)\eta_m \mathbb{D}^d(\mathbf{v}_f)\Big).\end{aligned} \tag{44b}$$

Zde Π je dynamický tlak (definovaný jako rozdíl mezi skutečným tlakem v ledu a hydrostatickým tlakem), g je gravitační zrychlení, η_m smyková viskozita ledové matrice daná v uvažovaných aplikacích efektivní viskozitou (10) a $\mathcal{P}$ je dynamický kompakční tlak definovaný jako [92]

$$\mathcal{P} = -\frac{\eta_m}{\phi} \operatorname{div} \mathbf{v}_m. \tag{45}$$

Symbol $c(\phi)$ označuje koeficient odporu vztažený k permeabilitě matrice $\kappa(\phi)$ vztahem

$$c(\phi) = \frac{\eta_f \phi^2}{\kappa(\phi)}, \text{ kde typicky } \kappa(\phi) = \kappa_0 \phi^n, \tag{46}$$

s exponentem n typicky mezi 2 a 3 (např. [95]). Někdy se zavádí perkolační mez ϕ_c [96], permeabilita ledové matrice klesne o řády (nebo na nulu) pro $\phi < \phi_c$, zatímco pro $\phi \geq \phi_c$ se řídí mocninným vztahem jako v (46).

- Energetická bilance

$$\begin{aligned}&\phi C_f\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla\vartheta\right) + \\ &+ (1-\phi)C_m\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla\vartheta\right) + Lr = \\ &= \operatorname{div}(k(\phi)\nabla\vartheta) + h + c(\phi)\left|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_m\right|^2 + \\ &+ (1-\phi)\sigma_m : \mathbb{D}^d(\mathbf{v}_m) - (1-\phi)\mathcal{P}\operatorname{div}\mathbf{v}_m.\end{aligned} \tag{47}$$

kde C_f a C_m jsou tepelné kapacity dvou fází, h jsou externí zdroje tepla a $k(\phi)$ je tepelná vodivost dvoufázového porézního média daná implicitním vztahem [97, 89]

$$\frac{\phi}{2 + \frac{k_f}{k}} + \frac{1-\phi}{2 + \frac{k_m}{k}} = \frac{1}{3}, \tag{48}$$

kde k_f a k_m jsou tepelné vodivosti kapalné vody a ledové matrice.

Výše uvedený systém rovnic je poměrně komplikovaný, vyžaduje proto několik komentářů. Nejprve zmiňme, že v limitě mizející taveniny, tj. pro $\phi \to 0+$, a při absenci fázových změn, tj. pro $r = 0$, se výše uvedený systém redukuje na standardní nestlačitelný Stokesův–Fourierův systém pro viskózní ledovou matrici.

Je-li přítomna tavenina, je její transport dán rovnicí Darcyho typu (44a). Tato rovnice představuje mechanickou kvazistatickou rovnováhu mezi odporovou silou způsobenou prouděním (levá strana (44a)) a gradientem dynamického tlaku a gravitační silou (pravá strana (44a)). Transport taveniny a změna fáze mohou vést k objemovým změnám matrice, protože se póry uzavírají nebo otevírají a mění se porozita v závislosti na toku a tání/mrznutí. Tyto dva jevy zachycují hmotnostní bilance (43).

Nenulová divergence rychlosti matice zavádí do obou mechanických rovnic další vazbu prostřednictvím kompakčního tlaku $\mathcal{P}$ v (44b), vyjadřujícího dynamický rozdíl tlaků ve dvou fázích. Tento rozdíl souvisí s kompakcí či extenzí matrice prostřednictvím „singulární“ efektivní objemové viskozity η/ϕ. Prostřednictvím dynamického tlaku Π ovlivňuje kompakční tlak $\mathcal{P}$ zase separaci taveniny v (44a). Energe-

» Zaměřili jsme se na interpretaci dvou typů pozorovaných povrchových geomorfologických útvarů Europy, chaotických terénů a dvojitých hřbetů. «

tická bilance (47) popisuje advektivní transport tepla oběma fázemi (první dva členy na levé straně (47)) a výměnu latentního tepla (poslední člen na levé straně (47)), které jsou vyváženy (v pořadí, ve kterém se objevují na pravé straně (47)): difuzí tepla podle Fourierova zákona, vnějšími zdroji tepla a třemi mechanismy mechanické disipace v důsledku tření mezi proudící taveninou, smykovou deformací matrice a objemovou deformací matrice.

