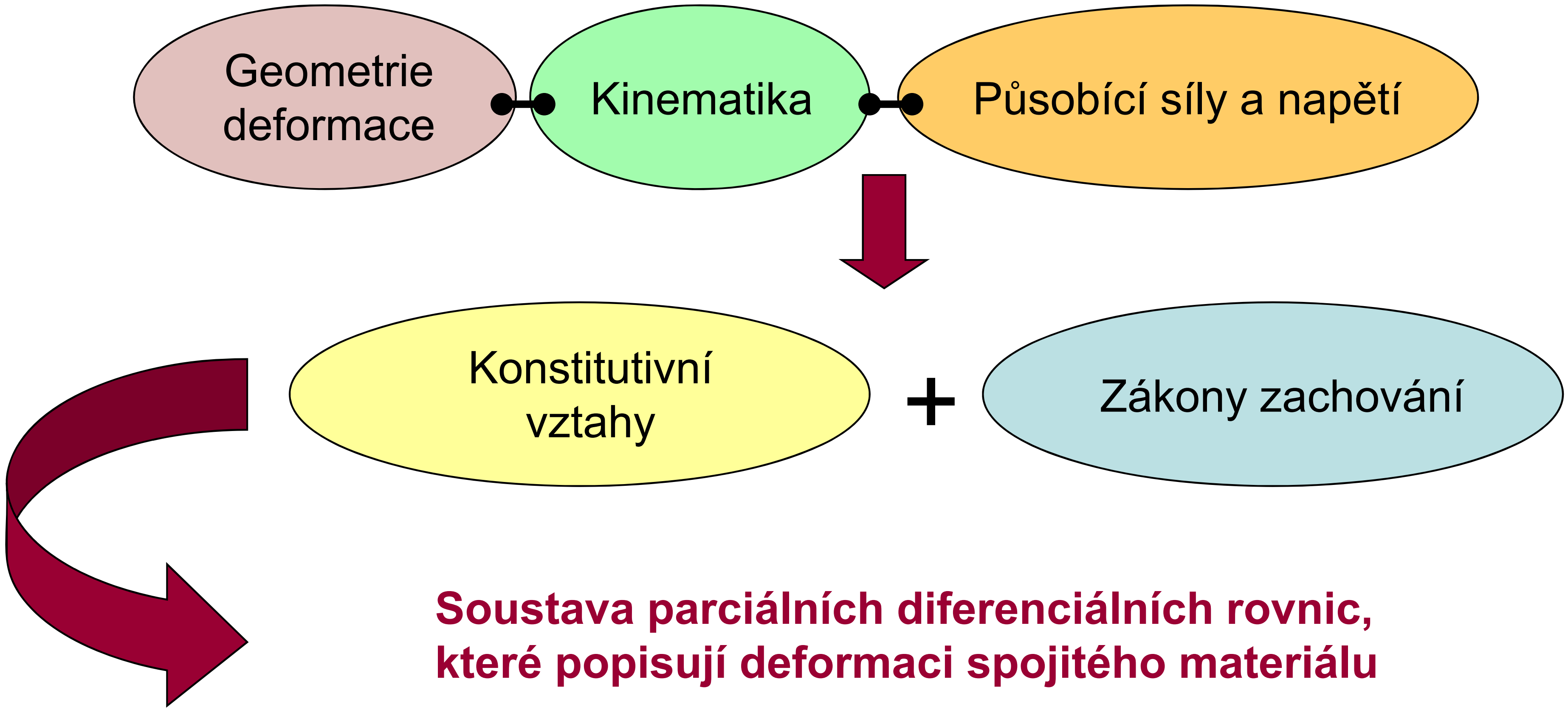
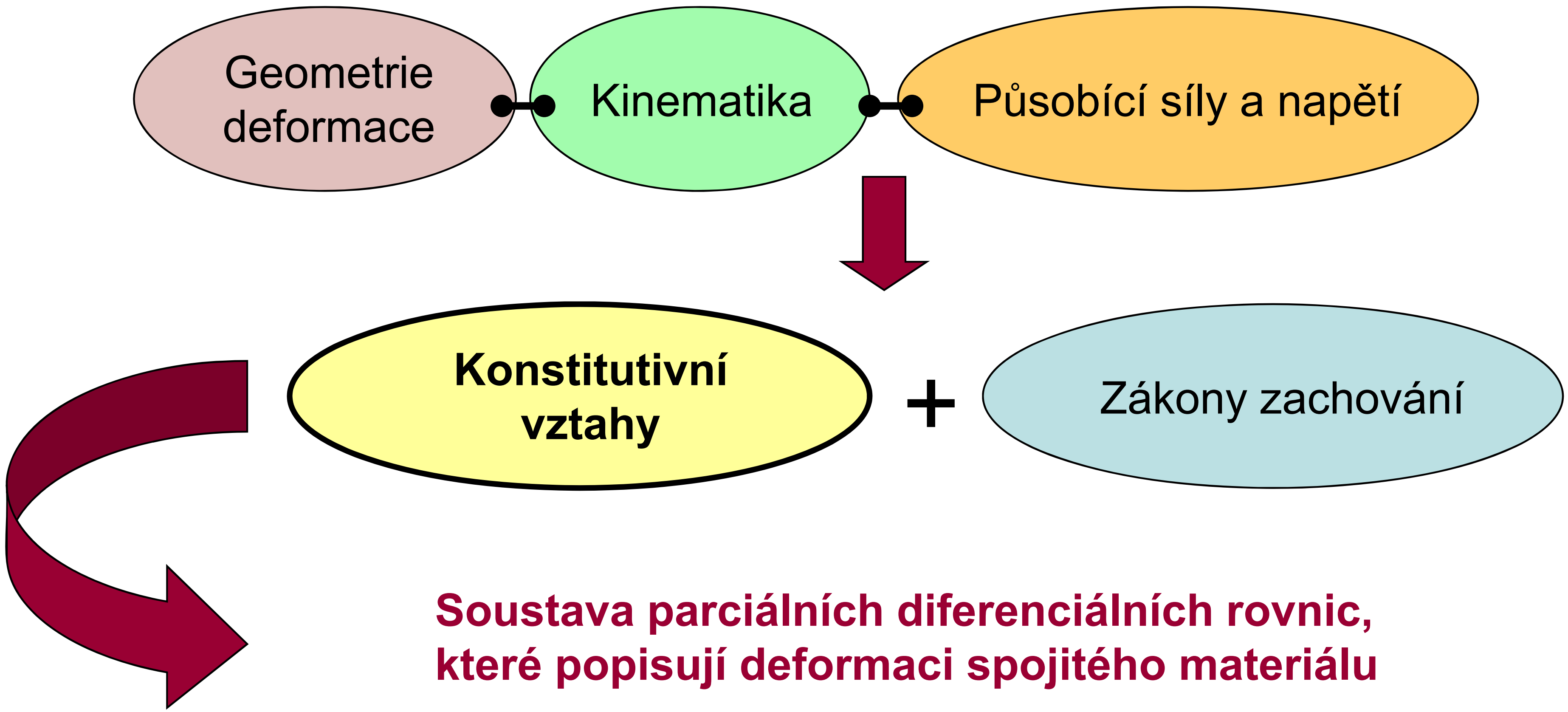
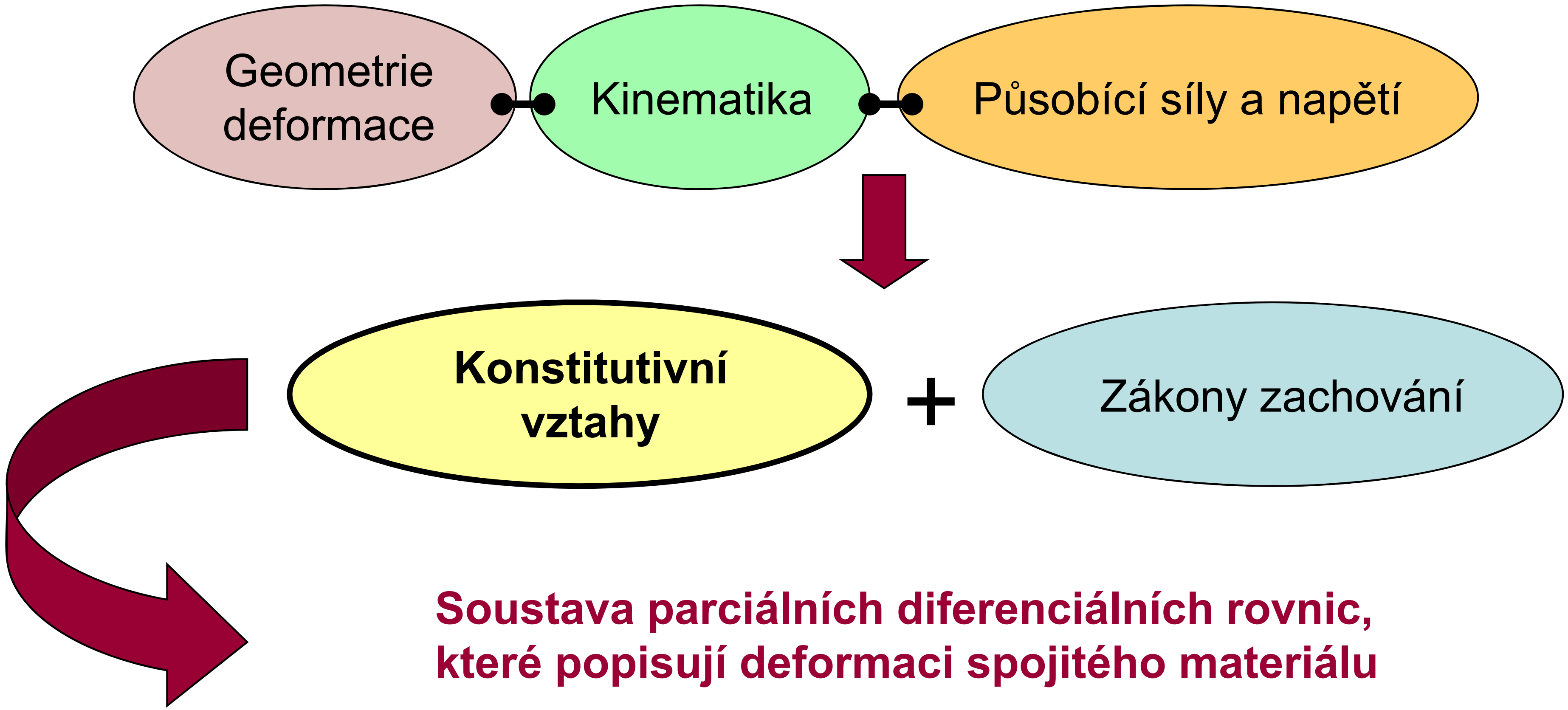
Mechanika kontinua – část 8
Konstitutivní vztahy I


