

Jméno a příjmení (čitelně): _____

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Beran Jaroš Prokop Vitovský

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

**Závěrečný test LS 2023/24
Varianta B**

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^4 - 5} \cdot (3n^3 + n^2 + 4)}{(n^2 + 3)^2((n + 3)^2 - n^2)}.$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = \ln \left(\frac{x + 1}{2x - 3} \right),$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnici $k = 4$. V každém takovém bodě pak spočtete hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 14x + 33}{x - 2}$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f , derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrém, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrém funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4y$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25; y \leq 2x + 5\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M (mimo vrcholy) spočtete příslušnou hodnotu λ . Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.