Numerické řešení výše uvedeného systému je z mnoha důvodů netriviální. Například kromě problému Stokesova typu pro deformaci matrice s nelineární viskozitou matrice je třeba řešit hyperbolickou rovnici pro transport porozity. Pole porozity může přitom vykazovat velmi strmé prostorové gradienty, což často vede k numerickým oscilacím řešení. Další výzvou je to, že divergence rychlosti ledové matrice je určena obecně nenulová. Navíc kompakční tlak zahrnuje výraz div v_m/ϕ který je sice regulární i pro $\phi \to 0+$, ale „přepínání" mezi režimem částečně roztaveného a studeného ledu vyžaduje speciální ošetření. V neposlední řadě přítomnost kompakčního tlaku vede ke vzniku tzv. *vln porozity* – dynamických maloškálových vzorů v rozložení porozity (viz např. [98, 99]), jejichž přítomnost nesmírně zvyšuje požadavky na rozlišení jak v prostoru, tak i v čase (obr. 11). Vlnová délka vln porozity souvisí s tzv. *kompakční délkou* danou pomocí

$$\delta = \sqrt{\frac{\kappa(\phi)\left(\zeta_m + \frac{4}{3}\eta_m\right)}{\eta_f}}, \qquad (49)$$

kde $\zeta_m = \eta_m/\phi$ je efektivní objemová viskozita matrice. V praktických aplikacích se výše uvedený systém často dále zjednodušuje mnoha způsoby. Například byla formulována aproximace malé porozity nebo tzv. *limit nulové kompakční délky* (např. [97, 98]), nebo Boussinesqova kompakční aproximace [100], abychom jmenovali alespoň některé.

4.2 Ukázka numerického modelu – tání a transport taveniny v ledové slupce Europy

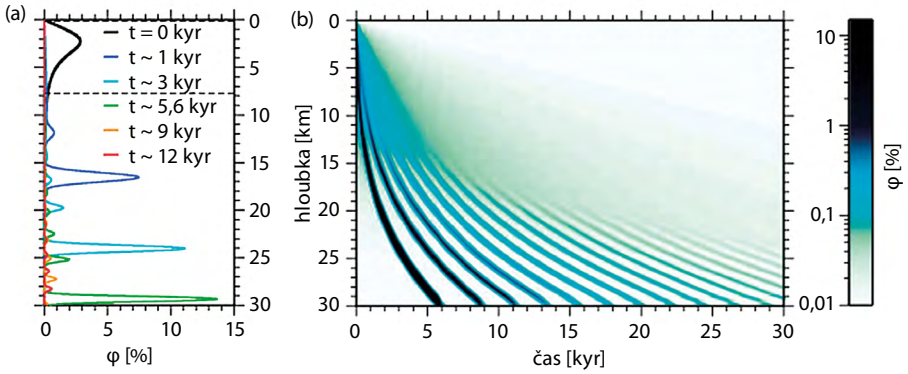
V práci [101] jsme aplikovali dvoufázový model ke studiu stability mělkých podpovrchových rezervoárů tající vody ve vnějším ledovém obalu Jupiterova měsíce Europa. Zaměřili jsme se na dva typy pozorovaných povrchových geomorfologických útvarů, u nichž hypotézy jejich vzniku zahrnující proces tání blízko pod povrchem Europy: (i) Chaotický terén (*chaotic terrain*), dávaný do souvislosti s táním na čelech stoupajících konvektivních plum [87], a (ii) dvojité hřbety (*double ridges*), spojované s táním v důsledku tření na slapově namáhaných transformních zlomech uvnitř ledové slupky [86].

Použili jsme zjednodušenou 1D aproximaci výše popsaných rovnic dvoufázového proudění a systém jsme vyřešili numericky. Ukázali jsme, že v případě stoupajících plum by kapalná voda vytvořená v jejich čele byla velmi rychle (v časovém měřítku ≤100 kyr) odvedena do oceánu mechanismem dvoufázového tečení ve formě porozitních vln, a tedy dlouhodobá stabilita rezervoárů tající vody spojených s plumami je nepravděpodobná (obr. 12). Na druhou stranu naše simulace ukázaly, že stabilní (více než Myr) rezervoáry roztáté vody by mohly existovat v souvislosti s transformními zlomy ve studeném, tzn. nepropustném ledu. To identifikovalo dvojité hřbety – všudypřítomné geomorfologické prvky na povrchu Europy – jako potenciální indikátory přípovrchového tání – tedy vhodné cíle pro radarový průzkum v rámci připravovaných satelitních misí.