Geometrie deformace
Kinematika
Působící síly a napětí
Konstitutivní vztahy
+
Zákony zachování
Soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují deformaci spojitého materiálu


Geometrie deformace
Kinematika
Působící síly a napětí
Konstitutivní vztahy
+
Zákony zachování
Soustava parciálních diferenciálních rovnic,
které popisují deformaci spojitého materiálu

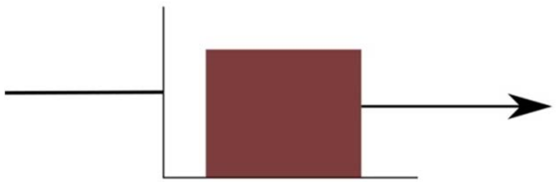


Soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují deformaci spojitého materiálu

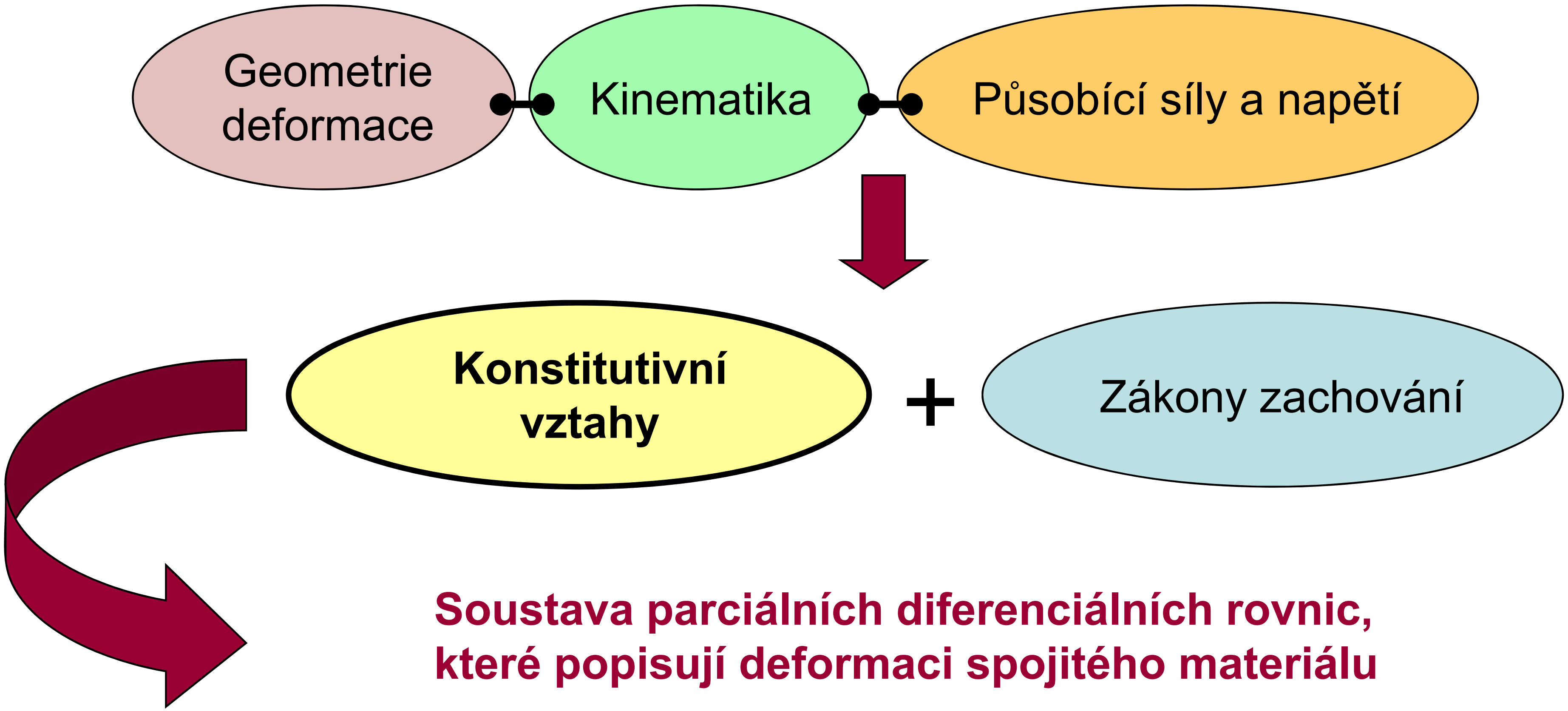
- Formální potřebnost konstitutivních vztahů
- Jednoduché příklady „zúplnění“ systému rovnic

elasticita

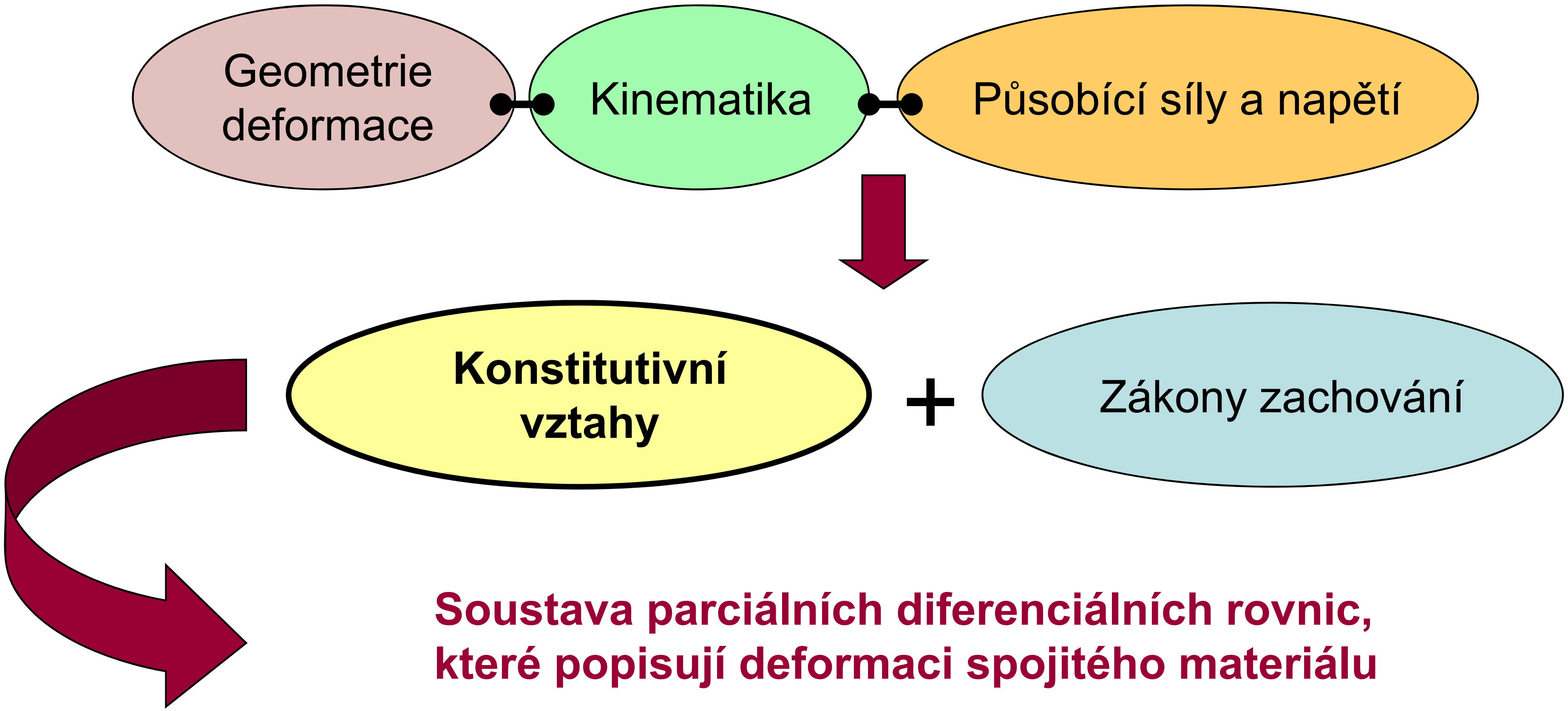
viskozita



plasticita



- Formální potřebnost konstitutivních vztahů
- Jednoduché příklady „zúplnění“ systému rovnic
- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy:
  deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- Koncept objektivity
- Kinematická podmínka
- Materiálové symetrie, homogenní a izotropní materiály
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti



- Formální potřebnost konstitutivních vztahů
- Jednoduché příklady „zúplnění“ systému rovnic
- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy:
  deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- Koncept objektivity
- Kinematická podmínka
- Materiálové symetrie, homogenní a izotropní materiály
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti

Konstitutivní vztahy – teoretický rámec

Konstitutivní vztahy – základní principy

Deterministický princip:

Aktuální stav termomechanických proměnných v čase t v materiálovém bodě $\vec{X}$ je obecně určen teplotní a deformační historií materiálových bodů tělesa v čase $\tau \leq t.$ Chování materiálu nezávisí na bodech vně tělesa a dějích, které se uskuteční v budoucnosti.

