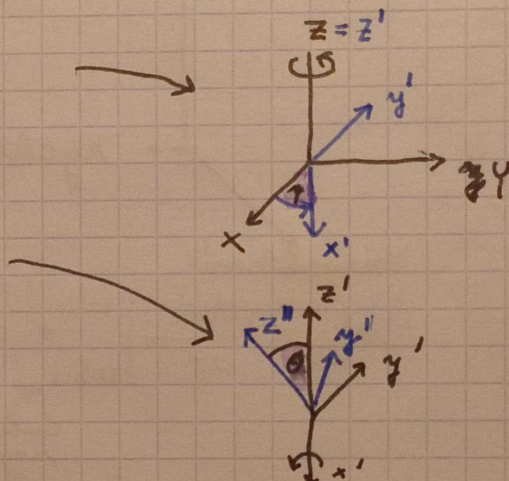


# Tíhové pole Země a planet

## I. Úvod

### Precese, nutace, rotace

- pomoci tří úhlů umím popsat vzájemné natočení mezi  $X, Y, Z$  (přirodní) a  $x, y, z$  (nové)
- precesní úhel  $\psi$ 
  - otáčím okolo  $Z$
- nutační úhel  $\Theta$ 
  - otáčím okolo  $x'$
- rotační úhel  $\phi$ 
  - otáčím okolo  $z''$



lepsi  
obrazek  
skriptu/  
Podobny

### Sférické souřadnice

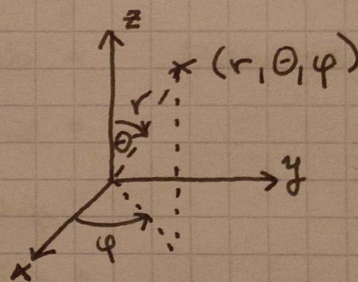
$\Theta$  - ko-sířka (co-latitude)  $\in [0, 180]$

-  $0^\circ$  = severní pól,  $180^\circ$  = jižní pól

$\varphi$  - délka (longitude)  $\in [0, 360^\circ]$

- pro Zemi east-positive

- pro některá tělesa (Europa, Enceladus)  
west-positive



### Země - charakteristické hodnoty

rovníkový / polární poloměr = 6378 / 6357 km

rovníkové / polární zploštění =  $\frac{1}{90000} / \frac{1}{300}$

povrchová gravitace =  $9,76 \text{ m/s}^2$  Peru

$9,83 \text{ m/s}^2$  Arktický oceán

**solární den** - 86400 s

- rotace kolem osy pale, že se Slunce nachází na stejném místě na obloze

**siderický (hvězdny) den** - 86164,09 s

- vzdálené hvězdy se nacházejí na stejném místě na obloze

## **Teoretická mechanika**

**neinerciální soustava** - inerciální je pevná, neinerciální se může v čase vyvíjet

- ko-rotací báze  $\mathbf{e}_i'(t) = A_{ij}(t) \mathbf{e}_j$

A ortogonální

rychlost

$$\left. \vec{v} \right|_{IS} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{cos} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

zrychlení

$$\left. \mathbf{a} \right|_{IS} = \left. \frac{d\mathbf{v}_{cos}}{dt} \right|_{cos} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{Eulerovo zrych.}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_{cos}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Dobředinovo zrych.}}$$

**rotace**

• definice :  $\vec{\Omega} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A}^T$

• z ortogonalit  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{1}$

plyne  $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$

• tři nezávislé členy, (pseudo) vektor rotace :

$$\vec{\omega} = (\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12})$$

**Eulerovy kinematické rovnice**

• maticový zápis rotace

• přechod  $\vec{x}' = \mathbf{D} \cdot \vec{x}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{\omega}_D = (0, 0, \dot{\varphi})$$

• nutace  $\vec{x}'' = C \cdot D \cdot \vec{x}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$   
 $\vec{\omega}_C = (\dot{\varepsilon}, 0, 0)$

• rotace  $\vec{x}''' = B \cdot C \cdot D \cdot \vec{x}, B = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $\vec{\omega}_B = (0, 0, \dot{\phi})$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_B + B \cdot \vec{\omega}_C + B \cdot C \cdot \vec{\omega}_D$$

nebo ve složkách

$$\omega_1 = \dot{\varepsilon} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \varepsilon \sin \phi$$

$$\omega_2 = -\dot{\varepsilon} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \varepsilon \cos \phi$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \varepsilon$$

$\Rightarrow$  transformace mezi úhlovými rychlostmi a změnami Eulerových úhlů

## Tenzor setrvačnosti

- moment hybnosti

$$\vec{L} = \int_{\Omega} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

- průmět do směru  $\vec{\zeta}$

$$I(\vec{\zeta}, \vec{\omega}) := \vec{L} \cdot \vec{\zeta} = I_{ij} \zeta_i \omega_j$$

(metricka odvodit)