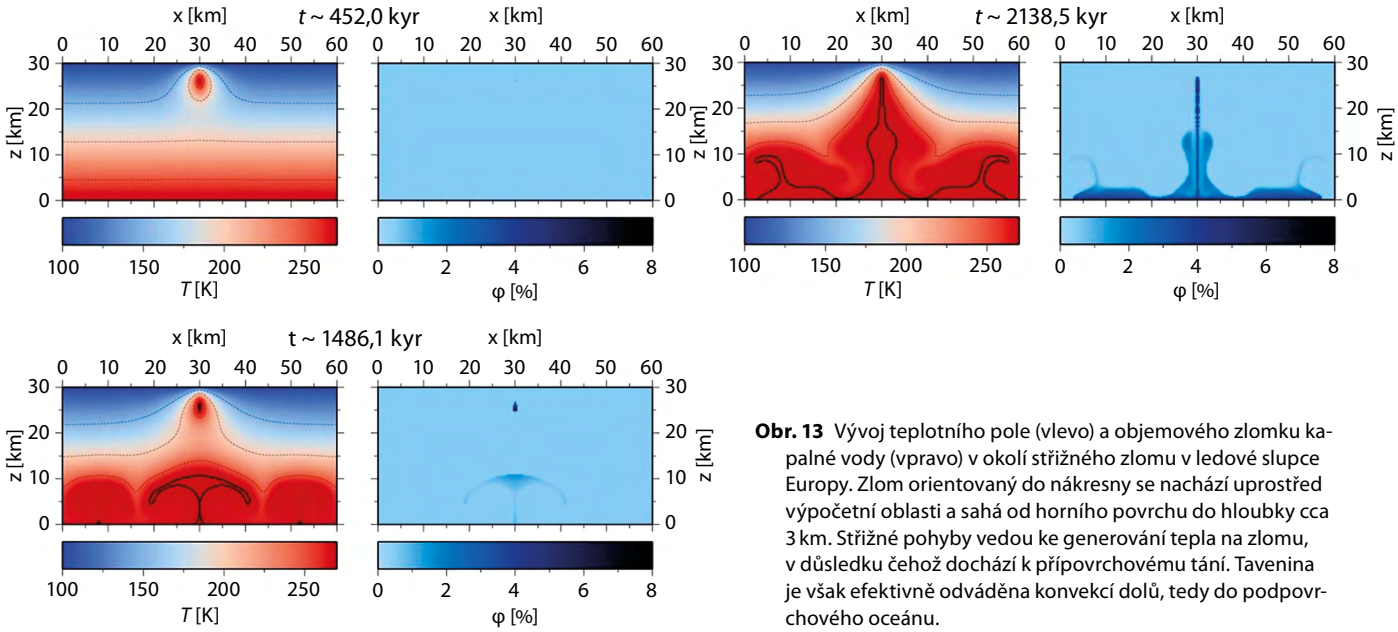
V navazující studii [102] jsme tento, z hlediska stability vody příznivý případ revidovali pomocí dvourozměrného konečně-prvkového modelu vodního ledu v nepropustné limitě. To nám umožnilo odhadnout množství akumulované stabilní podpovrchové taveniny a omezit časovou škálu její extrakce. Na rozdíl od jednorozměrného případu nám 2D simulace umožnily začlenit a kvantifikovat účinnost extrakce taveniny pomocí dalšího mechanismu – vzniku Rayleighových–Taylorových nestabilit způsobených kontrastem hustoty mezi vodou a ledem. V našich simulacích se tyto nestability tvořily typicky v řádu několika milionů let, účinně odváděly taveninu směrem dolů a tak zabraňovaly tvorbě mělkých podpovrchových vodních kapes. Maximální podíl objemu taveniny v natavených oblastech zřídka přesáhl 10 %. Zajímavé je, že vyhodnocením objemových změn spojených s táním ledu, transportem tající vody a opětovným zamrzáním jsme byli schopni předpovědět tvorbu povrchové topografie nad zlomy v souladu s pozorovanými charakteristikami dvojitých hřebenů.

5 Závěr

V tomto přehledu jsme představili vybrané partie matematického modelování, které umožňují lépe porozumět geofyzikálním dějům tvarujícím led, ledovce a ledové slupky na Zemi, na planetách a měsících ve Sluneční soustavě. Popsali jsme složitou odezvu ledu na přiložené mechanické napětí v závislosti na časové škále (periodě) budicí síly. Pro nejrychlejší děje se led chová jako převážně elastická či elasto-plastická pevná látka, pro o něco pomalejší děje je vhodné jej popsat jako viskoelastickou tekutinu a na dlouhé časové škále se led deformuje coby viskózní tekutina. Přechod mezi těmito režimy není přitom náhlý a může záviset



Obr. 12 1D aproximace transportu taveniny procesem dvoufázového tečení v ledové slupce Europy. (a) Vývoj objemového zlomku taveniny (porozity) v několika časových okamžicích (barevně). Počáteční rozložení porozity je vyznačeno černou čarou. V důsledku nelineární dynamiky dochází ke vzniku vln porozit a ke zvyšující se koncentraci porozity v lokálních maximech. (b) Odpovídající časoprostorový vývoj porozity v částečně natavené ledové slupky.