Konstitutivní vztahy – teoretický rámec

Konstitutivní vztahy – základní principy

Deterministický princip:

Aktuální stav termomechanických proměnných v čase t v materiálovém bodě $\vec{X}$ je obecně určen teplotní a deformační historií materiálových bodů tělesa v čase $\tau \leq t.$ Chování materiálu nezávisí na bodech vně tělesa a dějích, které se uskuteční v budoucnosti.

Materiálová objektivita:

Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči k pohybu referenční soustavy. Jinými slovy, materiálové vlastnosti nesmí záviset na stanovišti pozorovatele.

Konstitutivní vztahy – teoretický rámec

Konstitutivní vztahy – základní principy

Deterministický princip:

Aktuální stav termomechanických proměnných v čase t v materiálovém bodě $\vec{X}$ je obecně určen teplotní a deformační historií materiálových bodů tělesa v čase $\tau \leq t.$ Chování materiálu nezávisí na bodech vně tělesa a dějích, které se uskuteční v budoucnosti.

Materiálová objektivita:

Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči k pohybu referenční soustavy. Jinými slovy, materiálové vlastnosti nesmí záviset na stanovišti pozorovatele.

Termodynamická kompatibilita:

Materiálové vztahy musí být kompatibilní s druhou větou termodynamiky, tj. systém musí v každém okamžiku splňovat Clausius-Duhemovu nerovnost.

Konstitutivní vztahy – teoretický rámec

Viděli jsme, že aplikace naší zkušenosti a experimentálních dat nemusí vést ke správnému výsledku.

Ke konstitutivním vztahům lze přistupovat také tak, že vyžadujeme určité obecné vlastnosti, které tyto vztahy musí splňovat (*determinismus, objektivita a termodynamická korektnost*). Konstitutivní vztahy pak konstruujeme na základě určitých předpokladů a požadavků symetrie.

Konstitutivní vztahy – základní principy

Deterministický princip:

Aktuální stav termomechanických proměnných v čase t v materiálovém bodě $\vec{X}$ je obecně určen teplotní a deformační historií materiálových bodů tělesa v čase $\tau \leq t$. Chování materiálu nezávisí na bodech vně tělesa a dějích, které se uskuteční v budoucnosti.

Materiálová objektivita:

Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči k pohybu referenční soustavy. Jinými slovy, materiálové vlastnosti nesmí záviset na stanovišti pozorovatele.

Termodynamická kompatibilita:

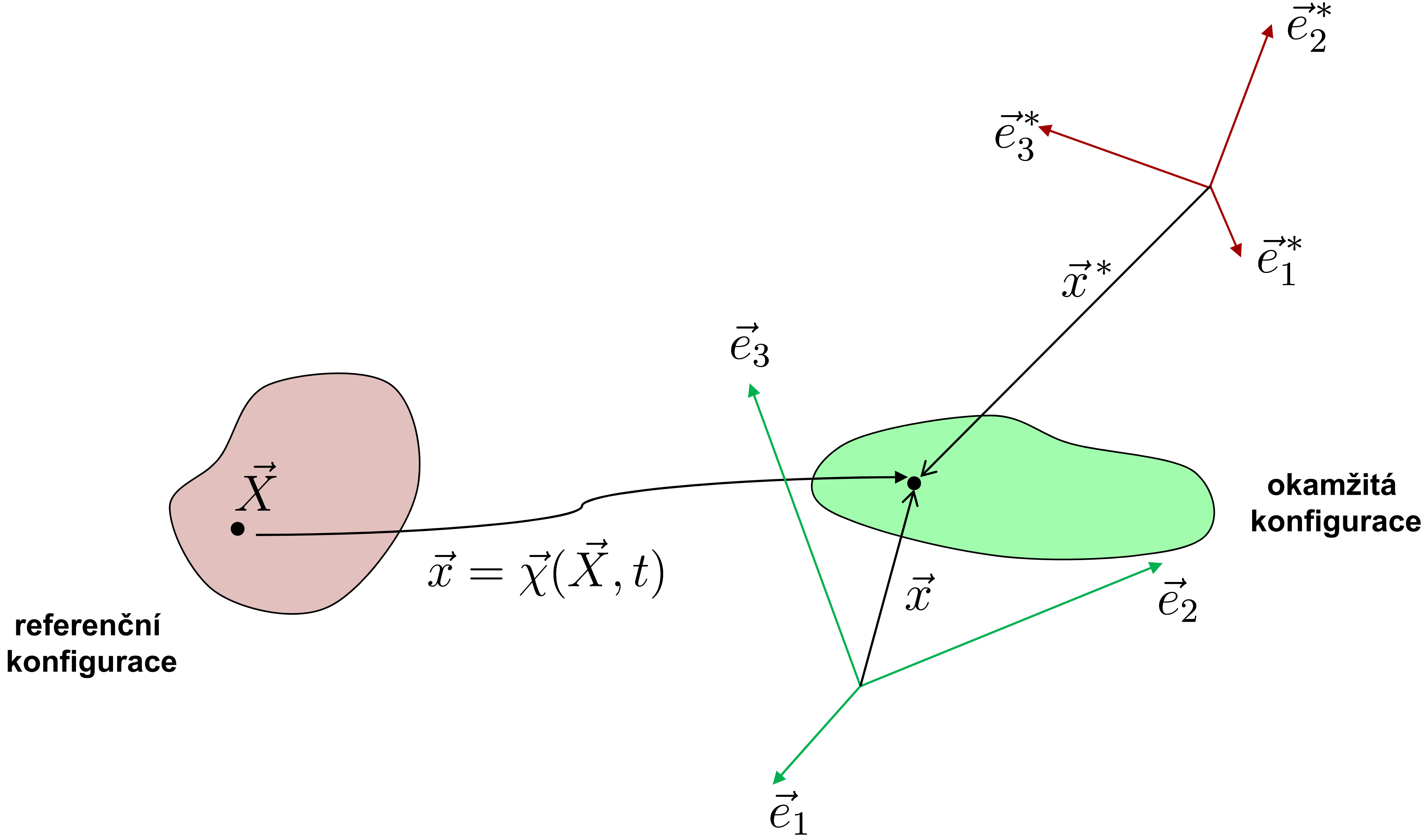
Materiálové vztahy musí být kompatibilní s druhou větou termodynamiky, tj. systém musí v každém okamžiku splňovat Clausius-Duhemovu nerovnost.

Objektivní veličiny jsou takové, které jsou invariantní vůči Euklidově transformaci (*rigid transformation*):

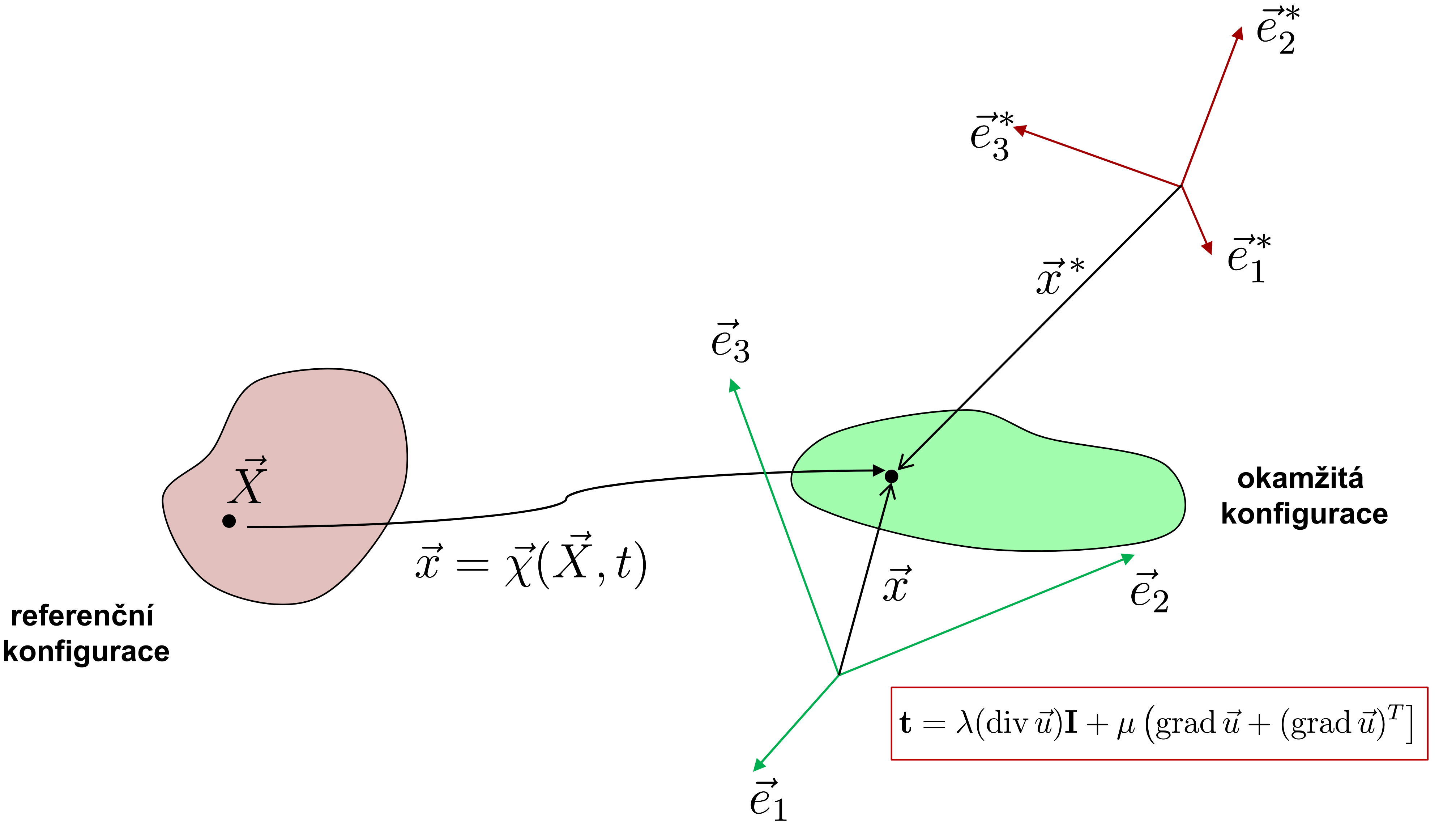
Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

