

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2n+1} + 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{16}{9}\right)^{n+1}} = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^n + \frac{25}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n}{2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{16}{9} \left(\frac{16}{9}\right)^n} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^n \left(\frac{16}{3} + \frac{25}{3} \left(\frac{15}{16}\right)^n\right)}{\left(\frac{16}{9}\right)^n \left(\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{27}{32}\right)^n - \frac{16}{9}\right)}$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) = \underline{\underline{-3}}$$

$$2) f(x) = (x^2 + 2x)e^{x^2 - 3x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (2x+2)e^{x^2-3x} + (x^2+2x)(2x-3)e^{x^2-3x}$$

$$= e^{x^2-3x} (2x+2 + x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 6x) =$$

$$= e^{x^2-3x} (x^3 + x^2 - 4x + 2) \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4, \quad k = 2$$

$$f'(x) = -x + 1 = 2$$

$$\underline{x = -1}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} - 1 + 4 = 2,5 \Rightarrow t(x) = 2,5 + 2(x+1) = 2x + 4,5$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 = -2$$

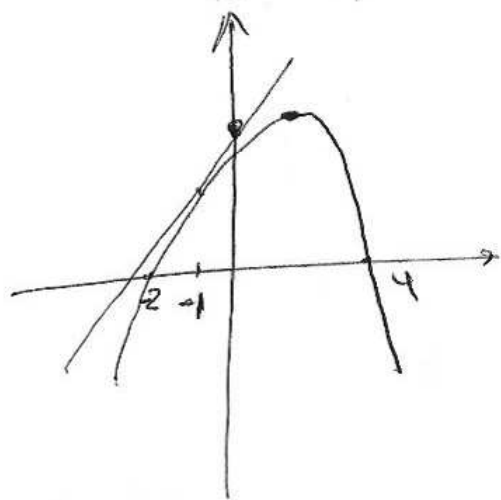
$$t(0) = 4,5$$

$$f'(x) = -x + 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} + 1 + 4 = 4,5$$

$$\rightarrow V[1; 4,5]$$



$$4) f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 2 \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$$

$$\bullet D_f = [-2; \infty)$$

• ani sudă / ani lichă

$$\bullet t = x+2 \Rightarrow x = t-2, \text{ în } D_f \ t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = t-2 - 4\sqrt{t} + 2 = t - 4\sqrt{t} = \sqrt{t}(\sqrt{t} - 4) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{t_1} = 0$$

$$x_1 + 2 = 0$$

$$x_1 = -2$$

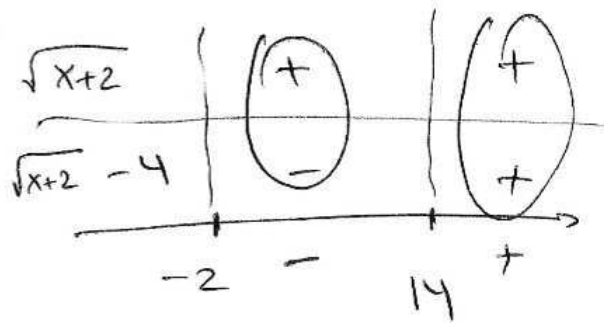
$$\rightarrow \sqrt{t_2} = 4$$

$$t_2 = 16$$

$$x_2 + 2 = 16$$

$$x_2 = 14$$

(2)



$$f(x) < x: x \in (-2; 14)$$

$$f(x) > x: x \in (14; \infty)$$

$$\bullet P_x: [-2; 0], [14; 0] \quad P_y: [0; 2 - 4\sqrt{2}]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

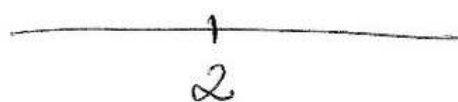
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$$

$$\bullet f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x+2 = 4$$

$$x = 2$$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{x+2}}$$

$$\Rightarrow f(2) = 2 - 4\sqrt{4} + 2 = 4 - 8 = -4$$



$$\rightarrow [2; -4] \rightarrow \text{lok. min.}$$

$$\bullet a(x) = kx + b, \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4\sqrt{x+2}}{x} = 1$$

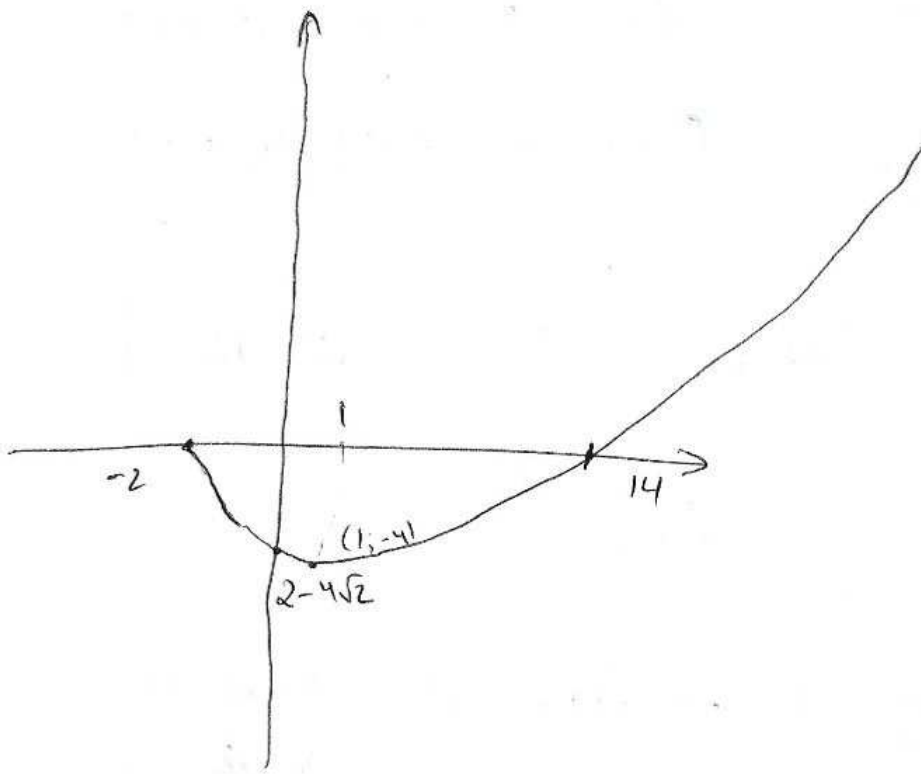
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [-4\sqrt{x+2}] = -\infty$$