Obr. 13 Vývoj teplotního pole (vlevo) a objemového zlomku kapalné vody (vpravo) v okolí střižného zlomu v ledové slupce Europy. Zlom orientovaný do nákresny se nachází uprostřed výpočetní oblasti a sahá od horního povrchu do hloubky cca 3 km. Střižné pohyby vedou ke generování tepla na zlomu, v důsledku čehož dochází k přípovrchovému tání. Tavenina je však efektivně odváděna konvekcí dolů, tedy do podpovrchového oceánu.

i na dalších parametrech studovaného přírodního systému, kupříkladu na teplotě. Pro nízké teploty ledu lze deformaci ledu popsat elasticky i na delších časových škálách než pro vysoké teploty. Naopak pro teploty blízké teplotě tání je nutné led popsat pomocí viskózní deformace i pro relativně rychlé procesy. Pro teplotu tání se navíc dynamika ledu obohacuje o další fyzikální procesy v důsledku fázového přechodu a přítomnosti kapalné fáze.

Tři typy problémů, které jsme si stručně popsali, představují omezenou, ale významnou třídu (geo)fyzikálních úloh se značným přesahem do dalších oblastí výzkumu. Matematické modely pohybu pevninských ledovců na Zemi či Marsu pomáhají porozumět roli těchto geologicky aktivních přírodních útvarů v historii klimatu a do určité míry pomáhají předpovídat i jeho budoucí vývoj. Studium slapově buzených deformací planetárních slupek ledových měsíců dává možnost nahlédnout pod jejich povrch pomocí satelitních měření tvaru, gravitačního pole a rotačních pohybů těchto těles. Tím může jednak pomoci omezit fyzikálně přípustné modely jejich vnitřní struktury, zároveň tím získáváme i odhad energetické bilance, nezbytný pro porozumění přítomnosti a stability podpovrchových oceánů na tělesech, jako je Europa či Enceladus. Studium třetí třídy úloh, spojených s táním ledu a migrací vody, si klade za cíl porozumět transportním procesům v ledových slupkách. Transport vody a živin je přitom klíčový pro ohodnocení astrobiologického potenciálu těchto měsíců. Otázka možné obyvatelnosti dalších těles ve Sluneční soustavě mimo Zemi představuje jednu z nejzákladnějších vědeckých otázek současnosti. Snaha o její zodpovězení slouží jako klíčová motivace pro několik právě probíhajících misí, zaměřených na studium ledových měsíců. Zmiňme především mise JUICE (*JUpiter Icy Moon Explorer*) Evropské kosmické agentury, která odstartovala v dubnu 2023, a Europa Clipper americké NASA, která je na cestě od října 2024. Obě mise začnou sbírat cenná data v systému Jupiterových měsíců po roce 2030. Matematické modely procesů zmíněných v tomto článku hrály nezastupitelnou roli při přípravě těchto misí a budou spolu s dalšími modely nezbytnými nástroji pro jejich interpretaci.

Reference

[1] C. Salzmann: Advances in the experimental exploration of water's phase diagram. *J. Chem. Phys.* **150**(6), 060901 (2019).

[2] R. Greve, H. Blatter: *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg 2009. ISBN: 978-3-642-03414-5.705.

[3] E. M. Schulson, P. Duval: *Creep and Fracture of Ice*. Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[4] V. F. Petrenko, R. W. Whitworth: *Physics of Ice*. Oxford University Press, Oxford 2002. ISBN: 9780198518945.

[5] J. W. Glen: Experiments on the Deformation of Ice. *J. Glaciology* **2**(12), 111–114 (1952).

[6] W. B. Durham, O. Prieto-Ballesteros, D. L. Goldsby, J. S. Kargel: Rheological and Thermal Properties of Icy Materials. *Space Sci. Rev.* **153**(1), 273–298 (2010).

[7] R. Hooke: *Principles of Glacier Mechanics*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge 2005.

[8] D. Dahl-Jensen, N. Gundestrup: Constitutive properties of ice at Dye 3 Greenland. In: E. D. Waddington, J. S. Walder (Eds.): *The physical basis of ice sheet modelling*. IAHS, 1987. S. 31–43.

[9] D. L. Goldsby, D. L. Kohlstedt: Superplastic deformation of ice: Experimental observations. *J. Geophys. Res.* **106**, 11017–11030 (2001).

[10] A. Barr, W. McKinnon: Convection in ice I shells and mantles with self-consistent grain size. *J. Geophys. Res.* **112**, 2012 (2007).

[11] G. Durand et al.: Effect of impurities on grain growth in cold ice sheets. *J. Geophys. Res. Earth Surf.* **111**, 1–18 (2006).