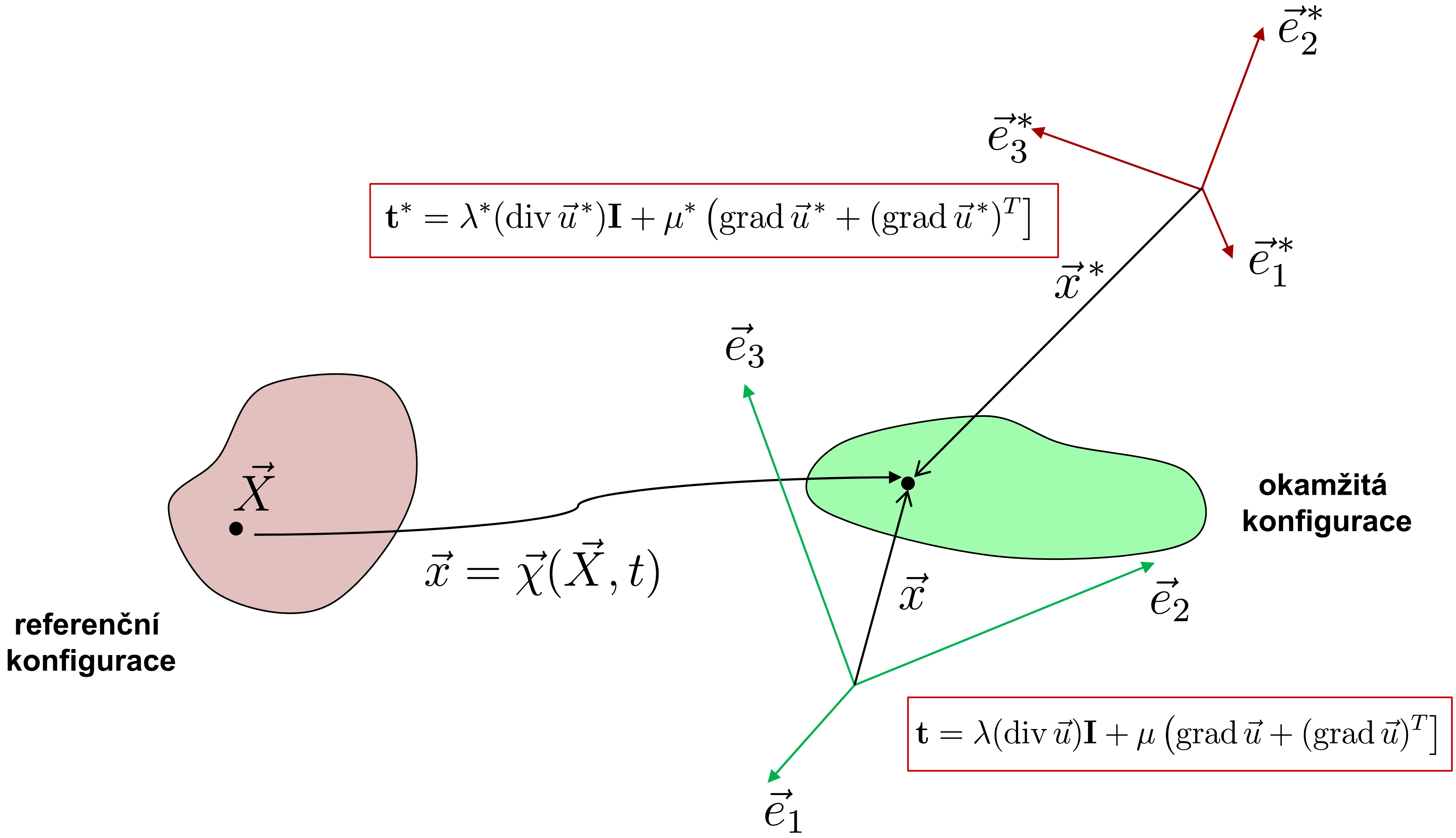
Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^\mathbf{T}(t)$



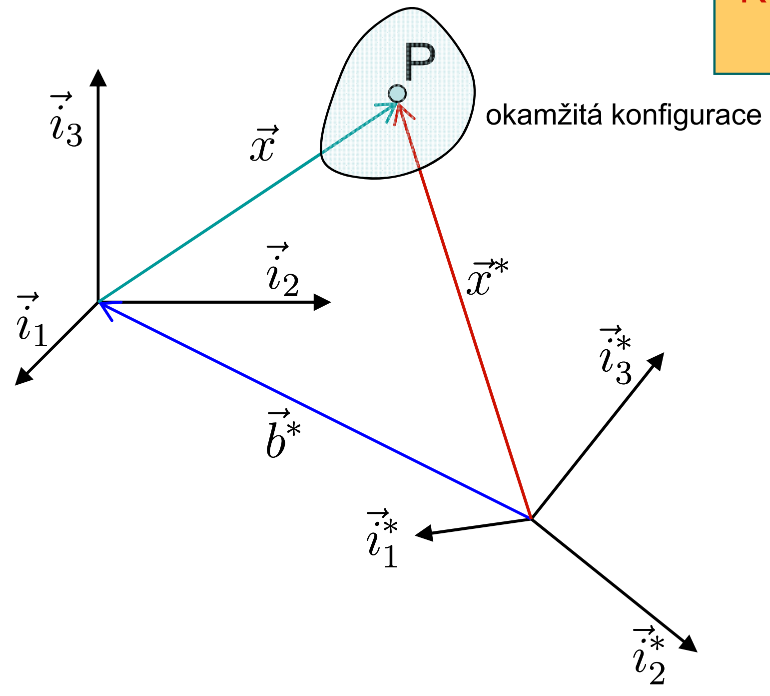
$\vec{e}_2^{\,*}$
$\vec{e}_3^{\,*}$
$\vec{e}_1^{\,*}$
$\vec{x}^{\,*}$
$\vec{e}_3$
$\vec{X}$
okamžitá konfigurace
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
referenční konfigurace
$\vec{e}_1$



$$\boxed{\mathbf{t} = \lambda(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left(\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^T\right]}$$


$\mathbf{t}^* = \lambda^*(\mathrm{div}\,\vec{u}^*)\mathbf{I} + \mu^*\left(\mathrm{grad}\,\vec{u}^* + (\mathrm{grad}\,\vec{u}^*)^T\right]$
$\vec{e}_1^{\,*}$
$\vec{e}_2^{\,*}$
$\vec{e}_3^{\,*}$
$\vec{x}^{\,*}$
$\vec{X}$
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
referenční konfigurace
okamžitá konfigurace
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
$\vec{e}_3$
$\vec{x}$
$\mathbf{t} = \lambda(\mathrm{div}\,\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left(\mathrm{grad}\,\vec{u} + (\mathrm{grad}\,\vec{u})^T\right]$

Pohybující se pozorovatel



Pohybující se pozorovatel

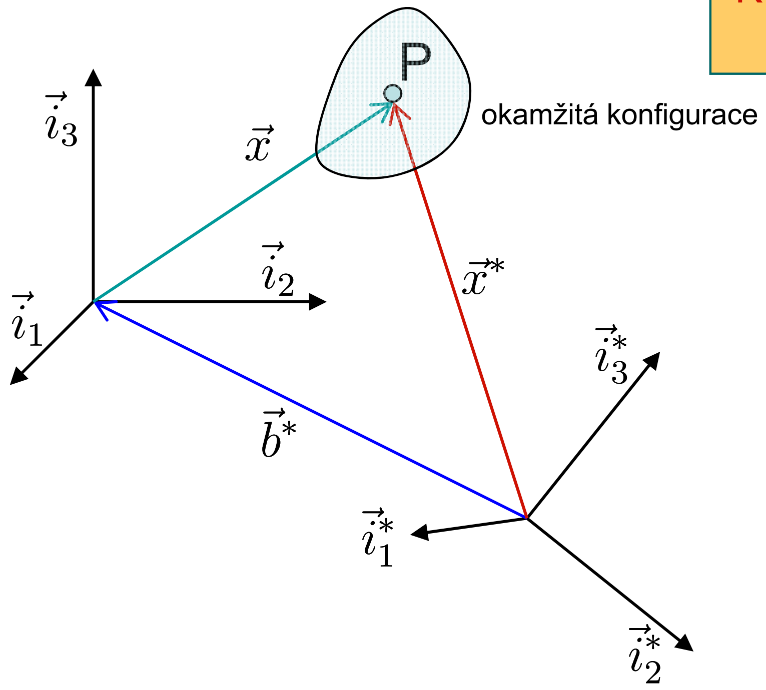
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\boxed{\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),}$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