- po dalších úpravách

$$I_{ij} = \int_{\Omega} (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) dm$$

nebo invariantní podoba

$$I = \int_{\Omega} (\vec{r} \cdot \vec{r} \parallel - \vec{r} \vec{r}) dm$$

## Eulerovy dynamické rovnice

- moment síly  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

- Eulerovy dyn. rovnice

$$M_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y$$

$\Rightarrow$  vývoj úhlové rychlosti v závislosti na působících momentech

## II. Teorie potenciálu

### Konzervativní pole

#### Definice:

- Nechť
- $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  je vektorové pole
  - $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je def. obor  $F$

Pak  $F$  nazýváme konzervativní, pokud

- existuje skal. potenc. funkce  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

- $F$  lze vyjádřit jako  $F = \nabla V$

#### Věta (jednoznačnost):

- Nechť
- $F$  je konzervativní na  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

- $F$  má dvě potenciální funkce  $V_1$  a  $V_2$

- Pak
- existuje  $C \in \mathbb{R}$  taková, že  $V_2 = V_1 + C$

#### Věta (Ekvivalence vlastností):

- Nechť
- $F$  je vektorové pole

Pak je ekvivalentní

- $F$  je konzervativní

- Křivkový integrál  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$  nezávisí na cestě, jen na krajních bodech  $\gamma$

- Křivkový integrál po uzavřené křivce  $\gamma$  je nulový  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

#### Věta (Nulná podmínka konzervativnosti):

- Nechť
- $F$  je spojitě diferencovatelné vekt. pole s potenciálem na  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Pak platí

$$a \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ na } \Omega \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\nabla \times F = 0$$

**Věta** (Dostatečná podmínka konzervativnosti):

Nechť  $\mathbf{F}$  je spojitě dif. na  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

• pro  $\mathbf{F}$  platí

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ na } \Omega \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

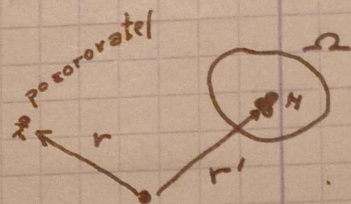
$\Leftrightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Pak  $\mathbf{F}$  je konzervativní.

## Newtonův gravitační zákon

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dm'$$



- pokud je definována hustota, můžeme psát

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\Omega$$

- gravitační potenciál definujeme:

$$\vec{g} = -\nabla V$$

- gravitační potenciál u pozorovatele v  $\vec{r}$ :

$$V(\vec{r}) = G \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega' + C$$

## Gravitační potenciál racionálních útvarů

**Sféra**

$$V(r) = \frac{GM}{r}, \quad r > R$$

**Rovina**

$$V(z) = -2\pi G \sigma_0 z$$

**Přímka**

$$V(z) = -2G\lambda_0 \ln z$$

→ Odvození ve skriptech, na přednášce jsme nedělali (myslím)

## Poissonova a Laplaceova rovnice

→ Z Newtonova zákona chceme dostat diferenciální podobu

$$\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) = \nabla^2 V = G \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Omega'$$

!  $\nabla$  vůči NEčíslovaným souřadnicím

\* broška magie \*

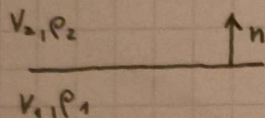
dostanu  $\nabla^2 V(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})$  - Poissonova rovnice

Ohranové podmínky!

-> potenciál na rozhraní je spojitý

$$V_1(r) = V_2(r)$$

-> gradient potenciálu splňuje



$$\vec{n} \cdot \nabla V_2 - \vec{n} \cdot \nabla V_1 = -4\pi G \sigma$$

-> plošná hustota

Laplaceova rovnice

-> vzniká z Poissonovy mimo všechna tělesa (nulová hustota)

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Řešení Laplaceovy rovnice

Rovinné hranice

- potenciál daný pro  $z=0$

- separace  $V(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 = YZ \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

$$0 = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

$\Rightarrow$  pokud  $a+b+c=0$  pak

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = a X(x)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = b Y(y)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = c Z(z)$$

hlomada řešení podle znamének

$$a = \pm k_x^2 / 0$$

řešení

- pro  $z \geq 0$  které  $v \rightarrow \infty$  ne diverguje:  $k_z < 0 \Rightarrow k_z = -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

$$V(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \exp(ik_x x) \exp(ik_y y) \exp(-\sqrt{k_x^2 + k_y^2} z) dk_x dk_y$$

- pro 4 dostanu podmínku  $z=0$

### Sférické hranice

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \sin \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \nu} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$= V(r, \nu, \varphi) = R(r) T(\nu) P(\varphi)$$

$$\circ P(\varphi) : \exp(\pm i m \varphi)$$

$$\circ R(r) : \left\{ r^L, \frac{1}{r^{L+1}} \right\}$$

$$\circ T(\nu) : P_L^m(\cos \nu)$$

$\rightarrow P(\varphi)$  a  $T(\nu)$  se dávají dohromady jako harmoniky

$$\Rightarrow V(r, \nu, \varphi) \sim \left\{ \begin{matrix} r^L \\ r^{-(L+1)} \end{matrix} \right\} Y_L^m(\nu, \varphi)$$