[12] S. De La Chapelle, H. Milsch, O. Castelnau et al.: Compressive creep of ice containing a liquid intergranular phase: Rate-controlling processes in the dislocation creep regime. *Geophys. Res. Lett.* **26**(2), 251–254(1999).

[13] G. Tobie, G. Choblet, C. Sotin: Tidally heated convection: Constraints on Europa's ice shell thickness. *J. Geophys. Res. Planets* **108**(E11), 5124 (2003).

[14] C. van der Veen: Fracture mechanics approach to penetration of surface crevasses on glaciers. *Cold Regions Sci. Technol.* **27**(1), 31–47 (1998).

[15] F. Nimmo, M. Manga: Geodynamics of Europa's Icy Shell. In: R. T. Pappalardo, W. B. McKinnon, K. K. Khurana (Eds.) *Europa*, 2009. S. 381.

[16] G. Tobie, A. Mocquet, C. Sotin: Tidal dissipation within large icy satellites: Applications to Europa and Titan. *Icarus* **177**(2), 534–549 (2005).

„Matematické modely pohybu pevninských ledovců na Zemi či Marsu pomáhají porozumět roli těchto geologicky aktivních přírodních útvarů v historii klimatu a do určité míry pomáhají předpovídat i jeho budoucí vývoj.“

[17] J. Roberts: The fluffy core of Enceladus. *Icarus* **258**, 54–66 (2015).

[18] M. Beuthe: Crustal control of dissipative ocean tides in Enceladus and other icy moons. *Icarus* **280**, 278–299 (2016).

[19] G. Choblet, G. Tobie, C. Sotin et al.: Powering prolonged hydrothermal activity inside Enceladus. *Nat. Astron.* **1**, 841–847 (2017).

[20] S. Webb, I. Jackson: Anelasticity and microcreep in polycrystalline MgO at high temperature: an exploratory study. *Phys Chem Minerals* **30**(1), 157–166 (2003).

[21] C. McCarthy, J. C. Castillo-Rogez: Planetary Ices Attenuation Properties. In: M. S. Gudipati, J. Castillo-Rogez (Eds.): *The Science of Solar System Ices*. Springer, New York 2013. S. 183–225. ISBN: 978-1-4614-3076-6.

[22] M. Efroimsky: Tidal Dissipation Compared to Seismic Dissipation: In Small Bodies, Earths, and Super-Earths. *Astrophys. J.* **746**, 150 (2012).

[23] G. Tobie, O. Čadek, C. Sotin: Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the South Pole Hotspot on Enceladus. *Icarus* **196**(2), 642–652 (2008).

[24] M. Běhounková, G. Tobie, G. Choblet et al.: Tidally-induced melting events as the origin of south-pole activity on Enceladus. *Icarus* **219**, 655–664 (2012).

[25] O. Souček, M. Běhounková, O. Čadek, J. Hron, G. Tobie, G. Choblet: Tidal dissipation in Enceladus' uneven, fractured ice shell. *Icarus* **328**, 218–231 (2019).

[26] J. C. Castillo-Rogez, M. Efroimsky, V. Lainey: The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model. *J. Geophys. Res. Planets* **116**(E9), E09008 (2011).

[27] M. Běhounková, G. Tobie, O. Čadek et al.: Timing of water plume eruptions on Enceladus explained by interior viscosity structure. *Nat. Geosci.* **8**, 601–604 (2015).

[28] M. Běhounková, G. Tobie, G. Choblet et al.: Impact of tidal heating on the onset of convection in Enceladus's ice shell. *Icarus* **226**, 898–904 (2013).

[29] M. Sundberg, R. F. Cooper: A composite viscoelastic model for incorporating grain boundary sliding and transient diffusion creep; correlating creep and attenuation responses for materials with a fine grain size. *Philos. Mag.* **90**(20), 2817–2840 (2010).

[30] J. Glen, M. Perutz: The creep of polycrystalline ice. *Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Mathem. Phys. Sci.* **228**(1175), 519–538 (1955).

[31] C. Ritz: Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets. In: *IAHS The Physical Basis of Ice Sheet Modelling*. Vol. 170 (1987), s. 207–216.

[32] J. Weertman: On the Sliding of Glaciers. *J. Glaciology* **3**(21), 33–38 (1957).

[33] G. S. Boulton, R. C. A. Hindmarsh: Sediment deformation beneath glaciers: Rheology and geological consequences. *J. Geophys. Res. Solid Earth* **92**(B9), 9059–9082 (1987).

[34] L. Tarasov, R. Peltier: Greenland glacial history and local geodynamic consequences. *Geophys. J. Internat,* **150**(1), 198–229 (2002).