Pohybující se pozorovatel

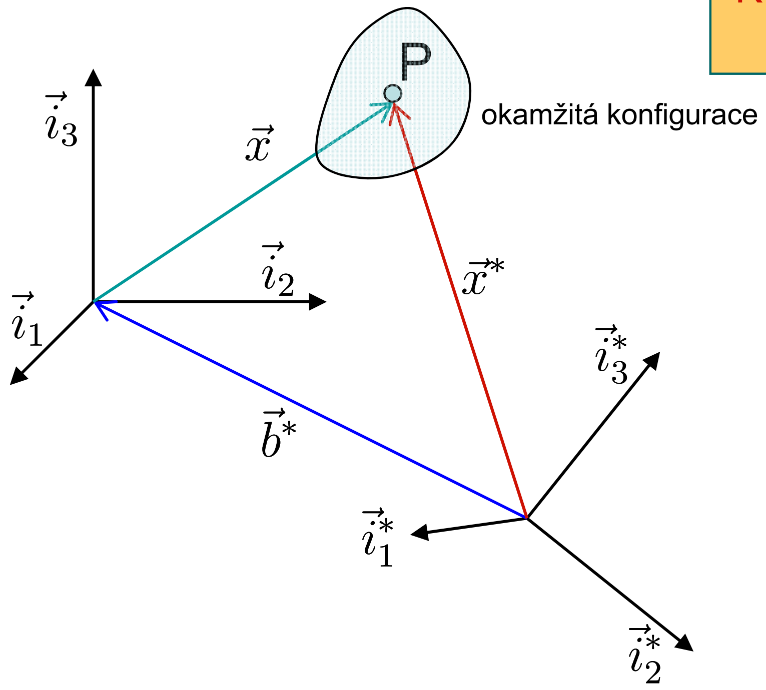
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\boxed{\vec{x}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{x} + \vec{b}^*(t),}$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



Tuto transformaci můžeme chápat jako změnu stanoviště pozorovatele. Veličinu charakterizujeme jako *objektivní*, pokud se při změně stanoviště pozorovatele nezmění.

Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$

Pohybující se pozorovatel

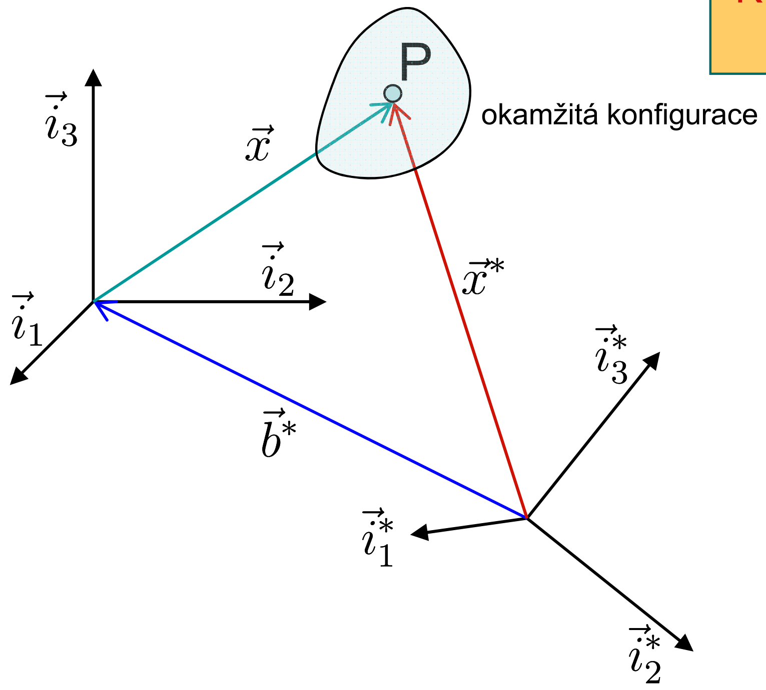
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\boxed{\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),}$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



Tuto transformaci můžeme chápat jako změnu stanoviště pozorovatele. Veličinu charakterizujeme jako *objektivní*, pokud se při změně stanoviště pozorovatele nezmění.

Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$

Týká se veličin
v okamžité konfiguraci!

Pohybující se pozorovatel

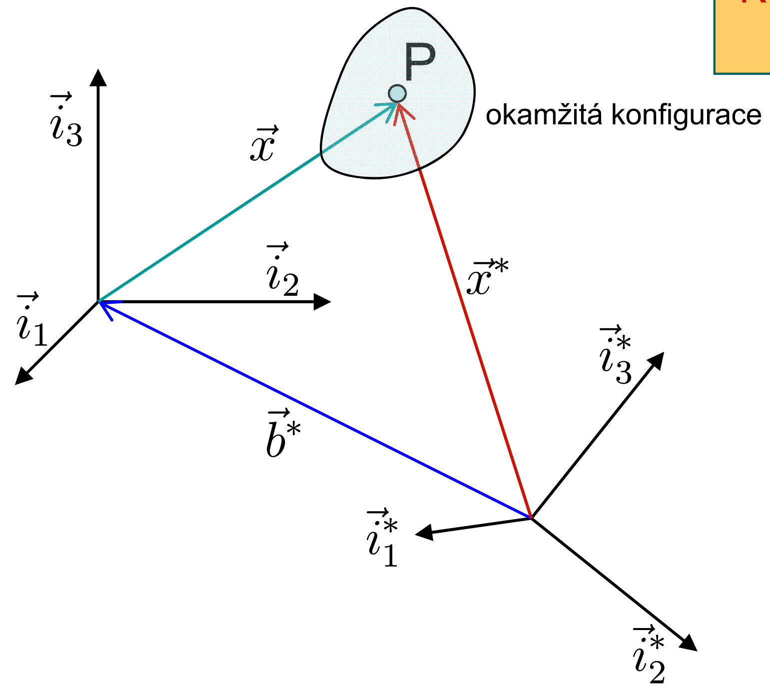
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\boxed{\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),}$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



Tuto transformaci můžeme chápat jako změnu stanoviště pozorovatele. Veličinu charakterizujeme jako *objektivní*, pokud se při změně stanoviště pozorovatele nezmění.

Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$

S pomocí zobrazení $\vec{\chi}$ můžeme transformaci zapsat jako $\vec{\chi}^*(\vec{X}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{\chi}(\vec{X}, t) + \vec{b}^*(t).$

Konstitutivní vztahy 2

Pohybující se pozorovatel

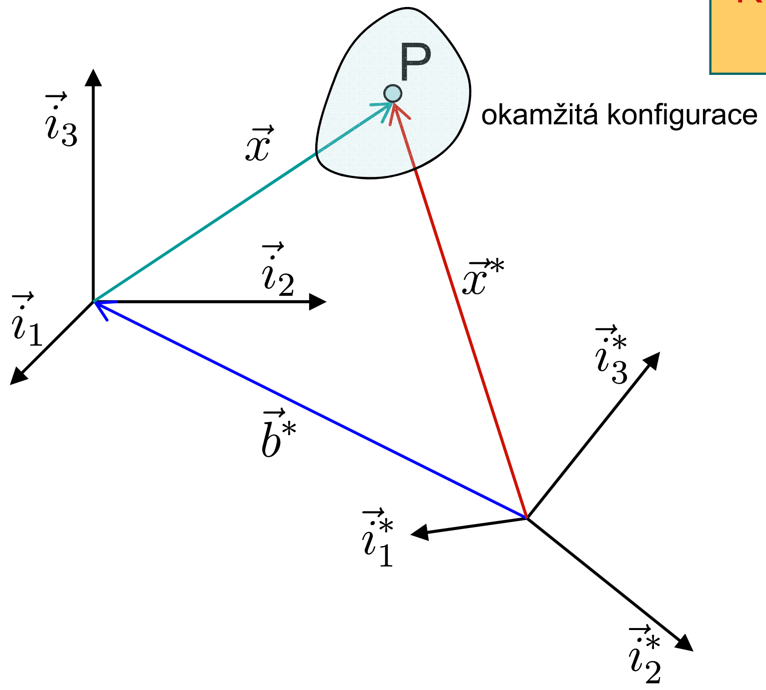
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\boxed{\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),}$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



Tuto transformaci můžeme chápat jako změnu stanoviště pozorovatele. Veličinu charakterizujeme jako *objektivní*, pokud se při změně stanoviště pozorovatele nezmění.

Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$

S pomocí zobrazení $\vec{\chi}$ můžeme transformaci zapsat jako $\vec{\chi}^*(\vec{X}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{\chi}(\vec{X}, t) + \vec{b}^*(t)$.
Zderivováním podle času dostaneme

rychlost: $\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$

zrychlení: $\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$.

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\mathbf{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t)\cdot\vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t)\cdot\vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t)\cdot\vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \longrightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O}\cdot\vec{v} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{v} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\left[\mathbf{O}^T\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t)\cdot\vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t)\cdot\vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) \right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{v}^* - \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) - \dot{\vec{b}}^*)$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{v}^* - \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) - \dot{\vec{b}}^*)$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + 2\mathbf{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\mathbf{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \dot{\cdot} \mathbf{O}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\mathbf{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\dot{}} = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\mathbf{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{0},\ \ddot{\vec{b}}^* = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}^* = \vec{V}t + \vec{b}_0^*, \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}$$

konstanty

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = \overset{\cdot}{(\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})} = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\mathbf{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{0},\ \ddot{\vec{b}}^* = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}^* = \underbrace{\vec{V} t + \vec{b}_0^*, \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}}_{\text{konstanty}}$$

Galileovská transformace $\vec{x}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{x} + \vec{V} t + \vec{b}_0^*$

Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0},\ \ddot{\vec{b}}^* = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}^* = \vec{V} t + \vec{b}_0^*, \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}$$

konstanty: $\vec{V}$, $\vec{b}_0^*$, $\mathbf{O}$

Galileovská transformace $\vec{x}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{x} + \vec{V} t + \vec{b}_0^*$

Vzhledem ke galileovské transformaci je zrychlení objektivní, ale rychlost zjevně objektivní není:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \vec{V}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Konstitutivní vztahy 4

