

Jméno a příjmení (čitelně): _____

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Beran Jaroš Prokop Zymin

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2022/23
Varianta D

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-4)^3}{(2n+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2n+3}}.$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = \ln \left(\frac{2x}{x-4} \right),$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnicí $k = -1$. V každém takovém bodě pak spočítejte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{8(x-1)}{(x-2)^2}$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4y + 3x$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 100; 2y \leq x + 10\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M (mimo vrcholy) spočítejte příslušnou hodnotu λ . Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.