## III. Legendrovy polynomy a sférické harmoniky

### Definice a generující funkce

- $\cos \varphi$  značíme jako  $x$
- také používáme notaci  $\tilde{r} \rightarrow r$ , kde  $\tilde{r} = \frac{r}{r_1}$  nebo  $\frac{r_1}{r}$  tak, aby  $\tilde{r} < 1$
- abychom dostali legendrovy polynomy, děláme Taylorův rozvoj u okolo nuly

$$g(r, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l g(r, x)}{\partial r^l} \right|_{r=0} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$$

### Vlastnosti LP

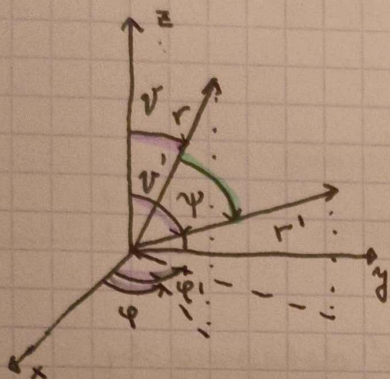
- $\circ P_L(\pm 1) = (\pm 1)^L$
- $\circ P_{2k}(x)$  jsou sudé,  $P_{2k+1}$  jsou liché
- $\circ P_L(x)$  jsou ortogonální, tedy

$$\int_{-1}^1 P_L(x) P_M(x) dx = \delta_{LM} C$$

◦ norma  $P_\ell$  je  $\sqrt{\frac{2}{2\ell+1}}$

◦  $P_\ell(x)$  jsou omezené

## Adiční teorém pro sférické harmoniky



- zatím máme LP vyjádření pomocí  $\psi$ , chci vyjádřit pomocí  $\theta$  a  $\varphi$

- pro plně normalizované SH dávat adiční teorém:

$$P_\ell(\cos \psi) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) (Y_\ell^m)^*(\theta', \varphi')$$

↑ závisí na normalizaci

## Gravitační potenciál mírně rovněné koule

◦ mírně rovněný povrch

$$r_s(\theta', \varphi') = R \left( 1 + \sum_{\ell, m} \epsilon_{\ell, m} Y_\ell^m(\theta', \varphi') \right), \quad \epsilon_{\ell, m} \ll 1$$

◦ přepíšu topografii pomocí povrchové hustoty,  $\ell' \geq 2$

$$\sigma(r', \theta', \varphi') = \Delta \rho R \sum_{\ell, m} \epsilon_{\ell, m} Y_\ell^m(\theta', \varphi') \delta(r' - R)$$

## Pozorovatel mimo kouli

$$V = 4\pi G \rho_0 \left( \underbrace{\frac{1}{3} \frac{R^3}{r}}_{\text{Koule}} + \underbrace{R^2 \sum_{\ell, m} \frac{\epsilon_{\ell, m}}{2\ell+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} Y_\ell^m(\theta, \varphi)}_{\text{Rozhraní}} \right) + C$$

Koule

Rozhraní

Integrační konstanta,  $= 0$

## Pozorovatel v kouli

◦ část pod pozorovatelem

$$U^{r > r'} = \frac{4}{3} \pi G \rho_0 r^2$$

- část koule nad pozorovatelem

$$U^{r < r'} = 2\pi G \rho_0 (R^2 - r^2)$$

=>

$$V = 2\pi G \rho_0 \left( \underbrace{\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right)}_{\text{obě části koule}} + \underbrace{2R^2 \sum_{\ell m} \frac{\epsilon_{\ell}^m}{2\ell+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} Y_{\ell}^m(r, \varphi)}_{\text{kolenní rozhrazení}} \right)$$

obě části koule

kolenní rozhrazení

## IV. Celkový potenciál

Interpretace gravitačních anomálií stupňů 0, 1, 2

$$A_{\ell}^m = \frac{4\pi G}{2\ell+1} \iiint (r')^{\ell} (Y_{\ell}^m)^*(r', \varphi') dm'$$

Stupeň 0

- informace o celkové hmotě tělesa

$$A_0^0 = G\sqrt{4\pi} M \Rightarrow M = \frac{A_0^0}{G\sqrt{4\pi}}$$

Stupeň 1

- informace o souřadnicích těžiště (center of gravity)
- obvykle  $A_1^0 = A_1^{\pm 1} = 0$ , těžiště v počátku SS

Stupeň 2

- říká nám o tvaru srovnání

$$I = \begin{pmatrix} A & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & B & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & C \end{pmatrix}$$

- volíme  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , tedy  $A_2^{\pm 1} = 0$
- hledáme vztah mezi  $A_2^0, A_2^{\pm 2}$  a  $A, B, C$

$$A_2^0 = 2G\sqrt{\frac{\pi}{5}} \left( \frac{A+B}{2} - C \right)$$

$$A_2^{\pm 2} = G\sqrt{\frac{3\pi}{10}} (B-A)$$

- dvě rovnice pro 3 neznámé, potřebujeme další info (typický hydrostatický těleso)  
 → pro Zemi  $A=B$

!  $A_2$  ne vždy!

