

Jméno a příjmení (čitelně): _____

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Beran Jaroš Prokop Vitovský

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2023/24
Varianta A

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} + 3 \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}.$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^{x-x^2},$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnicí $k = 2$. V každém takovém bodě pak spočtěte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - 6\sqrt{x} - 7$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 4x - y^2$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 100; y \leq x + 2\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M spočtěte příslušnou hodnotu λ . Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.