[35] L. Tarasov, A. Dyke, M. Neal et al.: A data-calibrated distribution of deglacial chronologies for the North American ice complex from glaciological modeling. *Earth Planet. Sci. Lett.* **315-316**, 30–40 (2012).

[36] K. Hutter: *Theoretical Glaciology: Material Science of Ice and the Mechanics of Glaciers and Ice Sheets. Mathematical Approaches to Geophysics 1*. Springer Netherlands, Dordrecht 1983. ISBN: 9789401511698; 9401511691; 9789401511674; 9401511675.

[37] L. W. Morland: Unconfined Ice-Shelf Flow. In: C. J. Van der Veen, J. Oerlemans (Eds.): *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*. Springer Netherlands, Dordrecht 1984. S. 99–116. ISBN: 978-94-009-3745-1.

[38] T. Hughes: Numerical reconstructions of paleo ice sheets. In: G. Denton, T. Hughes (Eds.): The *Last Great Ice Sheets*. Wiley-Interscience, New York 1981. S. 221–261.

[39] P. Holmlund, J. Fastook: A time dependent glaciological model of the Weichselian Ice Sheet. *Quater. Int.* **27**, 53–58 (1995).

[40] C. Ritz, A. Fabre, A. Letréguilly: Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters: consequences for the evolution through the last climatic cycle. *Climate Dynamics* **13**, 11–23 (1996).

[41] N. Kirchner, R. Greve, A. Stroeven, J. Heyman: Paleoglaciological reconstructions for the Tibetan Plateau during the last glacial cycle: evaluating numerical ice sheet simulations driven by GCM-ensembles. *Quater. Sci. Rev.* **30**(1–2), 248–267 (2011).

[42] K. Kusahara, T. Sato, A. Oka, T. Obase, R. Greve, A. Abe-Ouchi, H. Hasumi: Modelling the Antarctic marine 740 cryosphere at the Last Glacial Maximum. *Annals Glaciology* **56**(69), 425–435 (2015).

[43] O. Souček, O. Bourgeois, P. Stéphane et al.: A 3 Ga old polythermal ice sheet in Isidis Planitia, Mars: Dynamics and thermal regime inferred from numerical modeling. *Earth Planet. Sci. Lett.* **426**, 176–190 (2015).

[44] J. Ahlkrona, N. Kirchner, P. Lötstedt: A numerical study of scaling relations for non-newtonian thin-film flows with applications in ice sheet modelling. *Quarter. J. Mech. Appl. Math.* **66**(4), 417–435 (2013).

[45] L. W. Morland: Unconfined Ice-Shelf Flow. In: C. J. Van der Veen, J. Oerlemans (Eds.): *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*. Springer Netherlands, Dordrecht 1987. S. 99–116. ISBN: 978-94-009-3745-1.

[46] D. R. MacAyeal: Large-scale ice flow over a viscous basal sediment: Theory and application to ice stream B, Antarctica. *J. Geophys. Res. Solid Earth* **94**(B4), 4071–4087 (1989).

[47] D. Pollard, R. M. DeConto: Description of a hybrid ice sheet-shelf model, and application to Antarctica. *Geosci. Model Develop.* **5**(5), 1273–1295 (2012).

[48] D. Baral, K. Hutter, R. Greve: Asymptotic Theories of Large-Scale Motion, Temperature, and Moisture Distribution in Land-Based Polythermal Ice Sheets: A Critical Review and New Developments. *Appl. Mech. Rev.* **54**(3), 215–256 (2001).

[49] H. Blatter: Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *J. Glaciology* **41**(138), 333–344 (1995).

[50] F. Pattyn: A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **108**(8), 1–15 (2003).

[51] R. C. A. Hindmarsh: A numerical comparison of approximations to the Stokes equations used in ice sheet and glacier modeling. J. *Geophys. Res.: Earth Surface* **109**, F01012 (2004).

[52] F. Gillet-Chaulet, O. Gagliardini, H. Seddik et al.: Greenland ice sheet contribution to sea-level rise from a new-generation ice-sheet model. *Cryosphere* **6**(6), 1561–1576 (2012).

[53] H. Seddik, R. Greve, T. Zwinger et al.: Simulations of the Greenland ice sheet 100 years into the future with the full Stokes model Elmer/Ice. *J. Glaciology* **58**(209), 427–440 (2012).

[54] M. Rückamp, T. Kleiner, A. Humbert: Comparison of ice dynamics using full-Stokes and Blatter–Pattyn approximation: application to 800 the Northeast Greenland Ice Stream. *Cryosphere* **16**(5), 1675–1696 (2022).

[55] T. Guidat, S. Pochat, O. Bourgeois et al.: Landform assemblage in Isidis Planitia, Mars: Evidence for a 3 Ga old polythermal ice sheet. *Earth Planet. Sci. Lett.* **411**, 253–267 (2015).