## Rotální a slapové potenciály

### • Rotální

- zrychlení

$$\vec{a}_{\text{rot}} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\nabla \frac{1}{2} ((\vec{r} \cdot \vec{r})(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2)}_{V_{\text{rot}}}$$

→ bac-cab + špičkový trik

- potenciál můžeme vyjádřit pomocí LP a SH pro  $\vec{\omega}$  ve směru  $\vec{e}_z$

$$\rightarrow \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos \vartheta$$

$$\Rightarrow V_{\text{rot}} = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \left(1 - \frac{2P_2^0 + 1}{3}\right)$$

$$V_{\text{rot}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{3} \omega^2 r^2 \left(Y_0^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_2^0\right)$$

- parametr  $\zeta$  na povrchu  $R$

= poměr odstředivého potenciálu a gravitačního potenciálu

$$\zeta = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 R^3}{GM}$$

- parametr  $\bar{\zeta}$  je poměr odstředivé a gravitační síly

$$\bar{\zeta} = \frac{\omega^2 R^3}{GM} = 3\zeta$$

## Geoid, sféroid a elipsoid

### Definice geoidu

- plocha konstantního potenciálu

$$V_T = V_{\text{grav}} + V_{\text{rot}} + V_{\text{tide}} = C$$

která nejlépe odpovídá tvaru tělesa.

### Definice elipsoidu

- jde jej popsat rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

### Sféroid

- speciální elipsoid, kde  $b=a$ , tedy lze popsat zploštěním

$$f = \frac{a-c}{a}$$

## Vztah geoidu a parametrů $J_2$ , $\zeta$ a $f$

- pro těleso v hydrostatické rovnováze platí vztah

$$\frac{2}{3}f - J_2 - \zeta = 0$$

$J_2$  ... popisuje odchylku od gravitačního pole koule stupně 2, řádu 0

## V. Clairautova dif. rovnice a Darwin-Radauova rovnice

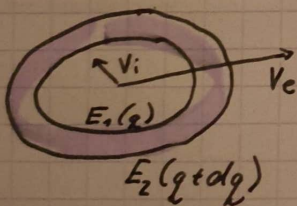
### Clairautova diferenciální rovnice

- Předpoklady: hydrostatická rovnováha
  - před deformací je těleso radiačně symetrické
  - po deformaci je možné popsat plochy konstantního potenciálu a konstantní hustoty

$$r = q \left( 1 - \sum_l \frac{2}{3} \epsilon_l(q) P_l(\cos v) \right)$$

v našem případě jen  $l=2$

- Odvoreni: počítáme  $dV_e^2 = V_e^2(E_2) - V_e^2(E_1)$  a to samé pro  $dV_e^1$



- z toho určíme celkový  $V_T$  na rovině ploše (konstantní, nezávisí na  $v$  a  $\varphi$ ), nazývá  $V_S$

- $V_S$  je nezávislé na  $v$ , úhlová část musí být nulová

- dostaneme integrační tvar

$$-\frac{5}{8} \frac{\omega^2 q^5}{\pi G} = \int_0^q \rho(q') \frac{d}{dq'} (q'^5 \epsilon_2(q')) dq' + q^5 \int_q^\infty \rho(q') \left( \frac{d\epsilon_2(q')}{dq'} \right) dq'$$

$$- 5q^2 \epsilon_2(q) \int_0^q \rho(q') q'^2 dq'$$

: derivací a dalšími úpravami  
dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dq^2} + \frac{6}{q} \frac{p}{p} \frac{d\varepsilon_1}{dq} - \frac{6}{q^2} \left(1 - \frac{p}{p}\right) \varepsilon_1 = 0$$

• hraniční podmínky: porovnání rozloštění  
na povrchu

$$\varepsilon_2(R) = p$$

: pro  $q = R$

$$2\varepsilon_2(R) + R \frac{d\varepsilon_2}{dq} \Big|_{q=R} = \frac{15}{2} p$$

Rěšení pro homogenní těleso

• rovnice se redukuje na

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dq^2} + \frac{6}{q} \frac{d\varepsilon_1}{dq} = 0$$

což je C-E rovnice, dáva

$$\varepsilon_2 = b + \frac{c}{q^5}$$

•  $c = 0$  aby bylo ve středu Země řešení regulární

• z okrajových podmínek

$$\varepsilon_2 = b = \frac{15}{16} \frac{\omega^2}{\pi G \rho_0}$$

Radaunova diferenciální rovnice

- Clairautovu rovnici řeším Radaunovou transformací

$$\eta = \frac{q}{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon_2}{dq} = \frac{d \ln \varepsilon_2}{d \ln q}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varepsilon_2}{dq} = \frac{\eta}{q} \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \varepsilon_2}{dq^2} = \frac{d}{dq} \left( \frac{\eta}{q} \varepsilon_2 \right) =$$

$$= -\frac{\eta}{q^2} \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2}{q} \frac{d\eta}{dq} + \frac{\eta}{q} \frac{d\varepsilon_2}{dq} = \left( \frac{1}{q} \frac{d\eta}{dq} + \frac{\eta^2 - \eta}{q} \right) \varepsilon_2$$