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\operatorname{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[\mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \right]_k$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[\mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[O_{kl} v_l + \Omega_{kl} (x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^* \right] =$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[\mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[O_{kl} v_l + \Omega_{kl} (x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^* \right] =$$

$$= O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[\mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[O_{kl} v_l + \Omega_{kl} (x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^* \right] =$$

$$= O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[\mathbf{O} \cdot \vec{v} + \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[O_{kl} v_l + \Omega_{kl} (x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^* \right] =$$

$$= O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_k^*}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*}$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{x} = \mathbf{O}^T\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*)}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl} v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\operatorname{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \operatorname{div}\vec{v}$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\operatorname{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \operatorname{div}\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

Odvození: $F_{kK}^* = \dfrac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \dfrac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\dfrac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

Odvození: $F_{kK}^* = \dfrac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \dfrac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\dfrac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

S pomocí těchto vztahů lze snadno ukázat, že dříve zavedené objekty J, $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{d}$ mají následující transformační vlastnosti:

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t),$$

Objektivita některých geometrických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X}, t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X}, t).$

Odvození: $F_{kK}^* = \dfrac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \dfrac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\dfrac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

S pomocí těchto vztahů lze snadno ukázat, že dříve zavedené objekty J, $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{d}$ mají následující transformační vlastnosti:

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t),$$

Naopak gradient rychlosti není objektivní tenzor:

$$\boldsymbol{l}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t)$$

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

Příklad: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

Příklad: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

Příklad: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

Příklad: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^* = \vec{F}^* + \underline{m\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right)}$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

<u>Příklad</u>: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^* = \vec{F}^* + \underline{m\left(2\mathbf{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right)}$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Povšimněte si, že při odvození jsme mlčky **předpokládali**, že hmotnost a síla jsou objektivní veličiny.

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

<u>Příklad</u>: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^{*} = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{v}^{*} - \dot{\vec{b}}^{*}) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \ddot{\vec{b}}^{*}$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^{*} = \vec{F}^{*} + \underline{m\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^{*} - \dot{\vec{b}}^{*}) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \ddot{\vec{b}}^{*}\right)}$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Povšimněte si, že při odvození jsme mlčky **předpokládali**, že hmotnost a síla jsou objektivní veličiny.

Postulujme, že hustota ρ, vektor napětí $\vec{t}_{(\vec{n})}$, hustota vnitřní energie ϵ a normálový tepelný tok $h_{(\vec{n})} := \vec{q}\cdot\vec{n}$ jsou objektivní veličiny. Pak lze ukázat, že také tenzor napětí $\mathbf{t}$, vektor tepelného toku $\vec{q}$, gradient teploty $\vec{G}$ a Piola-Kirchhoffův tenzor $\mathbf{T}^{(\mathbf{2})}$ jsou objektivní.

Objektivita zákonů zachování

Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

Příklad: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^* = \vec{F}^* + m\left(2\mathbf{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right)$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Povšimněte si, že při odvození jsme mlčky **předpokládali**, že hmotnost a síla jsou objektivní veličiny.

Postulujme, že hustota ρ, vektor napětí $\vec{t}_{(\vec{n})}$, hustota vnitřní energie ϵ a normálový tepelný tok $h_{(\vec{n})} := \vec{q}\cdot\vec{n}$ jsou objektivní veličiny. Pak lze ukázat, že také tenzor napětí $\mathbf{t}$, vektor tepelného toku $\vec{q}$, gradient teploty $\vec{G}$ a Piola-Kirchhoffův tenzor $\mathbf{T}^{(2)}$ jsou objektivní.

Důkaz pro napěťový tenzor:

$$\vec{t}^*_{(\vec{n})} = \mathbf{O}\cdot\vec{t}_{(\vec{n})} \xrightarrow{\text{Cauchy}} \vec{n}^*\cdot\mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot(\vec{n}\cdot\mathbf{t}) \overset{\vec{n}\text{ je objektivní}}{=} (\mathbf{O}\cdot\vec{n})\cdot\mathbf{t}^* \rightarrow \vec{n}\cdot\left(\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{t}^* - \mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\right) = \vec{0} \rightarrow \mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

$$\vec{t}^*_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{t}^*_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^* \cdot \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$\vec{t}^{*}_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^{*} \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\mathbf{O} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$\vec{t}^*_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^* \cdot \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\mathbf{O} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\vec{n} \cdot \mathbf{O}^T) \cdot \mathbf{t}^* = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

$$\vec{t}^*_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^* \cdot \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\mathbf{O} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\vec{n} \cdot \mathbf{O}^T) \cdot \mathbf{t}^* = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

$$\vec{n} \cdot \left(\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{t}^* - \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}\right) = \vec{0}$$

$$\vec{t}^{*}_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^{*} \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\mathbf{O} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\vec{n} \cdot \mathbf{O}^{T}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^{T}$$

$$\vec{n} \cdot \left(\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{t}^{*} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}\right) = \vec{0}$$

$$\mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad {\mathbf{T}^{(2)}}^* = \mathbf{T}^{(2)}$$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad {\mathbf{T}^{(2)}}^* = \mathbf{T}^{(2)}$$

<u>Zákon zachování hmoty</u>

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underset{\boxed{=\rho^*}}{\underset{\uparrow}{\rho}}\, \underset{\boxed{=\operatorname{div}\vec{v}^*\text{, viz str. 9}}}{\underset{\uparrow}{\operatorname{div}}}\, \vec{v} = 0 \longrightarrow \frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^* \operatorname{div} \vec{v}^* = 0$$

… je objektivní.

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad \mathbf{T}^{(2)^*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Zákon zachování hmoty

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underbrace{\rho}_{=\rho^*}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{=\mathrm{div}\vec{v}^*\text{, viz str. 9}} = 0 \longrightarrow \frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^*\,\mathrm{div}\,\vec{v}^* = 0$$

... je objektivní.

Pohybová rovnice

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\ddot{\vec{x}}$$

Divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor (str. 3): $\mathrm{div}\,\mathbf{t}^* = \mathrm{div}\left(\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T\right) = \mathbf{O}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{t}$

Síla a hustota jsou objektivní: $\rho^*\vec{f}^* = \mathbf{O}\cdot(\rho\vec{f})$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad \mathbf{T}^{(2)^*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Zákon zachování hmoty

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underbrace{\rho}_{\boxed{=\rho^*}} \underbrace{\operatorname{div} \vec{v}}_{\boxed{=\operatorname{div}\vec{v}^*\text{, viz str. 9}}} = 0 \longrightarrow \frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^* \operatorname{div} \vec{v}^* = 0$$

... je objektivní.

Pohybová rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \ddot{\vec{x}}$$

Divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor (str. 3): $\operatorname{div} \mathbf{t}^* = \operatorname{div} \left(\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T \right) = \mathbf{O} \cdot \operatorname{div} \mathbf{t}$

Síla a hustota jsou objektivní: $\rho^* \vec{f}^* = \mathbf{O} \cdot (\rho \vec{f})$

Pohybová rovnice je tedy objektivní až na nepravé síly:

$$\operatorname{div} \mathbf{t}^* + \rho^* \vec{f}^* + \rho^* \left(2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^* \right) = \rho^* \ddot{\vec{x}}^*$$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad \mathbf{T}^{(2)^*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Zákon zachování hmoty

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underbrace{\rho}_{=\rho^*} \, \underbrace{\mathrm{div}\, \vec{v}}_{=\mathrm{div}\vec{v}^*\text{, viz str. 9}} = 0 \longrightarrow \frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^* \,\mathrm{div}\, \vec{v}^* = 0$$

... je objektivní.

Pohybová rovnice

$$\mathrm{div}\, \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \ddot{\vec{x}}$$

Divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor (str. 9): $\mathrm{div}\, \mathbf{t}^* = \mathrm{div}\left(\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T\right) = \mathbf{O} \cdot \mathrm{div}\, \mathbf{t}$

Síla a hustota jsou objektivní: $\rho^* \vec{f}^* = \mathbf{O} \cdot (\rho \vec{f})$

Pohybová rovnice je tedy objektivní až na nepravé síly:

$$\mathrm{div}\, \mathbf{t}^* + \rho^* \vec{f}^* + \rho^* \left(2\mathbf{\Omega} \cdot (\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right) = \rho^* \ddot{\vec{x}}^*$$

Zákon zachování energie

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} + \mathrm{div}\, \vec{q} + \rho h \longrightarrow \rho^* \frac{D\epsilon^*}{Dt} = \mathbf{t}^* : \mathbf{d}^* + \mathrm{div}\, \vec{q}^* + \rho^* h^*$$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad {\mathbf{T}^{(2)}}^* = \mathbf{T}^{(2)}$$

Zákon zachování hmoty

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underbrace{\rho}_{=\rho^*}\,\underbrace{\operatorname{div}\vec{v}}_{=\operatorname{div}\vec{v}^*\text{, viz str. 9}} = 0 \longrightarrow \frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^*\operatorname{div}\vec{v}^* = 0$$

... je objektivní.

Pohybová rovnice

$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\ddot{\vec{x}}$$

Divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor (str. 3): $\operatorname{div}\mathbf{t}^* = \operatorname{div}\left(\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T\right) = \mathbf{O}\cdot\operatorname{div}\mathbf{t}$

Síla a hustota jsou objektivní: $\rho^*\vec{f}^* = \mathbf{O}\cdot(\rho\vec{f})$

Pohybová rovnice je tedy objektivní až na nepravé síly:

$$\operatorname{div}\mathbf{t}^* + \rho^*\vec{f}^* + \rho^*\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right) = \rho^*\ddot{\vec{x}}^*$$

Zákon zachování energie

$$\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t}:\mathbf{d} + \operatorname{div}\vec{q} + \rho h \longrightarrow \rho^*\frac{D\epsilon^*}{Dt} = \mathbf{t}^*:\mathbf{d}^* + \operatorname{div}\vec{q}^* + \rho^* h^*$$

$$\boxed{\mathbf{t}^*:\mathbf{d}^* = (\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T):(\mathbf{O}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{O}^T) = (O_{ij}t_{jk}O_{lk})(O_{lm}d_{mn}O_{in}) = \mathbf{t}:\mathbf{d}}$$

Objektivita zákonů zachování - pokračování

Platí tedy

$$\rho^* = \rho, \quad \epsilon^* = \epsilon, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T$$

Dále lze ukázat, že

$$\vec{q}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{q}, \quad \vec{G}^* = \vec{G}, \quad \mathbf{T}^{(2)^*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Zákon zachování hmoty

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underbrace{\rho}_{=\rho^*}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{=\mathrm{div}\vec{v}^*\text{, viz str. 9}} = 0 \longrightarrow \frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^*\,\mathrm{div}\,\vec{v}^* = 0$$

... je objektivní.