[56] J.-B. Madeleine, F. Forget, J. Head et al.: Amazonian northern mid-latitude glaciation on Mars: A proposed climate scenario. *Icarus* **203**(2), 390–405 (2009).

[57] J. Laskar, A. Correia, M. Gastineau et al.: Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars. *Icarus* **170**(2), 343–364 (2004).

[58] M. Grott, D. Breuer: On the spatial variability of the Martian elastic lithosphere thickness: Evidence for mantle plumes? *J. Geophys. Res. Planets* **115**, 1–16 (2010).

[59] M. Kihoulou, K. Kalousová, O. Souček: Evolution of Pluto's Impact-Deformed Ice Shell Below Sputnik Planitia Basin. *J. Geophys. Res. Planets* **127**(6), e2022JE007221 (2022).

[60] Y. Ashkenazy, R. Sayag, E. Tziperman: Dynamics of the global meridional ice flow of Europa's icy shell. *Nat. Astronomy* **2**, 43–49 (2018).

[61] O. Čadek, O. Souček, M. Běhounková et al.: Long-term stability of Enceladus' uneven ice shell. *Icarus* **319**, 476–484 (2019).

[62] M. Běhounková, G. Tobie, G. Choblet et al.: Tidally Induced Magmatic Pulses on the Oceanic Floor of Jupiter's Moon Europa. *Geophys. Res. Lett.* **48**(3), e2020GL090077 (2021).

[63] R. Tyler: Comparative estimates of the heat generated by ocean tides on icy satellites in the outer Solar System. *Icarus* **243**, 358–385 (2014).

[64] I. Matsuyama, M. Beuthe, H. C. F. C. Hay et al.: Ocean tidal heating in icy satellites with solid shells. *Icarus* **312**, 208–230 (2018).

[65] M. Rovira-Navarro, M. Rieutord, T. Gerkema et al.: Do tidally-generated inertial waves heat the subsurface oceans of Europa and Enceladus? *Icarus* **321**, 126–140 (2019).

[66] F. Nimmo, J. R. Spencer, R. T. Pappalardo et al.: Shear heating as the origin of the plumes and heat flux on Enceladus. *Nature* **447**, 289–291 (2007).

[67] W. M. Kaula: Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. *Rev. Geophys.* **2**(4), 661–685 (1964).

[68] A. E. H. Love: *Lehrbuch der Elastizität*. B.G. Teubner Verlag, Leipzig 1907.

[69] Z. Martinec, C. Matyska, E. W. Grafarend et al.: Helmert's 2nd condensation method. *Manuscr. Geod.* **18**, 417–421 (1993).

[70] A. C. Barr, A. P. Showman: Heat transfer in Europa's icy shell. In: R. T. Pappalardo, W. B. McKinnon, K. Khurana (Eds.): *Europa*. University of Arizona Press, Tucson 2009. S. 405–430.

[71] S. D. King, C. Lee, P. E. Van Keken et al.: A community benchmark for 2-D Cartesian compressible convection in the Earth's mantle. *Geophys. J. Internat.* **180**(1), 73–87 (2010).

[72] O. Souček, J. Hron, M. Běhounková et al.: Effect of the tiger stripes on the deformation of Saturn's moon Enceladus. *Geophys. Res. Lett.* **43**(14), 7417–7423 (2016).

[73] M. Běhounková, O. Souček, J. Hron et al.: Plume activity and tidal deformation on Enceladus influenced by faults and variable ice shell thickness. *Astrobiology* **17**, 941–954 (2017).

[74] K. Pleiner Sládková, O. Souček, M. Běhounková: Enceladus' Tiger Stripes as Frictional Faults: Effect on Stress and Heat Production. *Geophys. Res. Lett.* **48**(19), e2021GL094849 (2021).

[75] F. Nimmo, A. Barr, M. Běhounková et al.: The Thermal and Orbital Evolution of Enceladus: Observational Constraints and Models. In: *Enceladus and the Icy Moons of Saturn*. University of Arizona Press, Tucson 2018.

[76] J. R. Spencer, C. J. A. Howett, A. Verbiscer et al.: Enceladus Heat Flow from High Spatial Resolution Thermal Emission Observations. *European Planetary Science Congress* 2013, September 8-13, London, UK.

[77] F. Nimmo, A. Barr, M. Běhounková et al.: The Thermal and Orbital Evolution of Enceladus: Observational Constraints and Models. In: *Enceladus and the Icy Moons of Saturn*. U. Arizona Press, 2018.

[78] L. Lliboutry: Permeability, Brine Content and Temperature of Temperate Ice. *J. Glaciology* **10**(58), 15–29 (1971).