- z Clairautovy rovnice dostaneme Radaunovu rovnici

$$q \frac{d\eta}{dq} + \eta^2 - \eta - 6 + 6 \frac{p}{p} (1 + \eta) = 0$$

- lze přepsat do alternativní formy

$$\frac{d}{dq} (\bar{\rho} q^5 \sqrt{1+\gamma}) = 5 \bar{\rho} q^4 \psi(\gamma)$$

$$\psi(\gamma) = \frac{1 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{10}\gamma^2}{\sqrt{1+\gamma}}$$

$\rightarrow \psi(\gamma)$  je téměř konstantní 1

$\Rightarrow$  redukovaná Radanova rovnice

$$\frac{d}{dq} (\bar{\rho} q^5 \sqrt{1+\gamma}) = 5 \bar{\rho} q^4$$

MOI

$$MOI = \tilde{C} = \frac{C}{MR^2} = \frac{1}{MR^2} \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r') r'^4 dr'$$

$$\text{ kde } C = \iiint (x'^2 + y'^2) \rho(r') d\Omega'$$

Darwin-Radanova rovnice

$$C = \frac{2}{3} MR^2 \left( 1 - \frac{2}{5} \left( \frac{15}{2} \frac{E}{f} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow MOI = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{5} \left( \frac{15}{2} \frac{E}{f} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$\rightarrow$  vyjadřuje vztah mezi MOI a rotací a tvarem tělesa

$\rightarrow$  u Země nerychází úplně přesně

$\rightarrow$  země není v hydr. rovnováze

## VI. Realistická tělesa

Geoid a quasi-geoid

Geoid: ~~je~~ ekvipotenciální plocha,  $U(r, \vartheta, \varphi) = U_0 = \text{const.}$

Quasi-geoid: například pod kontinenty nelze přesně určit potenciál

: ekvipotenciální plocha se posune dolů a vaníhne quasi-potenciál, který určuje quasi-geoid

## Stokesovy koeficienty

- používáme plně normalizované SH v počátku SS, který odpovídá křivosti
- gravitační potenciál:

$$U^g(r, \vartheta, \varphi) = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_l^m(R) \left( \frac{R}{r} \right)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \right)$$

kde  $V_l^m$  jsou Stokesovy koeficienty

$$V_l^m(R) = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{M} \iiint \left( \frac{r'}{R} \right)^l \rho(\vec{r}') (Y_l^m)^*(\vartheta', \varphi') dV'$$

"vysokofrekv. filtry"

Plošné rozložení hustoty v Zemi

- případně pomocí normalizovaných legendrových polynomů

$$U^g(r, \vartheta, \varphi) = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R}{r} \right)^l \bar{P}_l^m(C_l^m \cos(m\varphi) + S_l^m \sin(m\varphi)) \right)$$

Stokesovy koeficienty pro reálnou formulaci

- pro osově symetrická tělesa dělíme celkový potenciál

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \underbrace{\frac{GM}{r} + \frac{1}{3} \omega^2 r^2 - \frac{1}{3} \omega^2 r^2 P_2(\cos \vartheta) - \frac{GM}{r^3} R^2 J_2 P_2(\cos \vartheta)}_{\text{Regulární část}} + \underbrace{T(r, \vartheta, \varphi)}_{\text{Poruchová část}}$$

kde

$$T(r, \vartheta, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{\substack{l=2, m \\ (l, m) \neq (2, 0)}} V_l^m \left( \frac{R}{r} \right)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) - \sum U_l^m(r) Y_l^m$$

## Geoid, gravitační porucha, free-air gravitace

- geoid je plocha konstantního (quasi-)potenciálu, hledáme odchylku od referenčního poloměru  $\bar{R}$

$$U(\bar{R} + \delta r(\vartheta, \varphi)) = U_0$$

$$\rightarrow \delta r(\vartheta, \varphi) = \sum_{l, m} h_l^m Y_l^m$$

$$\text{kde } h_l^m = \bar{R} \left( \frac{R}{\bar{R}} \right)^l V_l^m = \frac{U_l^m(\bar{R})}{g(\bar{R})}$$

- gravitační porucha je radiální složka gravitace na referenčním potenciálu  $\bar{R}$  poloměru

$$g_d(r, \varphi) \equiv - \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=\bar{R}} \equiv \sum_{l,m} (g_d)_l^m Y_l^m$$

$$\vec{g} \cdot \vec{e}_r < 0$$

$$\text{ kde } (g_d)_l^m = \frac{l+1}{\bar{R}} U_l^m(\bar{R}) = \frac{l+1}{\bar{R}} g(\bar{R}) h_l^m$$

přeskalování; posílení vysokofrekv. signálu

- free-air gravitaci dostaneme, když odstraníme efekt výšky geoidu

$$g_s(r, \varphi) \equiv - \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=\bar{R} + \delta r(r, \varphi)} \equiv \sum_{l,m} (g_s)_l^m Y_l^m$$

$$\text{ kde } (g_s)_l^m = \frac{l-1}{\bar{R}} U_l^m(\bar{R}) = \frac{l-1}{\bar{R}} g(\bar{R}) h_l^m$$

- můžeme dostat i z pozorování

$$g_s = (g_{obs} - \gamma) + \pm(r, \varphi) \frac{2g_{obs}}{\bar{R}}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 normální gravitace elevation