Pohybová rovnice

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\ddot{\vec{x}}$$

Divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor (str. 3): $\mathrm{div}\,\mathbf{t}^* = \mathrm{div}\,(\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T) = \mathbf{O}\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{t}$

Síla a hustota jsou objektivní: $\rho^*\vec{f}^* = \mathbf{O}\cdot(\rho\vec{f})$

Pohybová rovnice je tedy objektivní až na nepravé síly:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t}^* + \rho^*\vec{f}^* + \rho^*\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right) = \rho^*\ddot{\vec{x}}^*$$

Zákon zachování energie

$$\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t}:\mathbf{d} + \mathrm{div}\,\vec{q} + \rho h \longrightarrow \rho^*\frac{D\epsilon^*}{Dt} = \mathbf{t}^*:\mathbf{d}^* + \mathrm{div}\,\vec{q}^* + \rho^* h^*$$

$$\boxed{\mathbf{t}^*:\mathbf{d}^* = (\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T):(\mathbf{O}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{O}^T) = (O_{ij}t_{jk}O_{lk})(O_{lm}d_{mn}O_{in}) = \mathbf{t}:\mathbf{d}}$$

zdroje jsou objektivní (postulát)

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^* \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{a}^*}$

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^{*} = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^{*} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{a}^{*}}$

Tenzor: $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{A}^{*} - \mathbf{A}^{*} \cdot \mathbf{\Omega}}$

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^* \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^* \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \mathbf{\Omega} \cdot \vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Vektor:} & \overset{\triangledown}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l} \cdot \vec{a} \\[2ex] \text{Tenzor:} & \overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{l}^{\mathbf{T}} \end{array}}$$

$\longleftarrow$ Oldroydova

neboli

horní kovektivní derivace

(*upper convected derivative*)

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad\rightarrow\quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^* \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \mathbf{\Omega}\cdot\vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^*\cdot\mathbf{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{Vektor:} & \overset{\triangledown}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a} \\[2ex] \text{Tenzor:} & \overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}\end{array}}$$

$\longleftarrow$

Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\triangledown}{\vec{a}^*} = \dot{\vec{a}}^* - \boldsymbol{l}^*\cdot\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \left(\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \Omega\right)\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\triangledown}{\vec{a}}$$

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^* \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Vektor: $\overset{\triangledown}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}$

$\longleftarrow$ Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\triangledown}{\vec{a}^*} = \dot{\vec{a}}^* - \boldsymbol{l}^*\cdot\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \left(\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \cancel{\dot{\mathbf{O}}}\cdot\vec{a} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\underline{\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\cancel{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\triangledown}{\vec{a}}$$

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad\rightarrow\quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^* \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Vektor:} & \overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a} \\[2ex] \text{Tenzor:} & \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}} \end{array}} \quad \longleftarrow$$

Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\nabla}{\vec{a}^*} = \dot{\vec{a}}^* - \boldsymbol{l}^*\cdot\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - (\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \cancel{\dot{\mathbf{O}}}\cdot\vec{a} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\underline{\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\cancel{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\nabla}{\vec{a}}$$

Materiálová derivace není definována jednoznačně. Lze ukázat, že pro libovolný objektivní tenzor je následující derivace objektivní, pokud je parametr α z intervalu <-1,1>:

$$\boxed{\left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}\right)_{\alpha} = \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{w}) + \alpha\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{d})}$$

Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^* \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Vektor:} & \overset{\triangledown}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l} \cdot \vec{a} \\ \text{Tenzor:} & \overset{\triangledown}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{l}^{\mathbf{T}} \end{array}} \quad \longleftarrow$$

Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\triangledown}{\vec{a}^*} = \dot{\vec{a}}^* - \boldsymbol{l}^* \cdot \vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} - \left(\mathbf{O} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\right) \cdot \mathbf{O} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \cancel{\dot{\mathbf{O}}} \cdot \vec{a} - \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \underline{\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}} \cdot \vec{a} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \cancel{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l} \cdot \vec{a}\right) = \mathbf{O} \cdot \overset{\triangledown}{\vec{a}}$$

Materiálová derivace není definována jednoznačně. Lze ukázat, že pro libovolný objektivní tenzor je následující derivace objektivní, pokud je parametr α z intervalu <-1,1>:

$$\boxed{\left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right)_\alpha = \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}) + \alpha\,(\mathbf{d} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{d})} \qquad \begin{cases} \alpha = -1 & \longleftarrow \\ \alpha = 0 & \longleftarrow \end{cases}$$

$\alpha = -1$: Oldroydova horní konvektivní derivace

$\alpha = 0$: Jaumannova korotační derivace

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\underset{\vec{X}' \in B,\, \tau \leq t}{\mathcal{R}} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \underset{\vec{X}' \in B,\, \tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right]$$

$$\vec{q}(\vec{X}, t) = \underset{\vec{X}' \in B,\, \tau \leq t}{\mathcal{Q}} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right]$$

$$\epsilon(\vec{X}, t) = \underset{\vec{X}' \in B,\, \tau \leq t}{\mathcal{E}} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right]$$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$
$$\vec{q}(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{Q}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$
$$\epsilon(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{E}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathop{\mathcal{R}}_{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\mathop{\mathcal{F}}_{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$
$$\vec{q}(\vec{X},t)=\mathop{\mathcal{Q}}_{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$
$$\epsilon(\vec{X},t)=\mathop{\mathcal{E}}_{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

$$\rho(\vec{X}',\tau)\approx\rho(\vec{X},\tau)+\mathrm{Grad}\,\rho(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}$$
$$\chi(\vec{X}',\tau)\approx\chi(\vec{X},\tau)+\mathbf{F}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}$$
$$T(\vec{X}',\tau)\approx T(\vec{X},\tau)+\vec{G}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X},\quad \text{kde}\quad \vec{G}:=\mathrm{Grad}\,T,\ d\vec{X}=\vec{X}'-\vec{X}.$$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$
$$\vec{q}(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{Q}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$
$$\epsilon(\vec{X},t)=\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\leq t}{\mathcal{E}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

$$\rho(\vec{X}',\tau)\approx\rho(\vec{X},\tau)+\mathrm{Grad}\,\rho(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}$$
$$\chi(\vec{X}',\tau)\approx\chi(\vec{X},\tau)+\mathbf{F}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}$$
$$T(\vec{X}',\tau)\approx T(\vec{X},\tau)+\vec{G}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X},\quad \text{kde}\quad \vec{G}:=\mathrm{Grad}\,T,\ d\vec{X}=\vec{X}'-\vec{X}.$$

Potom

$$\boxed{\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]}$$

a analogicky pro $\vec{q}$ a ϵ. Závislost na hustotě a gradientu hustoty je zahrnuta v deformačním gradientu $\mathbf{F}$.

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{R}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\mathbf{t}(\vec{X}',\tau),\vec{q}(\vec{X}',\tau),\epsilon(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]=0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(\vec{X},t) &= \underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]\\
\vec{q}(\vec{X},t) &= \underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{Q}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]\\
\epsilon(\vec{X},t) &= \underset{\vec{X}'\in B,\,\tau\le t}{\mathcal{E}}\left[\rho(\vec{X}',\tau),\chi(\vec{X}',\tau),T(\vec{X}',\tau),\vec{X}\right]
\end{aligned}$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

$$\rho(\vec{X}',\tau)\approx\rho(\vec{X},\tau)+\mathrm{Grad}\,\rho(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}$$

$$\chi(\vec{X}',\tau)\approx\chi(\vec{X},\tau)+\mathbf{F}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X}$$

$$T(\vec{X}',\tau)\approx T(\vec{X},\tau)+\vec{G}(\vec{X},\tau)\cdot d\vec{X},\quad \text{kde}\quad \vec{G}:=\mathrm{Grad}\,T,\ d\vec{X}=\vec{X}'-\vec{X}.$$

Potom

$$\boxed{\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]}\quad\longleftarrow\ \text{jednoduché materiály}$$

a analogicky pro $\vec{q}$ a ϵ. Závislost na hustotě a gradientu hustoty je zahrnuta v deformačním gradientu $\mathbf{F}$.

Materiálová objektivita

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}(\vec{X},t) &= \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}^*\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X},t) &= \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}^*}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{t} &= \lambda(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I}+\mu\left(\operatorname{grad}\vec{u}+(\operatorname{grad}\vec{u})^T\right] \\ \mathbf{t}^* &= \lambda^*(\operatorname{div}\vec{u}^*)\mathbf{I}+\mu^*\left(\operatorname{grad}\vec{u}^*+(\operatorname{grad}\vec{u}^*)^T\right] \end{aligned}}$$

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}^*}_{\tau\leq t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{t}(\vec{X},t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t) =$$

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}(\vec{X},t) &= \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}{}^*\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X},t)=\mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{t}(\vec{X},t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=\mathbf{O}(t)\cdot\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=$$

$$=\underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]=$$

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}^*}_{\tau\leq t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X},t)=\mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{t}(\vec{X},t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=\mathbf{O}(t)\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=$$

$$\left.\begin{aligned} &=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]= \\ &=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}(\tau)\cdot\chi(\vec{X},\tau)+\vec{b}^*(\tau),\mathbf{O}(\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \end{aligned}\right\}$$

Zde již vynecháváme hvězdičku u funkcionálu $\mathcal{F}^*$.