[79] H. M. Mader: The thermal behaviour of the water-vein system in polycrystalline ice. *J. Glaciology* **38**(130), 359–374 (1992).

[80] J. Nye: The Geometry of Water Veins and Nodes in Polycrystalline Ice. *J. Glaciology* **35**(119), 17–22 (1989).

[81] A. König-Haagen, E. Franquet, E. Pernot et al.: A comprehensive benchmark of fixed-grid methods for the modeling of melting. *Int. J. Therm. Sci.* **118**, 69–103 (2017).

[82] K. M. Soderlund, B. E. Schmidt, J. Wicht et al.: Ocean-driven heating of Europa's icy shell at low latitudes. *Nat. Geosci.* **7**, 16–19 (2014).

[83] J. Kvorka, O. Čadek, G. Tobie et al.: Does Titan's long-wavelength topography contain information about subsurface ocean dynamics? *Icarus* **310**, 149–164 (2018).

[84] Y. Ashkenazy, E. Tziperman: Europa's dynamic ocean: Taylor columns, eddies, convection, ice melting and salinity. In: *European Planetary Science Congress*, EPSC2020-538, 2020.

[85] F. Nimmo, E. Gaidos: Strike-slip motion and double ridge formation on Europa. *J. Geophys. Res.* **107**(E4), 1–8 (2002).

[86] C. Sotin, J. Head, G. Tobie: Tidal heating of upwelling thermal plumes and the origin of lenticulae and chaos melting. *Geophys. Res. Let.* **29**, 1233 (2002).

[87] A. Dombard, G. Patterson, A. Lederer et al.: Flanking fractures and the formation of double ridges on Europa. *Icarus* **223**(1), 74–81 (2013).

[88] B. E. Schmidt, D. D. Blankenship, G. W. Patterson et al.: Active formation of 'chaos terrain' over shallow subsurface water on Europa. *Nature* **479** (7374), 502–505 (2011).

[89] A. G. Fountain, J. S.Walder: Water flow through temperate glaciers. *Rev. Geophys.* **36**(3), 299–328 (1998).

[90] D. McKenzie: The Generation and Compaction of Partially Molten Rock. *J. Petrology* **25**(3), 713–765 (1984).

[91] M. Spiegelman, D. McKenzie: Simple 2-D models for melt extraction at mid-ocean ridges and island arcs. *Earth Planet. Sci. Lett.* **83**(1), 137–152 (1987).

[92] D. Drew, S. Passman: *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, New York 1998.

[93] D. Bercovici, Y. Ricard, G. Schubert: A two-phase model for compaction and damage: 1. General Theory. *J. Geophys. Res. Solid Earth* **106**(B5), 8887–8906 (2001).

[94] O. Šrámek, Y. Ricard, D. Bercovici: Simultaneous melting and compaction in deformable two-phase media. *Geophys. J. Internat.* **168**(3), 964–982 (2007).

[95] K. M. Golden, H. Eicken, A. L. Heaton et al.: Thermal evolution of permeability and microstructure in sea ice. *Geophys. Res. Lett.* **34**(16), L16501 (2007).

[96] K. Golden, S. Ackley, V. Lytle: The Percolation Phase Transition in Sea Ice. *Science* **282**(5397), 2238–2241 (1998).

[97] B. Budiansky: Thermal and Thermoelastic Properties of Isotropic Composites. *J. Composite Mater.* **4**(3), 286–295 (1970).

[98] D. R. Scott, D. J. Stevenson: A self-consistent model of melting, magma migration and buoyancy-driven circulation beneath mid-ocean ridges. *J. Geophys. Res. Solid Earth* **94**(B3), 2973–2988 (1989).

[99] M. Spiegelman: Flow in deformable porous media. Part 1. Simple analysis. *J. Fluid Mech.* **247**, 17–38 (1993).

[100] H. Schmeling: Partial Melting and Melt Segregation in a Convecting Mantle. In: N. Bagdassarov, D. Laporte, A. B. Thompson (Eds.): *Physics and Chemistry of Partially Molten Rocks*. Springer Netherlands, Dordrecht 2000. S. 141–178.

[101] K. Kalousová, O. Souček, G. Tobie et al.: Ice melting and downward transport of meltwater by two-phase flow in Europa's ice shell. *J. Geophys. Res. Planets* **119**(3), 532–549 (2014).

[102] K. Kalousová, O. Souček, G. Tobie et al.: Water generation and transport below Europa's strike-slip faults. *J. Geophys. Res. Planets* **121**(12), 2444–2462 (2016).

„Transport vody a živin je klíčový pro ohodnocení astrobiologického potenciálu měsíců obřích planet. Otázka možné obyvatelnosti dalších těles přitom představuje jednu z nejzákladnějších vědeckých otázek současnosti.“