## Topografie a Bouguerova anomálie

- tvar tělesa  $S(r, \varphi) = \sum_{l,m} s_l^m Y_l^m(r, \varphi)$

- topografie je elevace tělesa nad referenční plochou

$$\pm(r, \varphi) = \sum_{l \geq 1} \sum_m \pm_l^m Y_l^m(r, \varphi)$$

- Bouguerova anomálie vznikne odečtením gravitačního vlivu topografie

$$g_b = g_{fa} - g_{\pm}$$

## Admitance a spektrální korelace

Výkonové spektrum funkce  $f(r, \varphi)$

$$S_{ff}(l) = \sum_{m=-l}^l f_l^m (f_l^*)^m$$

$$S_{ff} = \sum_{l,m} f_l^m (f_l^*)^m$$

- cross-korelace  $f$  a  $g$   $f(r, \varphi)$  a  $g(r, \varphi)$

$$S_{fg} = (l) = \sum_{m=-l}^l f_l^m (g^*)_l^m \quad S_{gg} = \sum_{lm} f_l^m (g^*)_l^m$$

- stupňová (degree) korelace

$$V(l) = \frac{S_{tg}(l)}{\sqrt{S_{gg}(l) S_{tt}(l)}}$$

$t \dots$  topografie

$g \dots$  gravitace

- mezi 1... plná korelace  
a  
-1... plná antikorelace

- admittance

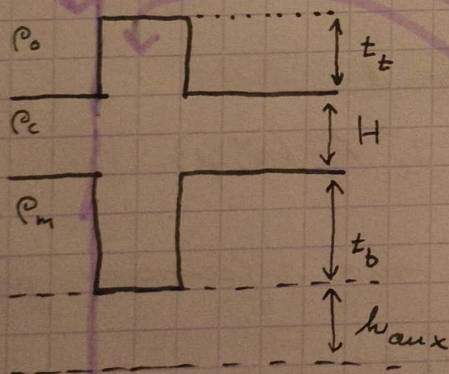
$$Z(l) = \frac{S_{tg}(l)}{S_{tt}(l)}$$

## VII. Kompenzační mechanismy

- Isostasie - Airy - Heiskanen

- hustota kůry je konstantní

- kompenzační hloubka se mění



Z Archimédova zákona:

$$t_t \rho_0 + H \rho_c + (t_b + t_t) \rho_m =$$

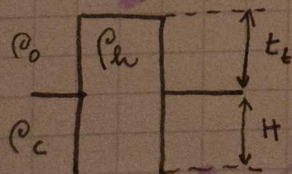
$$= (t_t + H + t_b) \rho_c + h_{aux} \rho_m$$

$$\Rightarrow t_b = \frac{\rho_c - \rho_0}{\rho_m - \rho_c} t_t$$

- Pratt - Hayford

- kompenzační hloubka konstantní

- hustota se mění



$$\rho_H(t_t + H) = \rho_0 t_t + \rho_c H$$

$$\Rightarrow \rho_H = \frac{\rho_0 t_t + \rho_c H}{t_t + H}$$

## Elastický ohyb

- litosféra se ohýbá, čímž částečně podpira topografii

=> Celkový gravitační signál odpovídá kombinaci ohybu a Airyho isostázie

- kompenzační koeficient

- poměr mezi ~~topo~~ spodní topografií

- od elastického ohybu  $(t_b^E)_l^m$

- od Airyho isostázie  $(t_b^I)_l^m$

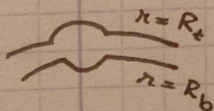
$$\Rightarrow C_l = \frac{(t_b^E)_l^m}{(t_b^I)_l^m}$$

=> gravitační signál pro samotného Airyho

$$(V^I)_l^m = \frac{4\pi G}{2l+1} R_t \rho_c \left( 1 - \left( \frac{R_t - H}{R_t} \right)^{l+2} \right) (t_b)_l^m$$

po napočítání el. ohybu

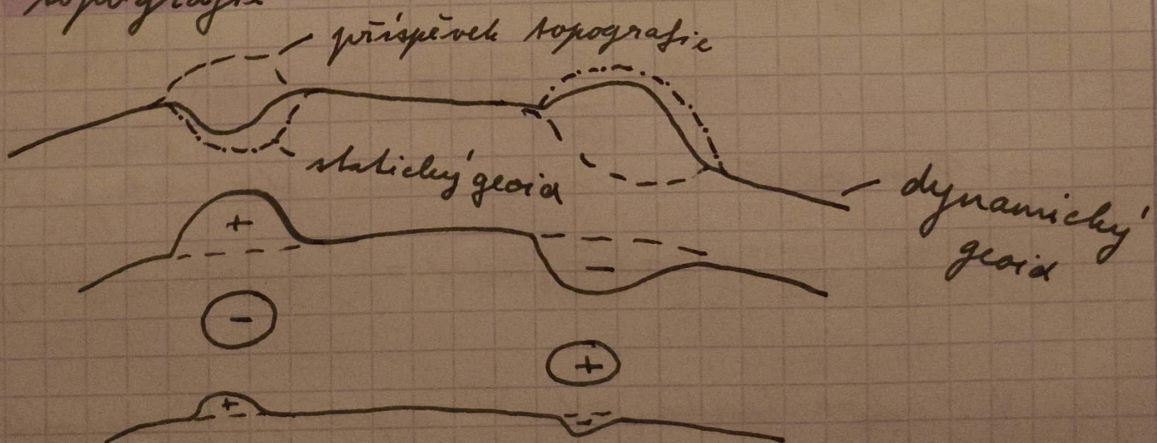
$$(V^E)_l^m = \frac{4\pi G}{2l+1} R_t \rho_c \left( 1 - C_l \left( \frac{R_t - H}{R_t} \right)^{l+2} \right) (t_b)_l^m$$