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}^*}_{\tau\le t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X},t)=\mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{t}(\vec{X},t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=\mathbf{O}(t)\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=$$

$$\left.\begin{aligned}&=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]=\\ &=\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\le t}\left[\mathbf{O}(\tau)\cdot\chi(\vec{X},\tau)+\vec{b}^*(\tau),\mathbf{O}(\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\}$$

Zde již vynecháváme hvězdičku u funkcionálu $\mathcal{F}^*$.

Tento vztah musí platit pro libovolné $\mathbf{O}(\tau)$ a $\vec{b}^*(\tau)$, tedy i pro $\mathbf{O}(\tau)=\mathbf{I}$, $\vec{b}^*(\tau)=-\vec{\chi}(\vec{X},\tau)$.

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \mathop{\mathcal{F}^*}_{\tau\leq t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{t}(\vec{X},t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t) =$$

$$\left.\begin{aligned}&= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] =\\ &= \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}(\tau)\cdot\chi(\vec{X},\tau)+\vec{b}^*(\tau),\mathbf{O}(\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\end{aligned}\right\}$$

Zde již vynecháváme hvězdičku u funkcionálu $\mathcal{F}^*$.

Tento vztah musí platit pro libovolné $\mathbf{O}(\tau)$ a $\vec{b}^*(\tau)$, tedy i pro $\mathbf{O}(\tau)=\mathbf{I}$, $\vec{b}^*(\tau) = -\vec{\chi}(\vec{X},\tau)$.

Dostáváme pak

$$\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\vec{0},\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]$$

Materiálová objektivita

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X},t) &= \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X},t) &= \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}^*}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right] \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathcal{F}(\bullet)=\mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X},t)=\mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{t}(\vec{X},t)\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=\mathbf{O}(t)\cdot\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)=$$

$$=\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi^*(\vec{X},\tau),\mathbf{F}^*(\vec{X},\tau),T^*(\vec{X},\tau),\vec{G}^*(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]=$$

$$=\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{O}(\tau)\cdot\chi(\vec{X},\tau)+\vec{b}^*(\tau),\mathbf{O}(\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]$$

Zde již vynecháváme hvězdičku u funkcionálu $\mathcal{F}^*$.

Tento vztah musí platit pro libovolné $\mathbf{O}(\tau)$ a $\vec{b}^*(\tau)$, tedy i pro $\mathbf{O}(\tau)=\mathbf{I}$, $\vec{b}^*(\tau)=-\vec{\chi}(\vec{X},\tau)$.

Dostáváme pak

$$\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\chi(\vec{X},\tau),\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]=\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\vec{0},\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]$$

a tedy

$$\mathbf{t}(\vec{X},t)=\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau),T(\vec{X},\tau),\vec{G}(\vec{X},\tau),\vec{X}\right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \leq t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)\cdot \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}(\vec{X},t) = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X} \right] = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X} \right] = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}\right] = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right] \cdot \mathbf{O}^T = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}\right] = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T} = \mathbf{O} \cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right] \cdot \mathbf{O}^T = \underline{\mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]}$$

$$\mathbf{t} = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}\right] = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T} = \mathbf{O}\cdot\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^T = \underline{\underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]}$$

$$\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T = \underset{\tau\leq t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t} = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X} \right] = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T} = \mathbf{O} \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T = \underline{\underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]}$$

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{O}^T \cdot \underset{\tau \leq t}{\mathcal{F}} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}$$

$$\mathbf{t} = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}\right] = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T} = \mathbf{O}\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}^T = \underline{\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]}$$

$$\mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^T = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{O}^T\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]\cdot\mathbf{O}$$

$$\mathbf{O} = \mathbf{R}^T \quad\Rightarrow\quad \mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{U}, T, \vec{G}, \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^T$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t) \cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] = \mathbf{R}(\vec{X},t) \cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau \le t}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)\cdot \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}(\vec{X},t) = \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Jedná se o nutnou a současně i postačující podmínku materiálové objektivity (pro důkaz druhého tvrzení použij, že $\mathbf{O}\cdot\mathbf{F} = (\mathbf{O}\cdot\mathbf{R})\cdot\mathbf{U}$).

Reologický vztah pro jednoduché materiály lze tedy v materiálově objektivním tvaru vyjádřit jako

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \underset{\tau\le t}{\mathcal{F}}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

nebo, použijeme-li $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \underset{\tau\le t}{\bar{\mathcal{F}}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

nebo, použijeme-li $\mathbf{R} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t)\cdot \underset{\tau\le t}{\tilde{\mathcal{F}}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},\tau)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{F}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Jedná se o nutnou a současně i postačující podmínku materiálové objektivity (pro důkaz druhého tvrzení použij, že $\mathbf{O}\cdot\mathbf{F} = (\mathbf{O}\cdot\mathbf{R})\cdot\mathbf{U}$).

Reologický vztah pro jednoduché materiály lze tedy v materiálově objektivním tvaru vyjádřit jako

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\mathcal{F}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{U}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

nebo, použijeme-li $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\bar{\mathcal{F}}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{R}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

nebo, použijeme-li $\mathbf{R} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}$

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\tilde{\mathcal{F}}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]\cdot\mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)$$

Analogicky lze odvodit také materiálově objektivní tvary ostatních konstitutivních vztahů:

$$\vec{q}(\vec{X},t) = \mathbf{R}(\vec{X},t)\cdot \mathop{\mathcal{Q}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

$$\epsilon(\vec{X},t) = \mathop{\mathcal{E}}_{\tau\leq t}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

materiálově objektivní tvary reologických vztahů pro jednoduché materiály

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$,

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \underset{\tau \leq t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \, .$$

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \underset{\tau \leq t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \,.$$

Dostaneme pak

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \underset{\tau \leq t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} =$$

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \underset{\tau \leq t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t)\,.$$

Dostaneme pak

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \underset{\tau \leq t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} =$$

$$= \sqrt{(\det C)}\, \underset{\tau \leq t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X}\right] = \underset{\tau \leq t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X}\right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)\,.$$

Dostaneme pak

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau \le t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} =$$

$$= \sqrt{(\det C)}\, \underset{\tau \le t}{\tilde{\mathcal{F}}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right] = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right]$$

$$\boxed{\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{G}} \left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X} \right]} \quad \longleftarrow$$

materiálově objektivní tvar reologického vztahu pro PK-2

Materiálová objektivita - pokračování

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X},t) = \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau\le t}{\tilde{\mathcal{F}}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t)\,.$$

Dostaneme pak

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X},t) \cdot \underset{\tau\le t}{\tilde{\mathcal{F}}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X},t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} =$$

$$= \sqrt{(\det C)}\, \underset{\tau\le t}{\tilde{\mathcal{F}}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right] = \underset{\tau\le t}{\mathcal{G}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X},t) = \underset{\tau\le t}{\mathcal{G}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]} \quad \longleftarrow$$

materiálově objektivní tvar reologického vztahu pro PK-2

Analogicky pak dostaneme pro tepelný tok v referenční konfiguraci (použij $\vec{Q} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{q}$):

$$\boxed{\vec{Q}(\vec{X},t) = \underset{\tau\le t}{\tilde{\mathcal{Q}}}\left[\mathbf{C}(\vec{X},\tau), T(\vec{X},\tau), \vec{G}(\vec{X},\tau), \vec{X}\right]}$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{\Pi} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{\Pi} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{T}$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}})}_{\downarrow} = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \boldsymbol{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Derivací kinematické vazby podle času dostaneme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}}.$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Derivací kinematické vazby podle času dostaneme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}}.$

Uvažujme nyní nestlačitelný materiál, tj. kinematickou podmínku ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} - 1 = 0.$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Derivací kinematické vazby podle času dostaneme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}}.$

Uvažujme nyní nestlačitelný materiál, tj. kinematickou podmínku ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} - 1 = 0.$

Potom $\mathbf{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} = \alpha \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}(\det \mathbf{C} - 1) = \alpha (\det \mathbf{C})\, \mathbf{C}^{-\mathbf{1}} = \alpha \mathbf{C}^{-\mathbf{1}}$ kde jsme použili identitu $\dfrac{d}{d\mathbf{A}}(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{A}^{-\mathbf{T}}$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \boldsymbol{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Derivací kinematické vazby podle času dostaneme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}}.$

Uvažujme nyní nestlačitelný materiál, tj. kinematickou podmínku ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} - 1 = 0.$

Potom $\boldsymbol{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} = \alpha \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}(\det \mathbf{C} - 1) = \alpha (\det \mathbf{C})\, \mathbf{C}^{-\mathbf{1}} = \alpha \mathbf{C}^{-\mathbf{1}}$ kde jsme použili identitu $\dfrac{d}{d\mathbf{A}}(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{A}^{-\mathbf{T}}$

Zaveďme „tlak“ jako $p = -\alpha$.

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivity vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0.$

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídavný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{1}}) = \frac{1}{2J}(\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Derivací kinematické vazby podle času dostaneme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}}.$

Uvažujme nyní nestlačitelný materiál, tj. kinematickou podmínku ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} - 1 = 0.$

Potom $\mathbf{\Pi} = \alpha \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} = \alpha \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}(\det \mathbf{C} - 1) = \alpha (\det \mathbf{C})\, \mathbf{C}^{-\mathbf{1}} = \alpha \mathbf{C}^{-\mathbf{1}}$ kde jsme použili identitu $\dfrac{d}{d\mathbf{A}}(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{A}^{-\mathbf{T}}$

Zaveďme „tlak“ jako $p = -\alpha$. Reologické vztahy pro nestlačitelný materiál pak můžeme psát ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{T}^{(2)} = -p\mathbf{C}^{-1} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G}), \quad \mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})}$$