\rightarrow asymptota nemí

$$\bullet f''(x) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x+2}} \right)' = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x+2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} \neq 0$$

\Rightarrow inflexní body nejsou.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} > 0 \text{ na } D_f \Rightarrow f(x) \text{ je konvexní na } D_f.$$



$$5) f(x, y) = y^2 - 2x^2$$

$$M = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 100, x - y \leq 2 \}$$

$$y \geq x - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\{ [0; 0] \in M$$

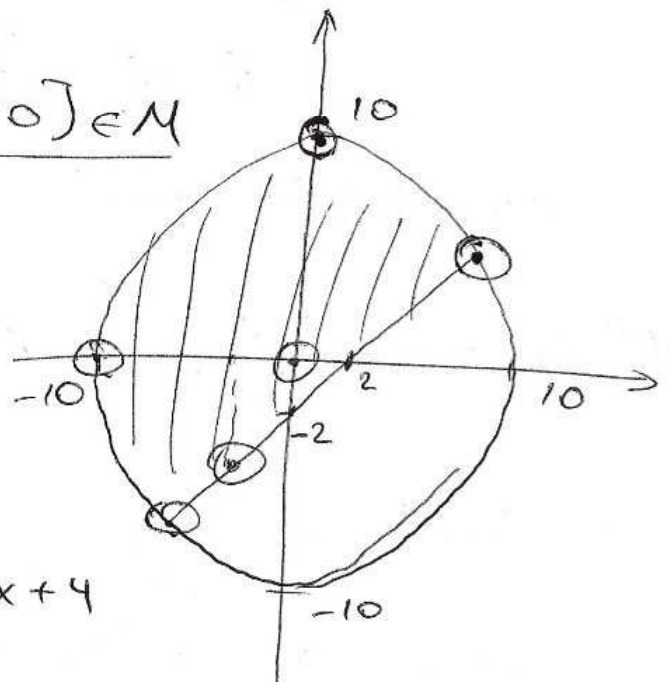
$$f(x, y = x - 2) = (x - 2)^2 - 2x^2 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 = -x^2 - 4x + 4$$

$$f'_x|_{y=x-2} = -2x - 4 = 0$$

$$\hookrightarrow x = -2 \rightarrow y = -4 \Rightarrow \underline{[-2; -4] \in M}$$

(4)



$$L(x, y, \lambda) = y^2 - 2x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + 2\lambda x = 0 \rightarrow -2x + \lambda x = 0$$
$$x(\lambda - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \rightarrow y + \lambda y = 0$$
$$y(\lambda + 1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 100 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$$

$$\geq \frac{\partial L}{\partial x}: x(\lambda - 2) = 0$$

$$\hookrightarrow \text{i) } x = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 \Rightarrow y = \pm 10$$

$$\Rightarrow [0; 10]_{\lambda = -1} \in M$$

$$[0; -10]_{\lambda = -1} \notin M$$

$$\text{ii) } \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow y(\lambda + 1) = 0 \rightarrow y(2 + 1) = 0$$

$$3y = 0$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 100 \rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$$

$$\Rightarrow [10; 0]_{\lambda = 2} \notin M, [-10; 0]_{\lambda = 2} \in M$$

průsečíky $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = x - 2 \end{cases}$

$$\rightarrow x^2 + (x-2)^2 = 100$$

$$\hookrightarrow x_1 = -6 \rightarrow y_1 = -8 \rightarrow [-6; -8]$$

$$x_2 = 8 \rightarrow y_2 = 6 \rightarrow [8; 6]$$

$$f(0; 0) = 0$$

$$f(x, y) = y^2 - 2x^2$$

$$f(-2, -4) = 16 - 8 = 8$$

$$f(-10, 0) = -200 \rightarrow \underline{\text{min}}$$

$$f(0, 10) = 100 \rightarrow \underline{\text{max}}$$

$$f(8, 6) = 36 - 128 = -92$$

$$f(-6, -8) = 64 - 72 = -8$$

Jméno a příjmení (čitelně): _____

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Beran Jaroš Prokop Zymín
9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2022/23
Varianta A

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2n+1} + 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{16}{9}\right)^{n+1}}$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{x^2 - 3x},$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnicí $k = 2$. V každém takovém bodě pak spočítejte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 2$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrém, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrém funkce $f(x, y) = y^2 - 2x^2$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 100; x - y \leq 2\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M spočítejte příslušnou hodnotu λ . Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.