## Dynamické efekty

### Dynamická topografie

- v plášti vznikají hustotní a teplotní anomálie
- vztah anomálií a topografie není přímý
- na geoid tedy působí jak anomálie, tak topografie



# VIII. Slapy

Statické x dynamické slapy

Statické - idealizované: ohamatí realce, bez vlivu dna a kontinentů, bez setrvačnosti

Dynamické - reálné - reálné: setrvačnost, interakce s kontinenty a dnem

Potenciál pro idealizovanou situaci

- Těleso
- je nedeformovatelné
  - je sféricky symetrické
  - má nulovou excentricitu a sklon rot. osy
  - je nerotující objekt konečných rozměrů

Velikost vzájemné síly mezi tělesy

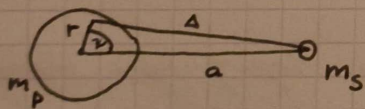
$$|\vec{F}_g| = G \frac{m_p m_s}{r^2}$$

Z Keplerových zákonů musí v těžišti vyrovňovat odstředivou sílu silou gravitační (průměrnou)

$$\vec{F}_c = \langle \vec{F}_g \rangle$$

V ostatních bodech definujeme slapovou sílu

$$\vec{F}_E = \vec{F}_c - \langle \vec{F}_g \rangle$$



Potenciál

$$V(r, \psi) = G \frac{m_s}{\Delta}$$

-> Rozvoj pomocí LP

$$V = \frac{G m_s}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \psi)$$

-> Pro většinu těles stačí do stupně  $l=2$

$$V \approx \frac{G m_s}{a} \left( 1 + \left(\frac{r}{a}\right) \cos \psi + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) \right) = V_0 + V_1 + V_2$$

$V_0$ ... konstanta,  $\nabla V_0 = \vec{0}$  nepřispívá k síle

$V_1$ ... konstantní na plochách kolmých na spojnici a

víla je rovnoběžná s  $a$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r \cos \psi} = G \frac{m_s}{a^2} = \frac{\langle F \rangle}{m_p}$$

$V_2 \dots$  odpovídá nejvyššímu stupni slapové síly

$$\nabla V_2(r, \psi) \approx \frac{\vec{F}_t}{m_p}$$

na povrchu obvykle vyjádřen jako

$$V_t(R_p, \psi) = \frac{G m_s}{a} \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 P_2(\cos \psi) = \xi g P_2(\cos \psi)$$

$$\text{kde } g = G \frac{m_p}{R_p^2} \quad \xi = \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^3 R_p$$

Amplituda rovnovážných slapů

## Slapy na Zemi

• Zonální - konstantní, permanentní deformace



- velké slapy u rovníku, malé na pólech

• Přerážní - perioda ~ 1 den



- závisí na inklinaci oběžné dráhy měsíce

- silná modulace na 14-denní periodu hvězdi měsíce a pulsační hvězdi Slunci

• Sektorální - perioda ~ 1 den



- možnost modulačních efektů

## Elastické těleso

- V celkovém potenciálu je slapový potenciál a potenciál způsobený deformací

$$\bar{U}_{\text{tot}} = U + V_t + V_t'$$

- pozorovat se vlivem deformace přesune z  $M$  do  $M'$

$$\begin{aligned}\bar{U}_{\text{tot}}(M') &= U(M') + V_z(M') + V_z'(M') = \\ &= U(M) + \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_M \delta \bar{r} + V_z(M) + V_z'(M) = \\ &= U(M) + V_z''(M) + V_z(M) + V_z'(M)\end{aligned}$$

- původní ekvipotenciální plocha se přesune do  $M''$

$$\bar{U}_{\text{tot}}(M'') \approx U(M) + \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_M \delta \bar{r}' + V_z(M) + V_z'(M)$$

Loučová čísla

$$k \equiv \frac{\text{slabý buzení' potenciál}}{\text{slabý' potenciál}} = \frac{V_z'}{V_z}$$

$$\eta \equiv \frac{\text{deformace povrchu}}{\text{amplituda rovn. slabí}} = \frac{\delta \bar{r}}{\xi} = \frac{\delta \bar{r}}{\delta r} \approx \frac{g \delta \bar{r}}{V_z} = \frac{-\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_M \delta \bar{r}}{V_z} =$$

$$= - \frac{V_z''}{V_z}$$

## IX. Rotace

Soustavy souřadnic

- Inerciální - systémy, ve kterých se tělesa, na která nepůsobí síly, pohybují rovnoměrně přímočaře
- Peoně spojená s tělesem - spojený s osami tenzoru setrvačnosti
- Soustava momentu hybnosti - spojena s vektorem mom. hyb.
- Tisserandova - relativní moment hybnosti považován za nulový

Variace v rotaci

Vě směřu

- pohyb ~~setrvačností~~ v prostoru - precese a nutace
- pohyb v soustavě těles - wobble, pohyb polí

## Variace ve velikosti (rychlosti)

- změny délky dne
- zpomalování kvůli slapům
- fluktuace (atmosféra, oceánské proudy...)
- sezónní variace (tání ledu)

## Volné a nucené pohyby

- volné
  - bez vnějšího momentu, zachování momentu hybnosti
  - odehrávají se, když vektor rotace nesplyvá s osami inercie
  - trojvrstvý model planety
    - Chandlerovo kolebání (~ 432 dní)
    - Volná nutace jádra
    - Volná nutace jáderka
    - Chandlerovo kolebání jáderka
- nucené
  - způsobené vnějším momentem, gravitačním působením
  - gyroskopická odezva
  - redistribuce hmoty, atmosférické, slapové jevy

## Základní rovnice

$\vec{H}$  ... moment hybnosti       $\vec{L}$  ... moment sil

◦ Grav. potenciál  $V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Gm}{r} \sum_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^l V_l^m Y_l^m(r, \vartheta, \varphi)$

◦ Moment sil  $\vec{L} = -m \vec{r} \times \nabla V$

◦ Zachování  $\vec{H}$   $\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{\text{inerc}} = \vec{L}$

$$\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{\text{coR}} = \vec{L} - \vec{\omega} \times \vec{H}$$

◦ Moment hybnosti  $\vec{H} = \iiint \vec{r} \times \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\text{inerc}} dm'$

◦ Mom. hyb. prvního tělesa  $\vec{H} = \iiint \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm'$

◦ moment setrvačnosti  $I = \iiint (\vec{r} \cdot \vec{r}) \parallel - \vec{r} \vec{r}) dm$

$$\vec{H} = I \cdot \vec{\omega}$$

### Precese, nutace a prave' putování' pólu

Precese - dlouhodobý' kuželovitý' pohyb zemské' osy (25 772 let)

- hlavně působení' Slunce a Měsíce

Nutace - krátkodobý' periodický' pohyb osy

- působení' Slunce na oběh Měsíce

↳ změna orientace roviny dráhy Měsíce

- 18,6 let

Prave' putování' pólu - změna polohy rotační' osy vzhledem ke hvězdě

- vnitřní dynamika

### Eulerovo a Chandlerovo kolebání'

- v podstatě precesní' pohyb, nepůsobený' vnějšími' momenty

- nejspíš způsobené' změnami rozložení' hmoty a atmosféry

- vznikají díky odklonu osy symetrie a osy rotace

### Vlna' nutace a Chandler v jádře

◦ Vlna' nutace jádra - odchylka okamžitých rotačních os pláště a jádra

◦ Vlna' nutace jádérka - odchylka os symetrie jádérka a pláště

◦ Chandler jádérka - odchylka osy symetrie jádérka od rotační' osy

## Liouvillova rovnice

Budu potřebovat

- moment hybnosti  $\vec{H} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}$
- relativní (deformační) moment hybnosti  
 $\vec{h} = \iiint (\vec{r} \times \vec{v}) dm'$
- rotační moment hybnosti  $\mathbb{I} \cdot \vec{\omega}$ ,  $\mathbb{I} = \mathbb{I}(t)$
- Tisserandova soustava - definována aby  $\vec{h} = 0$
- Kinetická energie v Inerciální soustavě

$$T = \frac{1}{2} \iiint \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{inertial}} dm'$$

- v Krotáční s.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iiint (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}) (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}) dm' = \\ &= \frac{1}{2} \iiint (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm + \frac{1}{2} \iiint (\vec{v} \cdot \vec{v}) dm + \iiint (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} dm \\ &\quad \text{rotační energie} \quad \text{deformační energie} \quad \text{interakční energie} \end{aligned}$$

- v Tisserandově

- deformační minimalizována

- interakční lze napsat  $T_{\text{int}} = \vec{\omega} \cdot \frac{h}{\omega} = 0$

=> Liouvillova rovnice

$$\frac{d}{dt} \vec{H} \Big|_{\text{cor}} + \vec{\omega} \times \vec{H} \Big|_{\text{cor}} =$$

$$= \frac{d}{dt} (\mathbb{I} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) \Big|_{\text{cor}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{I} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) \Big|_{\text{cor}} = \vec{L}$$

nebo, pro Tisseranda

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{I} \cdot \vec{\omega}) \Big|_{\text{cor}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{I} \cdot \vec{\omega}) \Big|_{\text{cor}} = \vec{L}$$

$\Rightarrow$  Euler-Liouvillovu rovnici dostaneme  
linearizaci

$$\vec{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1+m_3 \end{pmatrix}, \quad m_i \ll 1$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \mathbb{C}, \quad C_{ij} \ll A, B, C$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

**X. Měření**